МИНОБРНАУКИ РОССИИ

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования
«САРАТОВСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ Н. Г. ЧЕРНЫШЕВСКОГО»

Кафедра теории функций и стохастического анализа

МИНИМИЗАЦИЯ РИСКА В СТРАХОВАНИИ

АВТОРЕФЕРАТ БАКАЛАВРСКОЙ РАБОТЫ

студента 4 курса 412 группы
направления 01.03.02 — Прикладная математика и информатика

механико-математического факультета
Санникова Никиты Алексеевича

Научный руководитель
доцент, к. ф.-м. н. ______________ В. Р. Шебалдин

Заведующий кафедрой
д. ф.-м. н., доцент ______________ С. П. Сидоров

Саратов 2024

СОДЕРЖАНИЕ

Введение

В данной работе рассматривается проблема минимизации риска страховой компании путем оптимального выбора объема страховых взносов клиентов, рисковой премии и распределения суммарного риска.

Актуальность

Минимизация суммарного риска является актуальной проблемой поскольку с ростом рисков и неопределенности в мире, страховые компании и организации должны учитывать различные виды рисков и оптимально выбирать объем страховых взносов клиентов, рисковую премию. Оптимизация параметров страховой деятельности является трудной задачей математического моделирования, которая помогает страховым компаниям и организациям снизить воздействие этих рисков на их финансовые результаты и устойчивость, а также обеспечить свою долгосрочную устойчивость.

Целью данной работы является исследование проблемы минимизации риска страховой компании, которая заключается в оптимальном выборе стразовых взносов, рисковой премиии и её решение путем применения моделей из теории оптимизации, использующие функцию полезности. Для достижения поставленной цели в работе необходимо решить следующие **задачи**:

- изучить сновные понятия теории рисков и теории полезности;

- исследовать проблему оптимизации объема страховых взносов клиентов;

- исследовать проблему минимизация объема собственнных средств страховщика;

- изучить оптимизацию полезности для различных типов распределения рисков;

- провести вычислительный эксперимент с применения моделей из теории оптимизации, использующие функцию полезности решающий проблемы: оптимизации объема страховых взносов, минимизация объема собственнных средств страховщика.

Структура бакалаврской работы

Работа состоит из четрырех разделов заключения и приложения.

— В первом разделе даны основные понятия теории рисков и методы моделирования случайных величин, описаны основы теории полезностии, методы построения функций полезности, рассмотрены основные типы функций полезности, применяемых в страховании.

— Во втором разделе рассмотрена проблема оптимизации объема страховых взносов клиентов.

— В третьем разделе рассмотрена минимизация объема собственнных средств страховщика.

— В четвертом разделе рассмотрена оптимизация полезности для различных типов распределения рисков.

Основное содержание работы

Риск называется совокупностью вероятностей возможного ущерба и его величин в некоторой стохастической ситуации.

Рисковый процесс – процесс изменения капитала страховой компании. Для удобства часто рассматривают такие модели изменения капитала, в которых моменты поступления выплат детерминированы, но величины страховых выплат являются случайными. Суть статической модели страхования состоит в том, что все договора имеют одинаковый срок действия, портфель полисов, проданных клиентам, считается сформированным единовременно, новые клиенты не появятся в течение всего периода страхования, а также каждый полис считается оплаченным в начале периода.

Суммарный ущерб – $X = X_1 + \ldots + X_n$, где n - численность группы клиентов, $X_i (i = 1, \ldots, n)$ – неотрицательные независимые случайные величины рисков отдельных клиентов.

Рисковая ситуация – тройка $(S, D, F(x))$, где $F(x)$ – распределение суммарного риска, S – объем собственных средств, D – суммарный взнос.

Проблема минимизации риска заключается в оптимальном выборе стразовых взносов, рисковой премии и распределения суммарного риска. Для определения оптимального сумарного взноса используются модели из теории оптимизации, использующие функцию полезности.

Функция полезности.

Основной результат, лежащий в основе линейной теории полезности, утверждает, что следствием аксиом теории полезности будет существование скалярной функции $u(y)$ на B, называемой функцией полезности ЛПР(лицо принимающее решение), такой, что для каждой пары выигрышей выполнено: $Y_1 \succ (\sim) Y_2$ тогда и только тогда, когда $E[u(Y_1)] > (=) E[u(Y_2)]$, т.е. функционал полезности ЛПР имеет вид:

$$U[Y] = E[u(Y)] \text{ или } U[Y] = \int_B u(y)dF(y).$$

Процедура экспериментального построения функции полезности состоит в следующем: ИПР(принимающий решения индивидуум) оценивает для себя денежные эквиваленты y_i нескольких простых выигрышей Y_i, называемых лотереями, каждая из которых имеет два возможных значения z_{1i}, z_{2i} с заданными вероятностями α_i, $1 - \alpha_i$, причем z_{1i}, z_{2i} выбираются среди уже полученных эквивалентов $y_1, \dots, y_{i-1}$.

Узнав от ИПР значение эквивалента $y_i \in [a, b]$, т.е. детерминированной суммы, получение которой для него эквивалентно участию в лотерее Y_i, мы могу приравнять полезность $u(y_i)$ к ожидаемой полезности $E_u(Y_i) = \alpha_i u(z_{1i}) + (1 - \alpha_i) u(z_{2i})$ и, таким образом, получить точку $(y_i, E_u(Y_i))$ графика функции $u(y)$. Продолжая, будем иметь табулировку функции $u(y)$ в наборе точек $\{y_i\}$ отрезка $[a, b]$.

Следующий этап заключается в построении $u(y)$ на всем множестве B возможных значений выигрышей, и принципиальный момент здесь состоит в выборе подходящего достаточно узкого класса функций полезности, предпочтительно заданного параметрически, в котором ищется $u(y)$. Такой класс определяется:

1. во-первых, на основе качественной информации о склонностях ИПР;
2. во-вторых, на основе имеющегося в теории полезности достаточно обширного арсенала «стандартных» функций полезности с известными свойствами.

Сформулируем несколько рекомендаций применительно к выбору функции полезности, когда ЛПР является страховая компания. В этом случае в качестве выигрыша Y естественно рассматривать остаточный капитал $S+D-X$ к концу страхового периода:

1. на всем множестве B возможных доходов $u(y)$ должна быть вогнутой

возрастающей функцией;

2. в области отрицательных доходов $y < 0$ $u(y)$ быстро убывает с увеличением $|y|$;
3. в области больших положительных значений y темп роста $u(y)$ существенно падает;
4. неприятие риска $r(x)$ не возрастает с ростом x, если специально не оговорено свойство особой, возрастающей осторожности при увеличении размера денежного фонда компании.

Проблема оптимизации объема страховых взносов

Участники страховой сделки, страховщик страхователи – для того,чтобы сделка состоялась, должны прийти к взаимоприемлемому решению о величине взносов; при этом страховщика, принимающего суммарный риск, интересует прежде всего суммарный взнос D, а каждого отдельного клиента – величина его индивидуального взноса d_i. Пусть известны функции полезности компании $u_0(y)$ и $u_i(y)$, где $i = 1, \ldots, n$ - функции полезности клиентов. Компания согласится на страхование клиентов, если для нее ожидаемая полезность после совершения сделки будет по крайней мере не меньше, чем без нее:

$$E[u_0(w + D - X)] \geq u_0(w).$$

Обозначим через D_* нижнюю грань тех $D \geq 0$, для которых это неравенство выполнено. Иными словами, D_* - наименьший суммарный взнос при котором страхование этой группы еще не становится невыгодным для страховщика. В случае возрастающей непрерывной $u_0(y)$ - а это стандартное предположение о функции полезности - взнос D_* есть единственный корень уравнения

$$E[u_0(w + D - X)] = u_0(w)$$

на $[0, \infty)$, поскольку тогда функция в левой части уравнения непрерывно зависит от D и множество ее значений содержит точку $u_0(w)$.

Как и страховая компания, i-й клиент пойдет на страхование только в том случае, если полезность от капитала, остающегося после сделки со страховщиком, будет для него не меньше ожидаемой полезности от рисковой ситуации без сделки

$$u_i(w_i - d_i) \geq E[u_i(w_i - X_i)]$$

где w_i - начальный капитал клиента. Пусть d_i^* - верхняя грань решений этого неравенства или максимальная сумма, которую клиент может заплатить за страхование своего риска. Для возрастающей непрерывной $u_i(y)$ взнос d_i^* есть единственный на $[0, \infty)$ корень уравнения

$$u_i(w_i - d_i) = E[u_i(w_i - X_i)]$$

В терминологии линейной теории полезности, величина $-D_*$ является ценой покупки "выигрыша"$-X$ при капитале w, а $-d_i^*$ есть цена продажи i-м клиентом "выигрыша"$-X_i$ при капитале w_i. Тогда, если $D^* > \sum_{i=1}^n d_i^*$, то страхование такой группы клиентов невозможно; если же

$$D^* \leq \sum_{i=1}^{n} d_i^*$$

то страхование считается возможным, но остается вопрос о выборе конкретного набора взносов $d^0 = (d_1^0, \ldots, d_n^0)$ из множества допустимых

$$A = \{d \in \mathbb{R}^n : D^* \leq \sum_{i=1}^{n} d_i, d_i \leq d_i^*, i = 1, \ldots, n\}$$

который бы устроил всех $n+1$ участников сделки. Исходя из того, что каждый из $n+1$ участников сделки стремится максимизировать свою полезность, необходимо найти такой набор взносов, который бы удовлетворял всем условиям и обеспечивал максимальную полезность для всех участников. ожидаемую полезность, мы приходим к следующей многокритериальной задаче максимизации:

$$\begin{cases} J_0(d) \equiv E[u_0(w + \sum_{i=1}^n d_i - X)] \to \max \\ J_i(d) \equiv u_i(w_i - d_i) \to \max \\ i = 1, \ldots, n \\ d = (d_1, \ldots, d_n) \in A \end{cases}$$

За исключением немногочисленных вырожденных случаев, решение такой задачи в привычном смысле точки d^*, доставляющей максимум на A одновременно всем $n+1$ критериям, не существует. Один из наиболее распространенных подходов к определению решения основан на нахождении Парето-оптимальных точек. По определению, $d \in A$ называется Парето-оптимальной, если не доминируется никакой другой точкой в том смысле, что не существует $d' \in A$ такого, что $J_i(d') \geq J_i(d)$, $i = 0, \ldots, n$, и хотя бы одно из этих неравенств выполняется строго. Смысл нахождения множества A^0 таких точек состоит в том, что из рассмотрения исключаются заведомо неприемлемые решения и задача выбора решается уже на более узком множестве $A^0 \subseteq A$. Парето-оптимальное множество A^0 обычно содержит более одного решения и, для того чтобы выбрать из них «лучшее», а точнее говоря, приемлемое для всех участников решение, необходимы дополнительные соображения. Далее будет использоваться метод, который определяет d^0 максимизацией свертки критериев с заданными положительными весами:

$$\sum_{i=0}^{n} k_i J_i(d) \to \max, \quad d \in A,$$

где $k_i > 0$, $\sum_{i=0}^{n} k_i = 1$. Выбор весов $\{k_i\}_{i=0}^{n}$ отражает степень «важности» или «влияния» каждого из участников сделки. Все $n+1$ участников ранжируются путем присваивания каждому соответствующего веса $k_i > 0$ - на этом этапе для определения значений весов возможно использование экспертных оценок, которые бы учитывали текущую рыночную политику компании. Условно говоря, при отсутствии конкуренции компания может уменьшить веса определенной категории клиентов по сравнению с другими, тем самым «уменьшая их право голоса» при заключении сделки, не боясь их потерять.

Минимизация объема собственнных средств страховщика

В реальности страховщик не может выбирать компоненты рисковой ситуации $(w, D, F(x))$ произвольно по своему усмотрению. Предполагается, что они зависят от некоторого параметра a, который доступен управлению страховщика и может варьироваться в заданной области $a \in A$, и именно выбор значения этого параметра определяет рисковую ситуацию $(w_a, D_a, F(x)_a)$. Для формальной постановки задачи оптимизации необходимо определить множество допустимых для страховщика вариантов схемы страхования. Рассмотрим задачу определения минимальной величины собственных средств страховщика, гарантирующей требуемую вероятность неразорения β, если задано распределение $F(x)$ суммарного риска, величина взносов D и вероятность неразорения β.

Ограничение на вероятность неразорения в данном случае означает

$$P\{w + D \geq X\} \geq \beta.$$

Обозначим через x_β квантиль порядка β распределения $F(x)$. Тогда из неравенства выше сразу же получаем множество допустимых значений собственного капитала: $w \geq x_\beta - D$. Поэтому минимальный капитал $w^* = x_\beta - D$.

Если взнос рассчитывается по формуле среднего значения, $D = (1 + \alpha)E[X] = (1 + \alpha)M$ с заданным коэффициентом нагрузки $\alpha > 0$, то

$$w^* = x_\beta - (1 + \alpha)M.$$

Видно, что w_* растет с увеличением квантиля x_β, который, в свою очередь, возрастает с ростом надежности β. Увеличение α приводит к увеличению взноса D и уменьшению необходимого капитала w_*. Возможна ситуация, когда при некотором α значение w_* отрицательно, это означает, что в данной схеме страхования даже собранных взносов D более чем достаточно для достижения требуемой надежности β, и остаток, равный $|w_*|$, целиком находится в распоряжении страховой компании.

Оптимизация полезности

Если считать критерием оптимальности ожидаемую полезность остаточного капитала $Eu(w + D_d - X_d)$, где функция полезности страховщика экспоненциальна, $u(y) = -\exp(-cy)$ (здесь $c > 0$ — заданный показатель неприятия риска). На этот раз управляемым параметром будет сама цена полиса (взнос клиента) d, которая может варьироваться страховщиком на множестве $[d^-, d^+]$. Суммарный взнос есть (детерминированная) величина, равная $D_d = n(d)d$, где $n(d)$ – положительный параметр, имеющий смысл спроса на страховой продукт, от которого параметрически зависит и распределение суммарного риска X_d рассматриваемой однородной группы клиентов. Если бы страховщик был заинтересован только в увеличении «выручки» $n(d)d$, то, например, при линейном спросе $n(d) = -Ad + B$ оптимальная цена была бы вершиной параболы $d_0 = B/(2A)$. Но от $n(d)$ зависит также ущерб X_d, причем увеличение $n(d)$ (т.е. уменьшение d, поскольку $n(d)$ убывает с ростом d) приводит к «худшему» X_d с большим числом слагаемых и наоборот. Поэтому оптимальная цена d^* будет смещена вправо от «примитивного» оптимума d_0. Величина этого смещения будет зависеть как от выбранной модели для X_d, так и от распределения индивидуального риска X_1. Рассматриваемая задача:

$$J(d) \equiv -E\{\exp -c[w + n(d)d - X_d]\} \to \max, d \in [d^-, d^+].$$

Оптимальное d^* не будет зависеть от начального капитала w, поскольку в максимизируемой экспоненциальной полезности $J(d)$ от w зависит только множитель $\exp(-cw) > 0$. Решение этой задачи предполагает, что а) спрос есть линейная функция $n(d) = -Ad + B$ на $[d^-, d^+]$, где параметры $A > 0$, $B > 0$ и $d^+ < B/A$; б) спрос есть степенная функция $n(d) = Ad^{-r}$, (r $>$ 0, A $>$ 0).

Описание вычислительного эксперимента Решены задачи определения параметров страховых систем. А именно: задача определения взаимоприемлемой величины взноса и задача минимизации собственных средств страховой компании , обеспечивающего заданную вероятность неразорения. Для решения поставленных оптимизационных задач были использованы следующие библиотеки $Python$:

1. $Scipy$ – пакет прикладных математических процедур для выполнения научных и технических вычислений.
2. $Numpy$ – эта библиотека ускоряет работу с многомерными массивами и матрицами, а также позволяет вычислять много высокоуровневых математических функций при работе с массивами данных.
3. $Matplotlib$ – библиотека для визуализации данны

Задача на определения взаимоприемлемой величины взноса Рассматривается однородная группа клиентов $n = 10$ риск X_i каждого из клиентов распределен по экспоненциальному закону:

$$P\{X_i \leq x\} = 1 - e^{-2x}, \quad x \geq 0$$

Компания и клиенты имеют, соответственно, начальные капиталы $w = 2$ и $w_i = 0, i = 1, .., n$, квадратичные функции полезности:

$$u_0(y) = -\frac{y^2}{30} + y$$
$$u_1(y) = -\frac{y^2}{10} + y$$

Выяснить, выполнено ли здесь условие возможности страхования, и если да, то определить взаимоприемлемую величину взноса d_0, считая компанию равноправной в сделке всей группе клиентов в целом. В случае однородной группы условие возможности страхования выглядит следующим образом:

$$d_* \leq d^*,$$

где $d_* = D_*/n$, D_* есть нижняя грань неравентсва

$$E[u_0(w + D - X)] \geq u_0(w)$$

в свою очередь в d^* является верхней гранью неравенства

$$u_1(w_1 - d) \geq E[u_1(w_1 - X)]$$

и сама задача сводиться к решению следующей задаче максимизации:

$$\begin{cases} J_0(d) \equiv E[u_0(w + nd - X)] \to \max \\ J_1(d) \equiv u_1(w_1 - d) \to \max \\ d = (d_1, \ldots, d_n) \in A \end{cases}$$

Воспользуясь методом Парето-оптимальных точек приходим к следующему решению задачи

$$\sum_{i=0}^{2} k_i J_i(d) \to \max, \quad d \in A,$$

где $k_i = \frac{1}{n+1}$. Решение задачи написано на языке $Python$ путем написания функций для расчеты данных формул. Программа на вохд принимает количество клиентов, начальное состояние компании, начальное состояние клиента. В результате выполнения программы получим что страхование возможно и интвервал взносов удовлетворяющих как клиента так и компанию имеет вид: $[0.05, 5.0]$. Следующим этапом задачи является нахождение оптимального взноса d_0. После расчета программы получим $d_0 = 1.6$.

Задача на минимизацию собственных средств страховой компании Рассматриваются страховщики I и II с группами из $n_1 = 1000$ и $n_2 = 4000$ клиентов, для каждого из которых:

1. вероятность страхового случая $p = 0.1$,
2. размер страховых выплат детерминирован и равен $m = 50$.

Принятый на страховом рынке коэффициент нагрузки $\alpha = 10$Какой собственный капитал должна иметь каждая из компаний для обеспечения надежности $\beta = 0.99$?. В обоих случаях n и p таковы, что удовлетворяют условию нормальной аппроксимации. Поэтому для распределения суммарного риска можно использовать формулу $F(x) = \Phi_{M,\sigma}(x) = \Phi\left(\frac{x-np}{\sqrt{npq}}\right)$, где $M = nM_1 = n \cdot 5$, $\sigma = \sqrt{n}\sigma_1 = \sqrt{n}m\sqrt{pq} = \sqrt{n} \cdot 15$. Тогда решение будет иметь вид:

$$w_* = x_N^\beta \sigma - \alpha M = x_N^\beta \sqrt{n}\sigma_1 - \alpha n M_1$$

В результате получим что собственный капитал для компании I равен 603.48, а собственный капитал для компании II равен 206.98. При этих значениях точки $n_1 = 1000$ и $n_2 = 4000$ лежат по разные стороны от точки максимума $n_0 = 1216$ функции $w_*(n)$ (Рис. 1), поэтому при увеличении числа клиентов n_1 компании I придется увеличивать собственный капитал $w^*(n_1)$, в то время как при возрастании n_2 компания II может позволить себе сокращение объема собственных средств.

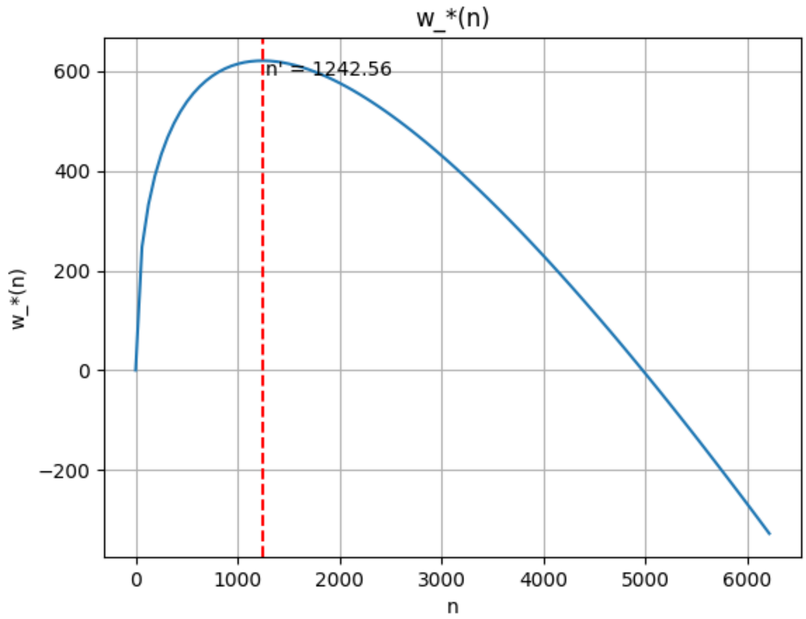

Рисунок 1 – График зависимости капитала от численности группы клиентов

Заключение

В результате проведенного исследования были рассмотрены ключевые аспекты минимизации рисков в страховании, связанные с определением страховых взносов, минимизацией объема средств страховой компании и оптимизацией полезности для страхователей. Было установлено, что правильное определение страховых взносов является основой для успешной работы страховой компании и обеспечения ее финансовой устойчивости.

Изложена аксиоматика теории полезности, принципы выбора функциональных классов полезности на основе функции неприятия риска. Даны рекомендации, которым должна удовлетворять функция полезности для страхователя. Рассмотрены условия возможности страховани. Были продемонтстрирован методы решения проблем минимизации объема средств страховой компании и оптимизации страховых взносов использующие модели из теории оптимизации.

Таким образом, в заключение можно сделать вывод о том, что минимизация рисков в страховании является сложным и многогранным процессом, требующим комплексного подхода к решению проблемы определения страховых взносов, минимизации объема средств страховой компании и оптимизации полезности для страхователей.