

МИНОБРНАУКИ РОССИИ

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования

**«САРАТОВСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ИМЕНИ Н. Г. ЧЕРНЫШЕВСКОГО»**

Кафедра теории функций и стохастического анализа

**ИССЛЕДОВАНИЕ СИСТЕМЫ МАССОВОГО
ОБСЛУЖИВАНИЯ С НЕНАДЕЖНЫМ ПРИБОРОМ**

АВТОРЕФЕРАТ БАКАЛАВРСКОЙ РАБОТЫ

Студентки 4 курса 412 группы
направления 01.03.02 — Прикладная математика и информатика

механико-математического факультета
Харитоновой Екатерины Олеговны

Научный руководитель
старший преподаватель

Н. В. Сергеева

Заведующий кафедрой
д. ф.-м. н., доцент

С. П. Сидоров

Саратов 2024

ВВЕДЕНИЕ

Актуальность темы. Системы массового обслуживания широко применяются в различных сферах деятельности, таких как банковское дело, торговля, транспорт и другие. В этих системах происходят отказы или сбои, которые могут серьезно повлиять на качество обслуживания клиентов и эффективность работы организации.

Целью данного исследования является анализ системы массового обслуживания с ненадежным прибором. Для достижения этой цели ставятся следующие **задачи**:

- изучение основных понятий, необходимых для описания системы массового обслуживания (СМО) с ненадежным прибором;
- описание СМО с ненадежным прибором;
- анализ влияния ненадежного прибора на характеристики системы.

Объект исследования - система массового обслуживания с ненадежным прибором.

Практическая значимость состоит в том, что системы массового обслуживания с ненадежным прибором встречаются в различных сферах жизни, такие как банки, интернет-магазины, телекоммуникации и другие области обслуживания клиентов, существует реальная проблема ненадежности приборов. Отказы или сбои в работе приборов могут негативно сказываться на процессе обслуживания клиентов, что влияет на их удовлетворенность и может привести к потере доходов для организации.

Структура и содержание бакалаврской работы. Работа состоит из введения, 6 разделов, заключения, списка использованных источников и приложения.

ОСНОВНОЕ СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Во **введении** обосновывается актуальность темы работы, формулируется цель работы и решаемые задачи, отмечается практическая значимость полученных результатов.

В **первом** разделе приводятся основные определения и понятия, такие как система массового обслуживания, ненадежный прибор, время ожидания клиента и другие.

В данном исследовании будет осуществлен анализ системы массового обслуживания с ненадежным прибором, с учетом данных терминов и понятий.

Во **втором** разделе приводится математическое описание систем массового обслуживания.

Математическое описание системы массового обслуживания с ненадежным прибором представляет собой формализацию процессов, происходящих в системе, с использованием математических моделей. Это позволяет проводить анализ и оценку характеристик системы, таких как время ожидания клиентов, производительность, нагрузка на ресурсы и другие показатели.

В **третьем** разделе рассмотрена система $M/M/1$.

Поступающие в систему заявки образуют пуассоновский поток с интенсивностью λ . Время обслуживания экспоненциально распределено с параметром μ .

Прибор может находиться в двух состояниях: рабочем и состоянии отказа. В процессе обслуживания заявки, если прибор находится в рабочем состоянии, через экспоненциальное время с параметром α происходит отказ, и прибор переходит в состояние отказа, причем заявка остается на приборе до завершения его восстановления. Восстановление прибора осуществляется в соответствии с пороговой политикой. Восстановление прибора в состоянии отказа происходит за экспоненциальное время с параметром β , если число заявок в очереди больше или равно значения заданного порогового уровня q ($q \geq 1$). После завершения восстановления прибор переходит в рабочее состояние и продолжает обработку находящейся на нем заявки, обслуживание которой было прервано.

Через $N(t)$ обозначим число заявок в системе и $D(t)$ - состояние прибора в момент времени t . $D(t) = 1$, если прибор находится в рабочем состоянии, и $D(t) = 0$, если прибор находится в состоянии отказа. Очевидно, что двумерный процесс

$$\{X(t)\}_{t \geq 0} = \{N(t), D(t)\}_{t \geq 0}$$

является цепью Маркова с непрерывным временем и пространством состояний $E = \{x = (n, d) \mid n \in \mathbb{N}_0, d \in \{0, 1\}\}$.

В четвертом разделе проводится анализ системы в стационарном режиме.

Если выполнено условие

$$\rho = \frac{\lambda}{\mu} \left(1 + \frac{\alpha}{\beta} \right) < 1, \quad (1)$$

то для цепи Маркова $\{X(t)\}_{t \geq 0}$ существуют финальные вероятности, совпадающие со стационарными: вероятность того, что в системе находится n заявок, и прибор пребывает в состоянии отказа, $n \geq 1$

$$\pi_0(n) = \lim_{t \rightarrow \infty} P[N(t) = n, D(t) = 0],$$

вероятность того, что в системе находится n заявок, и прибор пребывает в рабочем состоянии, $n \geq 0$

$$\pi_1(n) = \lim_{t \rightarrow \infty} P[N(t) = n, D(t) = 1].$$

Стационарные вероятности состояний системы

$$\pi_0(n), \quad n \geq 1 \quad \text{и} \quad \pi_1(n), \quad n \geq 0$$

удовлетворяют следующей системе уравнений равновесия:

$$(\lambda + \beta I_{\{n \geq q\}}) \pi_0(n) = \lambda \pi_0(n-1) I_{\{n > 1\}} + \alpha \pi_1(n), \quad n \geq 1, \quad (2)$$

$$\begin{aligned} (\lambda + (\mu + \alpha) I_{\{n > 0\}}) \pi_1(n) = & \lambda \pi_1(n-1) I_{\{n > 0\}} + \mu \pi_1(n+1) + \\ & + \beta \pi_0(n) I_{\{n \geq q\}}, \quad n \geq 0, \end{aligned} \quad (3)$$

где $I_{\{A\}} = 1$ — функция-индикатор события A .

Для решения системы уравнений (2)-(3) воспользуемся аппаратом производящих функций (для $|z| \leq 1$), поскольку решение рекуррентными методами представляется проблематичным. Введем производящие функции в виде

$$\begin{aligned}
\psi_1(z) &= \sum_{n=1}^{q-1} z^n \pi_0(n), & \psi_2(z) &= \sum_{n=q}^{\infty} z^n \pi_0(n), \\
\psi_3(z) &= \sum_{n=1}^{q-1} z^n \pi_1(n), & \psi_4(z) &= \sum_{n=q}^{\infty} z^n \pi_1(n).
\end{aligned} \tag{4}$$

Производящие функции $\psi_i(z), i = \overline{1, 4}$, определенные в (4), удовлетворяют следующим соотношениям:

$$\begin{aligned}
\psi_1(z) &= \frac{\alpha\lambda z - (\lambda(\lambda z - \mu)\Gamma(q-1) + \mu(\alpha - \lambda z + \mu)\Gamma(q))z^q}{\lambda(\lambda z^2 - (\alpha + \lambda + \mu)z + \mu)} \pi_1(0), \\
\psi_2(z) &= \frac{(\lambda(\lambda z - \mu)\Gamma(q-1) + \mu(\alpha - \lambda z + \mu)\Gamma(q))z^q}{\lambda^2 z^2 - \lambda(\alpha + \beta + \lambda + \mu)z + (\beta + \lambda)\mu} \pi_1(0), \\
\psi_3(z) &= \frac{\lambda(1-z)z + (\lambda z \Gamma(q-1) - \mu \Gamma(q))z^q}{\lambda z^2 - (\alpha + \lambda + \mu)z + \mu} \pi_1(0), \\
\psi_4(z) &= \frac{(-\lambda^2 z \Gamma(q-1) + (\beta + \lambda)\mu \Gamma(q))z^q}{\lambda^2 z^2 - \lambda(\alpha + \beta + \lambda + \mu)z + (\beta + \lambda)\mu} \pi_1(0),
\end{aligned} \tag{5}$$

где

$$\begin{aligned}
\Gamma(n) &= g_1 \gamma_1^n + g_2 \gamma_2^n, \quad n = \overline{0, q}, \\
\gamma_{1,2} &= \frac{\alpha + \lambda + \mu \pm \sqrt{(\alpha + \lambda + \mu)^2 - 4\lambda\mu}}{2\mu},
\end{aligned} \tag{6}$$

$$g_1 = \frac{\gamma_2(\gamma_1 - 1)}{\gamma_1 - \gamma_2}, \quad g_2 = \frac{\gamma_1(1 - \gamma_2)}{\gamma_1 - \gamma_2}. \tag{7}$$

Далее введем следующие обозначения:

p_1 - вероятность того, что прибор находится в состоянии отказа и не может быть восстановлен (число заявок в системе $N(t) < q$),

p_2 - вероятность того, что прибор находится в состоянии отказа и восстанавливается,

p_3 - вероятность того, что прибор находится в рабочем состоянии и число заявок $N(t) < q$, и

p_4 - вероятность того, что прибор находится в рабочем состоянии и число заявок $N(t) \geq q$.

Заметим, что $p_i = \psi_i(1), i = 1, 2, 4$, и $p_3 = \psi_3(1) + \pi_1(0)$.

Далее :

$$p_1 = \frac{F(q) - \alpha\lambda}{F(q)}C_1, \quad p_2 = C_2, \quad p_3 = \frac{\lambda(\alpha + G(q))}{F(q)}C_1, \quad p_4 = \frac{H(q)}{F(q)}C_2,$$

где $F(q) = -\lambda(\mu - \lambda)\Gamma(q - 1) + \mu(\alpha - \lambda + \mu)\Gamma(q)$, $G(q) = -\lambda\Gamma(q - 1) + \mu\Gamma(q)$,

$$H(q) = -\lambda^2\Gamma(q - 1) + (\beta + \lambda)\mu\Gamma(q), \quad C_1 = 1 - \frac{\alpha + \beta}{\alpha}C_2, \quad C_2 = \frac{\alpha\lambda}{\beta\mu}.$$

Среднее число заявок в системе для заданного порогового уровня q вычисляется по формуле

$$\bar{N}(q) = \bar{N}_1(q) + \bar{N}_2(q) + \bar{N}_3(q) + \bar{N}_4(q), \quad (8)$$

где $\bar{N}_i(q) = \left. \frac{d}{dz} P_i(z) \right|_{z=1}$, $i = \overline{1, 4}$

Уравнение (8) может быть преобразовано к виду

$$\begin{aligned} \bar{N}(q) = & -\frac{\alpha - \lambda + \mu}{\alpha}C_1 + \frac{\alpha + \beta + \mu - \lambda C_2^2}{\alpha C_1} + \lambda\mu C_1 \frac{1}{F(q)} + \\ & + \frac{-\lambda\alpha(\mu - \lambda) + \alpha\lambda\mu C_1 q - \lambda\mu(\alpha - \lambda + \mu)C_1 G(q)}{\alpha\mu} \frac{1}{F(q)} + \\ & + \frac{\alpha C_1 C_2 q + (\alpha + \beta + \mu - \lambda)C_2^2 H(q)}{\alpha C_1 F(q)} - \frac{\lambda^2(\mu - \lambda)\Gamma(q - 1)}{\mu F(q)} + \frac{\mu - \lambda}{\mu}q. \end{aligned}$$

В **пятом** разделе проводится вычисление оптимального порогового уровня.

Обозначим через \bar{B} среднее время регенерации, представляющее собой период времени, который начинается с поступления заявки в пустую систему до момента следующего поступления заявки в пустую систему

$$\bar{B} = \bar{B}_1 + \bar{B}_2 + \bar{B}_3 + \bar{B}_4 = \frac{F(q)}{\alpha\lambda^2 C_1}.$$

В правой части равенства представлена сумма средних времен \bar{B}_i , $i = \overline{1, 4}$, а именно: времени, когда прибор находится в состоянии отказа и не вос-

становливаются, в состоянии отказа и восстанавливаются, в рабочем состоянии, если $N(t) < q$ и в рабочем состоянии, если $N(t) \geq q$. Эти величины, очевидно, удовлетворяют соотношению $\bar{B}_i = p_i \bar{B}$, или

$$\bar{B}_1 = \frac{F(q) - \alpha\lambda}{\alpha\lambda^2}, \bar{B}_2 = \frac{1}{\alpha\lambda^2} \frac{C_2}{C_1} F(q), \bar{B}_3 = \frac{\alpha + G(q)}{\alpha\lambda}, \bar{B}_4 = \frac{1}{\alpha\lambda^2} \frac{C_2}{C_1} H(q).$$

Поскольку $\frac{\bar{B}_2}{\bar{B}}$ не зависит от параметра управления q , стоимость за этот период времени можно опустить. Для вычисления оптимального значения порогового уровня q , введем следующий функционал потерь:

$$\begin{aligned} \bar{V}(q) &= c_h \bar{N}(q) + \frac{c_1 \bar{B}_1 + c_3 \bar{B}_3 + c_4 \bar{B}_4}{\bar{B}} + \frac{c_r}{\bar{Y}} = \\ &= c_h \bar{N}(q) + c_1 C_1 \left(1 - \frac{\alpha\lambda}{F(q)} \right) + c_3 \frac{C_1 \lambda}{F(q)} (\alpha + G(q)) + \\ &+ c_4 \frac{C_2 H(q)}{F(q)} + c_r \frac{\alpha^2 \lambda^2 C_1}{\mu F(q)} (\gamma_1^q - \gamma_2^q), \end{aligned}$$

где структура штрафов представлена следующими величинами: c_h - стоимость за единицу времени хранения заявки, c_1 - стоимость за единицу времени пребывания в состоянии отказа, если прибор не может быть восстановлен, c_3 (c_4) - стоимость за единицу времени функционирования системы, когда прибор находится в рабочем состоянии и $N(t) < q$ ($N(t) \geq q$), c_r - фиксированная стоимость за подключение ремонтного оборудования или программного обеспечения. Величина \bar{Y} обозначает средний период времени между двумя последовательными посещениями состояния $(q, 0)$, где начинается восстановление прибора. После преобразований получим

$$\bar{Y} = \frac{\mu \bar{B}}{\alpha (\gamma_1^q - \gamma_2^q)}.$$

Оптимальное значение порогового уровня q^* получим численно, решая уравнение $\frac{d}{dq} \bar{V}(q) = 0$. Если q^* не является целым числом, то берется ближайшее целое число. Так как значение q дискретно, то для вычисления оптимального значения можно также использовать простой метод перебора.

В **шестом** разделе был приведен численный пример системы массового

обслуживания с ненадежным прибором. На основании примера был написан код для подсчета основных характеристик системы и проведен анализ данной системы. Зафиксируем значения стоимостей следующим образом:

$$c_1 = 1.0, \quad c_3 = 2.5, \quad c_4 = 1.0, \quad c_h = 0.1, \quad c_r = 0.8.$$

Параметры λ , μ и β принимают следующие значения:

$$\lambda = 0.3, \quad \mu = 0.9, \quad \beta = 1.2.$$

Множества значений для изменяемых параметров

$$\alpha = \{0.05, 0.2, 0.5, 1.1, 1.5\}.$$

На рисунке 5 представлены графики зависимости функционала потерь при различных значениях α .

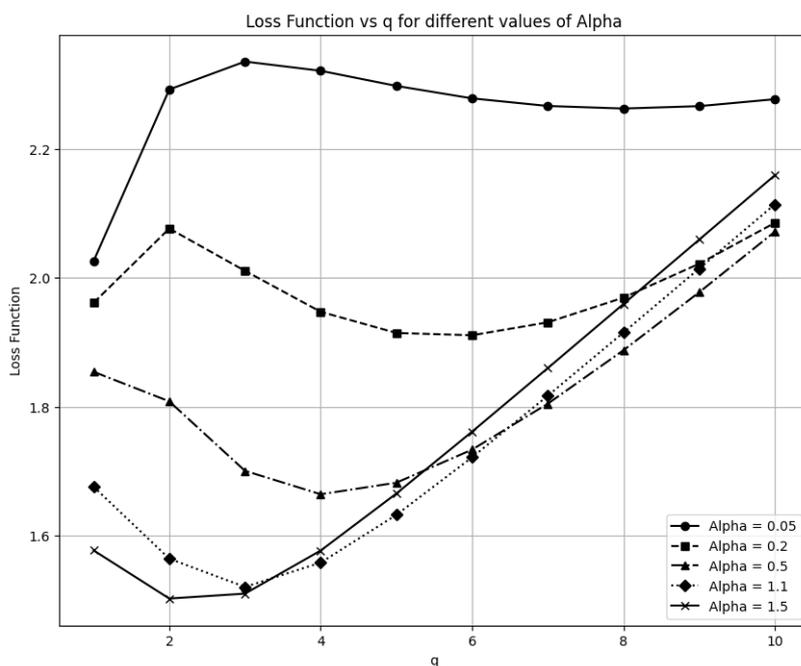


Рисунок 1 – Зависимость функционала потерь $\bar{V}(q)$ от порогового уровня q и параметров α и $\beta = 1.2$

Из графиков видно, что оптимальный пороговый уровень

$$q^* = \{1, 6, 4, 3, 2\}$$

варьируется в зависимости от значения α , показывая, что различные уровни параметра α требуют различных настроек системы для минимизации функции потерь.

На рисунке 6 представлены графики зависимости функционала потерь при различных значениях $\beta = \{0.1, 0.3, 0.4, 1.5, 3.5\}$. При этом

$$\lambda = 0.1, \quad \mu = 0.5, \quad \alpha = 0.2.$$

Оптимальные значения в этом случае

$$q^* = \{4, 5, 5, 5, 6\}.$$

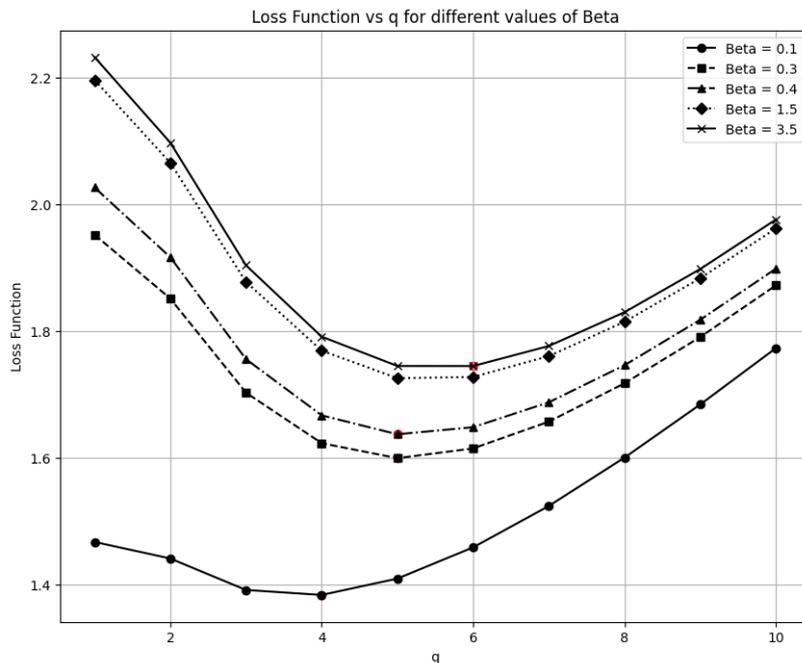


Рисунок 2 – Зависимость функционала потерь $\bar{V}(q)$ от порогового уровня q и параметров $\alpha = 0.2$ и β

Вывод: оптимальное значение порогового уровня q^* уменьшается при увеличении значения параметра α . А при увеличении параметра β оптимальное значение порогового уровня q^* увеличивается.

На рисунке 7 представлены графики зависимости функционала потерь от параметра λ . При этом параметры $\lambda, \mu, \alpha, \beta$ принимают следующие значения:

$$\lambda = \{0.02, 0.06, 0.11, 0.16, 0.19\}, \quad \mu = 0.6, \quad \alpha = 1, \quad \beta = 0.6.$$

Как видно из графиков, оптимальное значение порогового уровня q^* принимают значения

$$q^* = \{4, 3, 3, 3, 2\}.$$

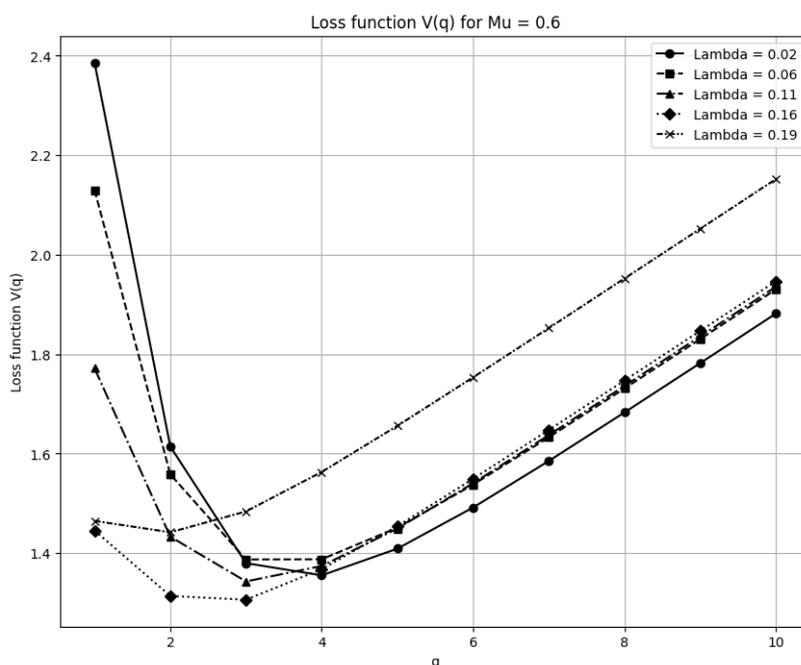


Рисунок 3 – Зависимость функционала потерь $\bar{V}(q)$ от порогового уровня q и параметров λ и $\mu = 0.6$

Следует отметить, что оптимальное значение порогового уровня уменьшается при увеличении значения параметра λ и уменьшении параметра μ .

На рисунке 8 представлены графики зависимости функционала потерь от параметра λ . При этом параметры λ , μ , α , β принимают значения:

$$\lambda = \{0.02, 0.06, 0.11, 0.16, 0.19\}, \quad \mu = 0.9, \quad \alpha = 1, \quad \beta = 0.6.$$

В этом случае оптимальные значения порогового уровня q^* принимают значения

$$q^* = \{4, 4, 4, 3, 3\}.$$

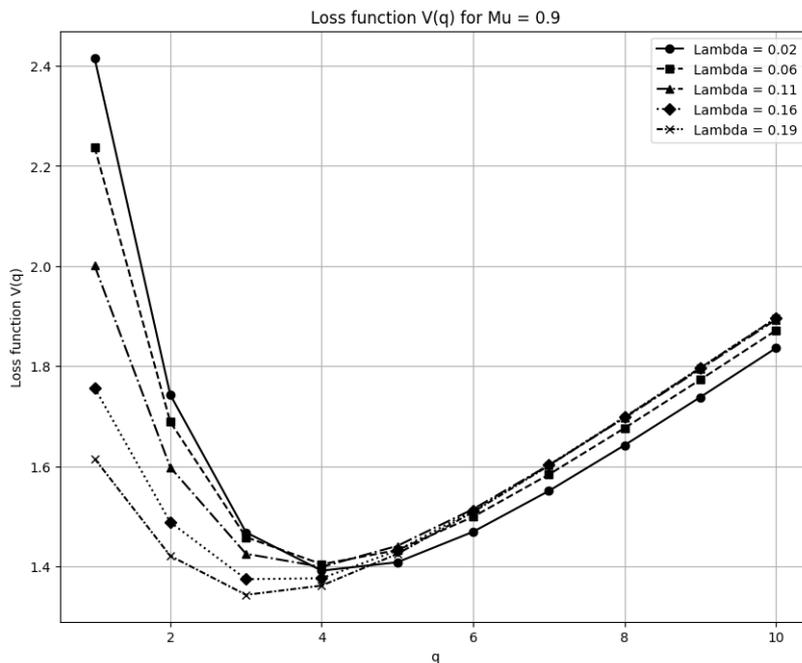


Рисунок 4 – Зависимость функционала потерь $\bar{V}(q)$ от порогового уровня q и параметров λ и $\mu = 0.9$

Это может быть связано с тем, что при более высокой интенсивности входящего потока λ система становится более загруженной, и требуется меньший размер очереди для оптимального функционирования.

Для больших значений μ оптимальное значение q^* в целом выше, чем для меньших значений μ . Это логично, так как более высокая интенсивность обслуживания позволяет справляться с большим потоком заявок, что требует большей ёмкости очереди.

В **заключении** приведены результаты бакалаврской работы.

ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

В ходе выполнения данной работы были решены все поставленные цели и задачи, а именно:

- изучены основные понятия систем массового обслуживания с ненадежным прибором;
- рассмотрена и проанализирована система массового обслуживания с ненадежным прибором;
- разработан программный код для нахождения основных характеристик системы. Описание программы и код приводится в приложении.