МИНОБРНАУКИ РОССИИ

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
**«САРАТОВСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ИМЕНИ Н. Г. ЧЕРНЫШЕВСКОГО»**

Кафедра теории функций и стохастического анализа

ФОРМИРОВАНИЕ ОПТИМАЛЬНОГО ПОРТФЕЛЯ ЦЕННЫХ БУМАГ

АВТОРЕФЕРАТ БАКАЛАВРСКОЙ РАБОТЫ

Студентки 4 курса 412 группы
направления 01.03.02 — Прикладная математика и информатика

механико-математического факультета
Метишевой Виктории Евгеньевны

Научный руководитель
доцент, к. ф.-м. н., доцент ______________ А. В. Шаталина

Заведующий кафедрой
д. ф.-м. н., доцент ______________ С. П. Сидоров

Саратов 2024

Введение. Ценные бумаги играют важную роль в современной мировой экономике. При составлении направленных на получение финансовой прибыли портфелей мероприятий или портфелей финансовых активов(инвестиции, проекты, заказы) преследуется цель – при минимальном риске получить максимальный доход, однако стремление получить достаточно высокий доход обычно сопряжено с высоким уровнем риска. Для составления высокоэффективного портфеля можно применить одну из многочисленных теорий, позволяющих находить компромисс между риском финансовых операций и ожидаемым доходом.

В настоящей работе приводятся результаты исследований и теорий знаменитых экономистов, относящиеся к теории портфельных инвестиций. Дается математическая постановка задачи и ее решение для задачи Гарри Маковица и Джеймса Тобина.

После составления портфеля, для поддержания его эффективности им необходимо управлять, то есть необходимо постоянно анализировать представленные на рынке ценные бумаги с целью выявления бумаг, обладание которыми принесёт максимальную выгоду владельцу портфеля.

Целью бакалаврской работы является изучение и сравнение различных оптимальных портфелей ценных бумаг и их основных характеристик.

Актуальность работы обусловлена необходимостью постоянного поиска верных решений для ведения эффективной инвестиционной деятельности на рынке ценных бумаг, для чего необходимо знать основные методы формирования и управления портфелями бумаг.

Задачи данной бакалаврской работы:

— изучить основные характеристики разных ценных бумаг и их портфелей;
— рассмотреть понятие эффективных и оптимальных портфелей;
— рассмотреть модель ценообразования на рынке капитала CAPM для идеального конкурентного рынка;
— изучить различные меры риска и их свойства;
— разработать алгоритм формирования оптимального портфеля на основе возмущенных мер риска;
— провести вычислительный эксперимент на базе статистических данных

котировок ценных бумаг российского фондового рынка для анализа эффективности применения данных мер риска.

Структура и содержание бакалаврской работы. Работа состоит из введения, четырех разделов, заключения, списка использованных источников, содержащего 20 наименований, и приложения. *В первом разделе* описываются основные портфельные теории, выводятся основные формулы, характеризующие портфели ценных бумаг. Рассмотриваются такие понятия, как эффективность и оптимальность портфелей. *Второй раздел* посвящен модели ценообразования на рынке капитала CAPM, в этом разделе также выводятся формулы характеристик портфелей для этой модели. *В третьем разделе* рассматривается теория перспектив, возмущенные меры риска, а также ассиметричная возмущенная мера риска и её свойства. *Четвертый раздел* содержит вычислительный эксперимент. В нем описывается разработка приложения для инвестора, придерживающегося консервативной стратегии инвестирования, для поиска оптимального портфеля с максимальной доходностью на последующем временном интервале. Общий объем работы составляет 59 страниц.

ОСНОВНОЕ СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Во введении обосновывается актуальность темы работы, формулируется цель работы и задачи, решаемые для её достижения.

В первом разделе описывается теория Марковица–Тобина–Шарпа.

Рассмотрим портфель из N видов ценных бумаг, r_i – доходность бумаги i-го вида . Портфель ассоциируется с N-мерным вектором y, каждая компонента которого соответствует доле содержания ценных бумаг i-го вида (в денежном выражении) в портфеле. Ожидаемая доходность портфеля:

$$M_p = \sum_{i=1}^{N} y_i x_i,$$

где $x_i = M(r_i)$ – математическое ожидание доходности бумаги i-го вида.

Ожидаемое отклонение доходности портфеля от среднего значения:

$$\sigma_p^2 = M(\sum_{i=1}^{N} y_i r_i - M_p)^2,$$

где σ_p^2 – дисперсия; $cor(r_i, r_j)$ – коэффициент корреляции между r_i и r_j; σ_p – риск портфеля.

Полезность финансового результата, характеризующегося случайной величиной, может быть оценена как ее среднее значение, скорректированное с учетом премии за риск, в связи с этим стоимость портфеля можно оценивать с помощью параметров M_p и σ_p, являющихся ключевыми в теории портфеля.

Рассмотрим следующие варианты инвестирования средств и оценим степерь неопределенности дохода:

— инвестирование денег в безрисковые активы с доходностью r_0 (банковский счет, облигации);

— инвестирование денег в портфель, состоящий из рисковых активов и имеющий ожидаемую доходность x_p (акции);

— инвестирование денег в портфель, одновременно состоящий из рисковых и безрисковых активов.

Первый вариант является простым, доходность вложений в этом случае задана и одинакова для всех участников.

Во втором случае исследуются портфели с минимальным значением риска σ_p при заданной доходности $x_p = \mu$. Такие портфели задаются равенством $\sigma_{p^*}(\mu) = min\{\sigma_p | x_p = \mu\}$, где минимум вычисляется для всех допустимых портфелей p.

Если же дополнительных ограничений на допустимые портфели нет, задача нахождения зависимости $\sigma = \sigma_{p^*}(\mu)$ имеет явное решение.

При некоторых дополнительных технических ограничениях задача имеет решение $y_* = \phi\mu + \psi$; $\sigma_{p^*}(\mu) = \sqrt{y_*^T V_*^T} = \sqrt{a\mu^2 + b\mu + c}$, где ϕ и ψ – фиксированные векторы, определяемые по параметрам задачи и не зависящие от μ; $a > 0$; $b^2 - 4ac < 0$.

График функции $\sigma_{p^*}(\mu)$ является гиперболой, верхняя ветвь которой соответствует эффективным портфелям. В отличие от эфективных портфелей, любые другие портфели имеют либо доходность меньше, либо риск больше, иногда и то, и другое одновременно.

Третий вариант составления портфеля – портфель из акций и безрисковых активов. В этом случае портфель ассоциируется с $(N + 1)$-мерным вектором $\widehat{y} = \begin{pmatrix} y_0 \\ y \end{pmatrix}$, первая компонента которого – доля капитала, инвестированного без риска со ставкой r_0. Ожидаемая доходность такого портфеля:

$$x_p = y_0 r_0 + \sum_{i=1}^{N} y_i x_i.$$

Зависимость $\sigma = \sigma_{p^*}(\mu)$ минимально возможного риска от фиксированной ожидаемой доходности μ в данном случае имеет вид:

$$\sigma = \tfrac{\mu - r_0}{g},$$

где $g = \sqrt{(x - r_0 e)^T V^{-1} (x - r_0 e)}$; V – матрица ковариаций, ее элементы $\sigma_{ij} = cov(r_i, r_j)$ ковариации случайных величин r_i и r_j $(i, j = 1, 2, ..., N)$; x – вектор, составленный из доходностей рисковых активов; e – вектор, все компоненты которого равны 1.

Эффективные портфели определяются равенствами

$$y^* = \tfrac{\mu - r_0}{g^2} V^{-1}(x - r_0 e), \quad y_0^* = 1 - y^T e.$$

Для эффективных портфелей зависимость риска и доходности линейная. Структура рисковой части для таких портфелей одинаковая, различие определяется лишь скалярным множителем $(\mu - r_0)$, который характеризует склонность инвестора к риску.

Разность между доходностью рискового портфеля x_p и доходностью безрисковых ценных бумаг r_0 называется премией за риск.

Удельная премией за риск (коэффициент Шарпа) – это отношение премии за риск портфеля к степени неопределенности портфеля:

$$\gamma_p = \tfrac{x_p - r_0}{\sigma_p}.$$

Портфель с максимальным коэффициентом Шарпа – это один из эффективных портфелей в задаче Марковица.

Во втором разделе описывается модель ценообразования CAPM – модель, исследующая рыночное равновесие, равновесные рыночные курсы, которые устанавливаются, если все участники рынка выстраивают эффективные портфели ценных бумаг в полном соответствии с портфельной теорией.

Модель формулируется для идеального конкурентного рынка. В условиях такого рынка все инвесторы имеют одну и ту же структуру рисковой части портфеля, которая совпадает со структурой оптимального чисто рискового портфеля p^0. Отсюда получается, что доли портфеля p^0 – это доли всего обращающегося на рынке капитала, которые соответствуют суммарной стоимости акций определенного вида.

Это в свою очередь позволяет оценить характеристики портфеля p^0, используя рыночные индексы. Рыночный индекс -— это усредненное расчетное значение стоимости акций группы компаний, которые входят в данный индекс.

Таким образом получается, что оптимальный портфель p^0 для всех инвесторов один и тот же. Обозначим этот портфель m, а характеристики его риска и доходности обозначим через σ_m и x_m соответственно.

Линия рынка капитала – это прямая на плоскости (σ, μ), связывающая уровень риска с доходностью для эффективных портфелей в задаче Тобина. В нашем случае это – рыночный портфель и те портфели, у которых структура рисковой части совпадает со структурой рыночного портфеля. Уравнение линии рынка капитала:

$$\mu = r_0 + \tfrac{x_m - r_0}{\sigma_m}\sigma.$$

Связь ожидаемой доходности отдельной бумаги с параметрами рыночного портфеля в равновесном состоянии рынка дает равенство:

$$x_j = r_0 + \tfrac{x_m - r_0}{\sigma_m^2} cov(r_j, r_m),$$

где $cov(r_j, r_m)$ – коэффициент ковариации доходностей рыночного портфеля и бумаги; r_j – случайная доходность ценной бумаги; r_m – случайная доходность рыночного портфеля.

Коэффициент $\beta : \beta_j = \frac{cov(r_j, r_m)}{\sigma_m^2}$ является характеристикой ценной бумаги и связывает доходность ценной бумаги с доходностью рынка.

С учетом β получаем основное уравнение модели CAPM:

$$x_j = r_0 + (x_m - r)\beta_j.$$

Для рыночного портфеля $\beta_m = 1$. Параметр β показывает, на сколько изменения доходности отдельной бумаги следуют за изменениями доходности рынка.

Бумаги с бета, близкими к единице, называются нейтральными. Изменения их доходностей следуют за движениями рынка, соответственно риск, связанный с ними, близок к риску работы на всем рынке.

Бумаги с большими бета называются агрессивными, при вложении средств в такие бумаги инвестор получает большую прибыль, если рынок растет, однако если рынок падает инвестор несет и большие потери.

При малых положительных бета бумаги называются безопасными и даже защищающими. Их корреляция с рынком весьма мала, поэтому они полезны в случае ожидаемого падения рынка.

Систематический риск – это риск, не поддающийся диверсификации, присущий всем ценным бумагам данного вида. Диверсификация – уменьшение риска путем составления портфеля и перераспределения риска. Несистематический риск – риск, который может быть диверсифицирован путем включения бумаги в портфель с другими ценными бумагами того же вида.

Формула для определения минимально возможного систематического риска – систематической неопределенности: $\sigma_j^s = \beta_j \sigma_m$, где σ_m – неопределенность оптимального рыночного портфеля с доходностью x_m. Несистематический риск может быть найден по формуле $\sigma_j^{ns} = \sigma_j - \beta_j \sigma_m$.

С помощью составления оптимального портфеля можно свести риск к $\beta_j \sigma_m$. Дальнейшее уменьшение риска достигается только при уменьшении доходности портфеля.

Рассмотрим цены активов в модели CAPM. Пусть P_{j0} – сегодняшняя известная цена актива, P_{j1} – ее неопределенная будущая цена. Установим связь между этими величинами и безрисковой процентной ставкой r_0.

Доходность ценной бумаги в простейшем случае $x_j = \frac{P_{j1}}{P_{j0}} - 1$.

Тогда получаем: $M(\frac{P_{j1}}{P_{j0}} - 1) = r_0 + \lambda cov(\frac{P_{j1}}{P_{j0}} - 1, x_m)$. Отсюда получим:

$$P_{j0} = \frac{M(P_{j1}) - \lambda cov(P_{j1}, x_m)}{1 + r_0}.$$

Данная формула означает, что для получения сегодняшней цены рыночной ценной бумаги необходимо из ее ожидаемой будущей цены $M(P_{j1})$

вычесть абсолютную премию за риск $\lambda cov(P_{j1}, x_m)$ и затем дисконтировать по безрисковой процентной ставке r_0.

В третьем разделе рассказывается о теории перспектив, предложенной в 1979 году Даниэлем Канеманом и Амосом Тверским и описывающей принятие решения в условиях риска. Данная теория описывает, каким образом люди выбирают между альтернативами, в которых известны вероятности различных исходов. Каждый возможный исход имеет определенную вероятность возникновения и ценность, которую человек определяет субъективным образом.

Канеман и Тверски обнаружили, что обычно человек действует в соответствии с правилом, которое они окрестили «законом малых чисел», то есть делает далекоидущие выводы на основании небольшого объема данных. Также Даниэль Канеман и Амос Тверски выяснили, что людям настолько неприятны убытки, что в попытках их избежать человек склонен принимать иррациональные решения. Это помогает объяснить, почему некоторые инвесторы слишком рано продают прибыльные акции, а убыточные удерживают слишком долго. Такое поведение лежит в основе человеческой природы.

Теория перспектив, предложенная Канеманом и Тверски, оказалась чрезвычайно востребованной в экономической науке. В 2002 году Канеман был награжден Нобелевской премией по экономике за данную теорию, а в 2020 году были опубликованы результаты качественного исследования, которое подтвердило выводы теории перспектив, в исследовании приняли участие 4098 человек , являющиеся жителями 19 стран и говорящие на 13 языках.

Также в этом разделе рассмотрены возмущенных мерах риска. Возмущенная мера риска – мера, позволяющая отразить отношение инвестора к риску, выбрав соответствующую возмущающую функцию. Возмущенная мера риска была определена как любые неотрицательные потери случайной переменной. Это достигнуто при использовании возмущающей функции g следующим образом:

$p_g(X) = \int\limits_0^\infty g(1-F_X(x))dx$, где $g : [0,1] \to [0,1]$ — непрерывная возрастающая функция с $g(0) = 0$ и $g(1) = 1$; $F_X(x)$ обозначает совокупную функцию распределения X, в то время как $g(F_X(x))$ используется как возмущающая функция распределения.

Применим асимметрию к стандартному построению ВМР. Пусть $\overline{g}(t) = (g_1(t), g_2(t))$ – пара неубывающих функций, $g_i(t) : [0,1] \to [0,1]$. Определим АВМР формулой: $W_{\overline{g}} = \int\limits_{-\infty}^{0} [1 - g_1(\overline{F}_x(t))]dt - \int\limits_{0}^{\infty} g_2(\overline{F}_x(t))dt$. Здесь $\overline{F}_x(t) = 1 - F_x(t)$ – дополнительная функция распределения риска. Стандартная ВМР соответствует случаю, когда $g_1(t) = g_2(t) = g(t)$. В качестве возмущающей функции в данной работе будет использована функция вида $\overline{g}(t) = (t^s, t^k)$.

Свойства асимметричных возмущенных мер риска:

1. АМВР не зависит от самого риска , а зависит только от функции распределения.
2. Если $g(t) = (t, t)$, то $W_{\overline{g}}(X) = -E[X]$, где E – математическое ожидание.
3. $W_{\overline{g}}(0) = 0$. В этом случае $\overline{F}_X(t) = 0$, при $t > 0$, $\overline{F}_X(t) = 1$, при $t < 0$.
4. АВМР является положительной для гарантированных убытков ($\overline{F}_X(t) = 0$, при $t > 0$) и отрицательной для гарантированных прибылей ($\overline{F}_X(t) = 1$, при $t < 0$).
5. АВМР неаддитивна в общем случае, в частном случае комонотонных рисков X, Y, которые всегда принимают значения одного знака, аддитивность справедлива. Случайные величины называются комонотонными, если рост одной из них сопровождается неубыванием другой.
6. АВМР является монотонной: если почти наверное $X \leq Y$, то $W_{\overline{g}}(X) \geq W_{\overline{g}}(Y)$. Действительно в этом случае $\overline{F}_X(t) \leq \overline{F}_Y(t)$, при любом t, откуда и следует нужное неравенство.
7. АВМР является положительно однородной. Если $\lambda \geq 0$, то $W_{\overline{g}}(\lambda X) = \lambda W_{\overline{g}}(X)$. Данное свойство показывает, что мера риска измеряется в тех же единицах, что и сам риск. Это в частности позволяет использовать подобную меру в актуарной деятельности, когда мера риска интерпретируется как размер страховой премии.
8. АВМР является функционально инвариантной относительно трансляций, т.е. функция $\varphi(X + a)$ детерминированной переменной a является непрерывной и невозрастающей.
9. Возмущенная мера риска субаддитивна при выпуклой функции $g(t)$, т.е. $W_{\overline{g}}(X+Y) \leq W_{\overline{g}}(X) + W_{\overline{g}}(Y)$. Для АВМР это свойство при выпуклости

обеих функций $g_1(t)$, $g_2(t)$ не выполняется.

Четвертый раздел содержит вычислительный эксперимент. Решается задача для инвестора, придерживающегося консервативной стратегии инвестирования, для поиска оптимального портфеля с максимальная доходностью на последующем временном интервале.

На начало предстоящего периода деятельности у инвестора имеется резерв свободных средств, которые он намерен вложить в акции российских компаний различных отраслей экономики. Короткие продажи запрещены.

Инвестор не склонен к риску, значит при сравнении двух портфелей ценных бумаг он выберет портфель с наименьшим уровнем риска. Таким образом, основным критерием выбора портфеля является оценка его риска.

После формирования оптимального портфеля ценных бумаг на основе ABMP, выбирается тот портфель, который обеспечит максимальную доходность на последующем промежутке времени. Сравнительный анализ доходности полученных портфелей позволит определить, какие параметры ABMP лучше подойдут для данного инвестора.

Предлагается задача поиска набора параметров, состоящих из различных значений коэффициентов, используемых при вычислении ABMP, на основе которых проводится оптимизация. Таким образом, задачей исследования является подбор таких значений параметров, при которых будет достигнута максимальная доходность на последующем временном интервале.

Рассмотрим математическую модель задачи формирования оптимального портфеля ценных бумаг с использованием ABMP. Перед инвестором стоит задача размещения средств между n рисковыми активами.

Портфель ассоциируется с вектором $\Pi = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$. Структура портфеля задана долями x_i, каждой акции $i = 1.2.3\ldots n$ в портфеле, причем $\sum\limits_{i=1}^{n} x_i = 1$. Также вводится ограничение $x_i \geq 0$, так как 'короткие продажи'не разрешены. Вес каждой акции в портфеле неотрицателен. Ежедневный показатель доходности $\chi = \frac{C_{n+1} - C_n}{C_n}$, где C_n – цена акции в n-й день.

Пусть τ – период владения портфелем период времени, в течении которого предполагается поддерживать портфель в неизменном состоянии.

Под мерой риска будем понимать величину $A_T(K, \Pi)$, где K – набор параметров (k, s), Π – структура портфеля, T – исторический период.

Пусть $P_\tau(\Pi)$ – доходность портфеля за последующий короткий промежуток времени τ.

Решаются две задачи:

По историческим данным проанализировать эффективность портфелей, минимизирующих меру риска $A_T(K,\Pi)$, при различных значениях параметров k,s и попытаться выбрать значения, при которых достигнута максимальная эффективность полученного портфеля.

1. Оптимизационная модель №1:

   $\Pi(K) = \arg\min\limits_{\Pi} A'_t(K,\Pi)$. При ограничениях: $\sum\limits_{i=1}^{n} x_i = 1$, $x_i \geq 0$.

   $A'_t(K,\Pi)$ – статистическая оценка меры риска, вычисленная по историческим данным на временном промежутке T.

2. Также решается задача поиска набора параметров, обеспечивающих наибольшую доходность портфеля на промежутке времени τ. Тогда оптимизационная модель №2 имеет следующий вид:

   $K = \arg\max\limits_{K} P_\tau(\Pi(K))$.

Таким образом, сформулирована постановка задачи исследования, которая заключается в поиске оптимальной структуры инвестиционного портфеля.

Алгоритм исследования:

1. Рассматривается множество n акций, из которых формируется портфель $X = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, где x_i - доля средств, потраченных на акцию i-го вида;
2. Генерируются n портфелей, таких чтобы $\sum\limits_{i=1}^{n} x_i = 1$, $x_i \geq 0$;
3. Для каждого портфеля вычисляется ежедневный показатель доходности $\chi = \frac{C_{n+1}-C_n}{C_n}$;
4. По полученным данным вычисляются статистические оценки АВМР;
5. Выделяется портфель, у которого мера риска минимальная;
6. Вычисляется показатель доходности $P_\tau(\Pi)$ найденного портфеля за последующий короткий промежуток времени τ;
7. Данная процедура повторяется при других значениях параметров меры риска;
8. Определяется значения параметров, при которых показатель доходно-

сти, вычисленный в пункте 6 максимальный.

Заключение. В бакалаврской работе были изучены основные принципы формирования портфеля ценных бумаг, рассмотрены основные характеристики портфелей, приведены примеры рассчета ожидаемой доходности и риска портфеля. Были изучены оптимальные портфели для теорий Тобина и Марковица и их свойства, а также портфель, который является оптимальным для обеих теорий. Рассмотрели модель ценообразования на рынке капитала CAPM для идеального конкурентного рынка, в том числе обобщающие модели G-CAPM и Арбитражная модель.

Изучили различные меры риска, в том числе возмущенные меры риска, их свойства и теорию перспектив.

На основе данной информации был разработан программный продукт в среде Delphi и реализован вычислительный эксперимент по формированию оптимального портфеля ценных бумаг с использованием асимметричных возмущенных мер риска, и подбору параметров меры риска, при которых достигается наибольшая эффективность портфеля.

В заключение хочется отметить, что выгодное инвестирование всегда связано с немалым риском. А значит инвестирование в ценные бумаги будет эффективно только если постоянно изучать поведение рынка. При таком виде инвестирования необходимо быть готовым к разным исходам и заранее думать о возможных последствиях, чтобы потом не сожалеть о своих решениях.