МИНОБРНАУКИ РОССИИ

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования
«САРАТОВСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ Н. Г. ЧЕРНЫШЕВСКОГО»

Кафедра теории функций и стохастического анализа

БЕСКОНЕЧНЫЕ АНТАГОНИСТИЧЕСКИЕ ИГРЫ И ИХ ПРИЛОЖЕНИЕ К ЭКОНОМИКЕ

АВТОРЕФЕРАТ БАКАЛАВРСКОЙ РАБОТЫ

студента 4 курса 412 группы
направления 01.03.02 — Прикладная математика и информатика

механико-математического факультета
Жукова Сергея Сергеевича

Научный руководитель
доцент, к. ф.-м. н. ______________ С. С. Волосивец

Заведующий кафедрой
д. ф.-м. н., доцент ______________ С. П. Сидоров

Саратов 2024

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ 2
ЗАКЛЮЧЕНИЕ 11

ВВЕДЕНИЕ

Актуальность темы. Математическая теория игр представляет собой раздел математики, в котором исследуются модели принятия оптимальных решений в условиях конфликта. Она позволяет решать реальные задачи в различных областях человеческой деятельности, таких как экономика и менеджмент, промышленность и сельское хозяйство, военное дело и строительство, торговля и транспорт, связь и т. д. Среди приложений большой интерес представляют бесконечные антагонистические игры, в которых число стратегий хотя бы одного из игроков бесконечно.

Данная работа является актуальной, поскольку теория бесконечных антагонистических игр имеет широкое применение для моделирования, анализа и решения реальных конфликтных ситуаций.

Целью бакалаврской работы является построение антагонистической игры для сети добровольных вычислений.

Объект исследования: бесконечные антагонистические игры.

Предмет исследования: множество оптимальных стратегий игроков, значение игры, математическое ожидание выигрыша игроков.

Для достижения целей, поставленных в работе, необходимо решить следующие **задачи**:

1. Изучить теоретический материал;
2. Построить антагонистичкую игру сети добровольных вычислений;
3. Разработать алгоритм решения задачи;
4. Программно реализовать поставленную задачу на языке Python;
5. Провести анализ полученных результатов.

Практическая значимость проводимого исследования состоит в том, что математическое описание бесконечной антагонистической игры сводится к перечислению всех действующих в ней игроков, указанию для каждого игрока всех его стратегий, а также численного выигрыша, который он получит после того, как игроки выберут свои стратегии, в результате игра становится формальным объектом, который поддается математическому анализу, что позволяет моделировать и изучать экономические модели, модели рынка и конкуренции, модели ценообразования, переговоры, стабильные соглашения и др.

Структура и содержание бакалаврской работы: Работа состоит из введения, четырёх разделов, заключения, списка использованных источников и приложения.

ОСНОВНОЕ СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Во **введении** обосновывается актуальность темы работы, формулируется цель бакалаврской работы и решаемые задачи, отмечается практическая значимость исследования.

В **первой** главе рассмотрена вводная информация, а именно основные понятия теории игр. Теория игр — это раздел математики, который изучает поведение участников игры. Задачей теории игр является исследование и определение оптимальных правил (стратегии) поведения для каждого из участников конфликтной ситуации.

Под игрой понимается любая ситуация, где конфликтуют интересы минимум двух игроков. Игроком принято считать одного участника или группу участников игры, имеющих одни общие для них интересы, не совпадающие с интересами других групп.

Теория игр включает в себя два раздела:

1. Теория кооперативных игр;
2. Теория некооперативных игр.

Если в игре учавствуют два игрока, интересы которых являются противоположными, то такая игра называется антагонистической. В зависимости от природы множеств стратегий каждого из игроков, антагонистические игры могут быть конечными или бесконечными.

Бесконечной антагонистической игрой называется тройка $\Gamma =< \mathbf{x}, \mathbf{y}, H >$, где $\mathbf{x}$ - множество чистых стратегий игрока I, $\mathbf{y}$ - множество чистых стратегий игрока II, H - функция выигрыша, и хотя бы одно из множеств $\mathbf{x}, \mathbf{y}$ бесконечно.

Процесс разыгрывания антагонистической игры состоит в том, что игроки I и II, независимо друг от друга, выбирают соответственно некоторые чистые стратегии x^0 и y^0, в результате чего складывается ситуация (x^0, y^0).

После этого игрок I получает выигрыш $H(x^0, y^0)$. При этом игрок II столько же проигрывает. Поэтому величину $H(x, y)$ также называют проигрышем игрока II. Понятия проигрыша и понятия выигрыша чисто условны, так как величина $H(x, y)$ может быть отрицательной.

Во **второй** главе рассмотрены элементы теории игр, решение игр и смешанные стратегии.

Конфликтные ситуации, в которых игроки, преследуя прямо противоположные цели, выбирают значения некоторых непрерывно изменяющихся параметров (времени, цены, веса, расстояния, количества того или иного ресурса и т.п.). Обычно в этом случае множество допустимых для выбора значений параметра является бесконечным, и поэтому теоритеко-игровые модели таких конфликтов называются бесконечными антагонистическими играми.

Модификация исходной антагонистической игры, в которой её стратегии могут выбираться игроками уже не однозначно, а вероятностным образом, называется смешанным расширением данной антагонистической игры.

Определение 1. Пусть множества $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$ являются сепарабельными метрическими компактами, а функция $H(x, y)$ - непрерывной, либо кусочно-непрерывной. Тройка $\Gamma = <\mathbf{X}, \mathbf{Y}, H>$, где $H(X, Y)$, $X \in \mathbf{X}$, $Y \in \mathbf{Y}$, - математическое ожидание выигрыша игрока I, равное

$$H(X, Y) = \int_{\mathbf{x}} \int_{\mathbf{y}} H(x, y) dX(x) dY(y),$$

называется смешанным расширением бесконечной антагонистической игры.

Если игроки применяют смешанные стратегии $\mathbf{X}$ и $\mathbf{Y}$, то игра разыгрывается следующим образом: сначала согласно вероятностным мерам $\mathbf{X}$ и $\mathbf{Y}$ случайно и независимо выбирается по точке $x \in \mathbf{x}$, $y \in \mathbf{y}$, после чего первый игрок выигрывает у второго величину $H(x, y)$. Пара (X, Y) называется ситуацией в смешанных стратегиях.

Определение 2. Если выполняется равенство

$$\sup_{X \in \mathbf{X}} \inf_{Y \in \mathbf{Y}} H(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) = \inf_{Y \in \mathbf{Y}} \sup_{X \in \mathbf{X}} H(\mathbf{X}, \mathbf{Y}),$$

то общее значение этих двух величин называется значением игры.

Определение 3. Ситуация (X^*, Y^*) называется ситуацией равновесия бесконечной антагонистической игры, если для любых $X \in \mathbf{X}$, $Y \in \mathbf{Y}$ выполняются неравенства

$$H(X, Y^*) \leq H(X^*, Y^*) \leq H(X^*, Y).$$

Теорема 1. Если игра Γ имеет значение, а игроки - оптимальные стратегии, то множество всех ситуаций равновесия является прямым произведение множества оптимальных стратегий первого игрока на множество оптимальных стратегий второго игрока; множество оптимальных стратегий первого игрока равно множеству его максиминных стратегий, а множество оптимальных стратегий второго игрока равно множеству его минимаксных стратегий в игре Γ; выигрыши во всех ситуациях равновесия одиниковы и равны значению игры.

Теорема 2. Если игра $\Gamma = <\mathbf{x}, \mathbf{y}, H>$ имеет значение, а игроки - оптимальные стратегии, то

$$\max_X \inf_y H(X, y) = v, \quad \min_Y \sup_x H(x, Y) = v,$$

причём равенства

$$\inf_y H(X^*, y) = v, \quad \sup_x H(x, Y^*) = v$$

являются необходимыми и достаточными условиями оптимальности стратегий X^* и Y^*.

Определение 4. Пара $(X_\varepsilon, Y_\varepsilon)$ называется ситуацией ε-равновесия в игре $\Gamma = <\mathbf{x}, \mathbf{y}, H>$, если

$$H(X, Y_\varepsilon) - \varepsilon \leq H(X_\varepsilon, Y_\varepsilon) \leq H(X_\varepsilon, Y) + \varepsilon.$$

Стратегии X_ε и Y_ε называются ε - оптимальными стратегиями.

Теорема 3. Игра Γ имеет ситуацию ε-равновесия для любого $\varepsilon > 0$ в том и только в том случае, когда существует её значение.

В **третьей** главе рассмотрено нахождение решений бесконечных антагонистических игр и их свойства.

Решить бесконечную антагонистическую игру - значит определить оптимальную стратегию для первого игрока, которая гарантировала бы ему максимальный средний выигрыш, выбор оптимальной стратегии второго игрока, которая гарантировала бы ему максимальный средний проигрыш, а также найти цену игры при оптимальных стратегиях.

Приближенные решения бесконечных антагонистических игр можно находить, используя их аппроксимации матричными играми, для решения которых применяются методы линейного программирования. Поступая подобным образом, можно найти ε-оптимальные стратегии для любого $\varepsilon > 0$. Для практических целей этого обычно достаточно.

Определение 5. Стратегия $X^1 \in \mathbf{X}$ игрока I строго доминируется стратегию $X^2 \in \mathbf{X}$, если

$$H(X^1, y) > H(X^2, y), \quad y \in \mathbf{y}.$$

Стратегия X^2 называется строго доминируемой.

Определение 6. Стратегия $Y^1 \in \mathbf{Y}$ игрока II строго доминирует стратегию $Y^2 \in \mathbf{Y}$, если

$$H(x, Y^1) < H(x, Y^2), \quad x \in \mathbf{x}.$$

Стратегия Y^2 называется строго доминируемой.

Определение 7. Спектром смешанной стратегии игрока в конечной антагонистической игре называется множество всех его чистых стратегий, вероятность применения которых согласно этой стратегии положительна.

Теорема 4. Если $\Gamma =< \mathbf{x}, \mathbf{y}, H >$ - бесконечная антагонистическая игра, имеющая решение $(\mathbf{X}^*, \mathbf{Y}^*, v)$, а функция $H(\mathbf{X}^*, y)$ непрерывная по y, то справедливо равенство $H(\mathbf{X}^*, y^0) = v$ для любой точки y^0, содержащейся в спектре стратегий $\mathbf{Y}^*$. Если функция $H(x, \mathbf{Y}^*)$ непрерывная по x, то справедливо равенство $H(x^0, \mathbf{Y}^*) = v$ для любой точки x^0, содержащейся в спектре стратегий $\mathbf{X}^*$.

Теорема 5. Для бесконечной антагонистической игры, имеющей решение, ни одна строго доминируемая стратегия игрока не содержится в спектре его оптимальной стратегии.

Теорема 6. Если $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$ - ограниченные и заменутые многогранные подмножества, образованные пересечением конечного числа полуплоскостей в $\mathbf{R}^m$ и $\mathbf{R}^n$, а функция $\mathbf{H}$ является билинейной функцией на $\mathbf{x} \times \mathbf{y}$, т.е. имеет вид

$$\mathbf{H} = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} h_{ij} \mathbf{x}_i \mathbf{y}_j,$$

то игра $\Gamma = < \mathbf{x}, \mathbf{y}, H >$ имеет решение в чистых стратегиях, причём эти решения определяются решениями некоторой матричной игры.

Теорема 7. Пусть $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$ - сепарабельные компакты, множество $\mathbf{x} \subset \mathbf{R}^m$ выпукло, а функция H непрерывна на $\mathbf{x} \times \mathbf{y}$ и вогнута по $x \subset \mathbf{x}$ при каждом значении $y \subset \mathbf{y}$, тогда в игре $\Gamma =< \mathbf{x}, \mathbf{y}, H >$ первый игрок имеет оптимальную чистую стратегию. Если $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$ - сепарабельные компакты, множество $\mathbf{y} \subset \mathbf{R}^m$ выпукло, а функция H непрерывна на $\mathbf{x} \times \mathbf{y}$ и выпукла по $y \subset \mathbf{y}$ при каждом значении $x \subset \mathbf{x}$, то в игре $\Gamma =< \mathbf{x}, \mathbf{y}, H >$ второй игрок имеет оптимальную чистую стратегию.

Пусть единичный квадрат составлен из конечного числа многоугольников, т.е. является их объединением, а множества $\Omega_1, \Omega_2, ..., \Omega_k$ внутренних точек этого многоугольников попарно не пересекаются. Тогда всякую непрерывную функцию на единичном квадрате, линейную на каждом из множеств Ω_i будем называть непрерывной кусочной линейной функцией.

Положим $\Phi = \bigcup_{i \neq j} (\overline{\Omega_i} \bigcap \overline{\Omega_j})$. Рассмотрим множество Φ для функции

$$H = \begin{cases} 1 + \frac{1}{\delta}(x-y), & x \leq y, \quad |x-y| \leq \delta, \\ 1 + \frac{1}{\delta}(y-x), & x \geq y, \quad |x-y| \leq \delta, \\ 0, \quad |x-y| > \delta. \end{cases}$$

Оно состоит из точек квадрата, лежащих на прямых $y = x + \delta$, $y = x$, $y = x - \delta$.

Определим многозначные отображения f и g соответсвенно множеств

$\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$ в множества подмножеств $\mathbf{y}$ и $\mathbf{x}$ следующим образом.

$$f(x) = \{y \in \mathbf{y} | (x, y) \in \Phi\}, \quad g(y) = \{x \in \mathbf{x} | (x, y) \in \Phi\}.$$

Теорема 8. Пусть $\Gamma =< \mathbf{x}, \mathbf{y}, H >$ - игра на единичном квадрате с непрерывной кусочно линейной функцией H. Тогда каждое решение конечной антагонистической игры $\Gamma^1 =< \mathbf{a}, \mathbf{b}, H >$, где $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ - конечные множества, для которых справедливы условия $\mathbf{a} \subset \mathbf{x}$, $\mathbf{b} \subset \mathbf{y}$ $(0, 1 \in \mathbf{a}; 0, 1 \in \mathbf{b})$,$f(\mathbf{a}) \subset \mathbf{b}$, $g(\mathbf{b}) \subset \mathbf{a}$, является решением игры Γ.

В **четвёртой** главе представлена постановка задачи, ее алгоритм и решение на конкретных значениях.

Рассмотрим грид-систему (Desktop Grid) добровольных вычислений, состоящую из сервера и большого количества компьютеров (узлов), соединенных коммуникационной сетью. Узлы запрашивают у сервера задания, выполняют и возвращают ответ на сервер.

Пусть сервер - игрок I, а злоумышленник - игрок II, тогда возникает игровая ситуация. При заданном уровне репутации, сервер может либо ценой затрат проверять задания тщательно, либо не проверять вовсе, ценой высокого риска. Злоумышленник может внедрить много узлов, а может внедрить несколько или ни одного.

Возможны три случая:

1. Все реплики попали на узлы злоумышленника и неверный ответ принят сервером; вероятность этого события $C_m^\nu \ / \ C_{N+M}^\nu$, дополнительный расход сервера равен F, доход злоумышленника равен G.

2. Все реплики попали на честные узлы и принят правильный ответ; вероятность этого события $C_N^\nu \ / \ C_{N+M}^\nu$, дополнительный расход сервера и доход злоумышленника равны нулю.

3. Все остальные распределения заданий по узлам, когда в расчете участвуют и честные, и нечестные узлы — последние разоблачаются, дополнительный доход сервера $ms(r)$ равен полезной работе, которая потребуется для восстановления репутации r для m внедренных и разоблаченных узлов, а злоумышленник совершает эту работу, затрачивая $Ims(r)$ единиц стоимости.

При данных условиях средние расходы сервера составляют:

$$C = \nu + \frac{C_m^\nu}{C_{N+M}^\nu}F - (1 - \frac{C_m^\nu}{C_{N+M}^\nu} - \frac{C_N^\nu}{C_{N+M}^\nu})ms(r), \quad (1)$$

средний выигрыш злоумышленника равен

$$V = \frac{C_m^\nu}{C_{N+M}^\nu}G - (1 - \frac{C_m^\nu}{C_{N+M}^\nu} - \frac{C_N^\nu}{C_{N+M}^\nu})Ims(r). \quad (2)$$

Для решения полученной игровой ситуации рассмотрим случаи, когда каждый расчет проверяется на доверенном устройстве, т.е. $\nu = 1$, $\nu = N+M$, $m = 0$ (отказ от враждебной акции) и $m = M$ (атака всеми силами). Получаем антагонистическую игру, матрицы выигрышей сервера и злоумышленника представлены в таблицах 1 и 2 соответсветнно.

Таблица 1 – Матрица выигрышей сервера.

	$m = 0$	$m = M$
$\nu = 1$	-1	-1 - $\frac{MF}{N+M}$
$\nu = N + M$	$-(N + M)$	$Ms(r) - (N + M)$

Таблица 2 – Матрица выигрышей злоумышленника.

	$m = 0$	$m = M$
$\nu = 1$	0	$\frac{MG}{N+M}$
$\nu = N + M$	0	$-MIs(r)$

Из таблицы ясно, что стратегия $\nu = 1$ у сервера доминирующая, если репутация r удовлетворяет неравенству

$$s(r) \leq 1 + \frac{N-1}{M} - \frac{F}{N+M} \quad (3)$$

Таким образом, оптимальные средние выигрыши не зависят от удельных расходов по наработке репутации I, от наживы злоумышленника G, и от числа внедренных узлов M, однако выигрыш сервера зависит от размера всей сети $N+M$, включая и внедренные узлы. Стратегия сервера p не зависит от неизвестного ему уровня внедрения M, то есть сервер фактически может принимать решения, основываясь на полученных результатах, при условии что ему известен доход от похищенного задания G и расходы I. Наконец, стратегии зависят не от штрафа F и наживы G, а от их удельных значений на каждый узел сети, то есть от $F/(N+M)$ и $G/(N+M)$, соответственно.

Покажем теперь построение и решение игровой ситуации, приняв следующие гипотетические данные. Пусть $M = N = 10$, $G = 1$, $F = 10$, $I = 1$. Ограничение на репутацию: $s > 1.4$, примем $s = 2$. Пусть $s(r) = r$, то есть репутация — просто число выполненных заданий без разоблачения. Тогда сервер работает с узлами, которые выполнили хотя бы одно задание (первое — проверочное). Смешанные стратегии: $p = 0.975$, то есть сервер в 97% случаев не проверяет задания; $q = 0.24$ (злоумышленник в четверти случаев сотрудничает с проектом). Наконец, средние расходы сервера составляют 4.8.

Описание алгоритма:

Шаг 1 Создание игровой среды

Шаг 2 Создание игровой ситуации(агента)

Шаг 3 Обучение агента при заданных смешанных стратегиях сервера и злоумышленника

Шаг 4 Ввод входных данных

Шаг 5 Поиск агентом стратегий сервера с применением результатов обучения

Шаг 6 Определение наилучшей стратегии

Шаг 7 Вывод результатов на экран

Подсчеты построенной модели описаны с помощью программного продукта на Python.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Теория бесконечных антагонистических игр - математический метод изучения оптимальной стратегии в играх. Бесконечные антагонистические игры широко применяются для анализа проблем микроэкономики, а также и в других сферах, таких как промышленность и сельское хозяйство, военное дело и строительство, торговля и транспорт, связь и т.д.

На основе заданной информации был разработан программный продукт на языке Python и реализован вычислительный эксперемент по игровой модели сети добровольных вычислений, в которой репликация заданий используется для снижения ущерба от злонамеренного искажения ответов.

На основе полученных результатов эксперимента можно сделать вывод, что построенная антагонистическая игра с высокой точностью описывает поставленную задачу.