МИНОБРНАУКИ РОССИИ

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
**«САРАТОВСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ИМЕНИ Н. Г. ЧЕРНЫШЕВСКОГО»**

Кафедра теории функций и стохастического анализа

ИССЛЕДОВАНИЕ СИСТЕМ МАССОВОГО ОБСЛУЖИВАНИЯ С РАЗЛИЧНЫМИ ОГРАНИЧЕНИЯМИ НА ВРЕМЯ ПРЕБЫВАНИЯ ТРЕБОВАНИЯ В СИСТЕМЕ

АВТОРЕФЕРАТ БАКАЛАВРСКОЙ РАБОТЫ

Студентки 4 курса 412 группы
направления 01.03.02 — Прикладная математика и информатика

механико-математического факультета
Шевцовой Полины Алексеевны

Научный руководитель
старший преподаватель ______________ Н. В. Сергеева

Заведующий кафедрой
д. ф.-м. н., доцент ______________ С. П. Сидоров

Саратов 2024

ВВЕДЕНИЕ

Актуальность темы. Теория массового обслуживания – это математическое исследование систем ожидания или очередей. Модель очередей построена таким образом, что можно прогнозировать длину очереди и время ожидания. Теория массового обслуживания обычно рассматривается как отрасль исследований операций, поскольку результаты часто используются при принятии деловых решений о ресурсах, необходимых для предоставления услуги.

СМО находят применение для решения широкого спектра научно - прикладных задач. Разнообразие проблем, стоящих перед исследователями, привело к разработке самых различных модификаций систем массового обслуживания – со всевозможными типами входящих потоков и дисциплинами обслуживания, приоритетами, конечной очередью, ненадежным прибором и другое. Важной областью применения СМО являются телекоммуникации, переживающие в настоящий момент скачок в своем развитии. Растущие требования пользователей и возможности современного оборудования сопровождаются появлением новых технологий.

Таким образом, данная тема дипломной работы имеет широкие практические применения, экономическую значимость и потенциал для научных исследований, что подтверждает её актуальность в современном мире.

Целью бакалаврской работы является исследование систем массового обслуживания с различными ограничениями на время пребывания требования в системе с целью повышения их производительности и эффективности.

Объект исследования - системы массового обслуживания с различными ограничениями на время пребывания требования в системе.

Предмет исследования - обслуживание заявок, поступающих в систему массового обслуживания с отказами и ожиданием.

Для достижения цели необходимо решить следующие **задачи**:

- раскрыть понятие и сущность системы массового обслуживания;

- рассмотреть классификацию систем массового обслуживания и их основные характеристики;

- исследовать СМО на конкретной задаче;

- реализовать программу вычисления характеристик системы для двух моделей СМО данной задачи;

- сравнить полученные результаты и оптимизировать их.

Практическая значимость проводимого исследования состоит в том, что системы массового обслуживания присутствуют в различных сферах жизни, начиная от финансовых учреждений и медицинских центров и заканчивая торговыми точками и транспортными услугами. Они влияют на эффективность работы компаний и качество обслуживания клиентов, что делает исследование и оптимизацию таких систем важными задачами.

Структура и содержание бакалаврской работы. Работа состоит из введения, 3 разделов, заключения, списка использованных источников и приложения.

ОСНОВНОЕ СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Во **введении** обосновывается актуальность темы работы, формулируется цель работы и решаемые задачи, отмечается практическая значимость полученных результатов.

В **первом** разделе рассмотрены теоретические основы систем массового обслуживания.Системы массового обслуживания (СМО) – это математические объекты, в которых осуществляется последовательное взаимодействие неких дискретных объектов с элементами системы. Данные объекты поступают в систему из внешних источников, затем они взаимодействуют с элементами системы по заданным правилам в течение определенного времени, а после этого покидают систему.

В СМО такие дискретные объекты называются заявками, требованиями или клиентами. Взаимодействие заявок с элементами системы называется обслуживанием, а сами элементы – обслуживающими приборами или серверами.

Основные характеристики системы массового обслуживания включают:

-интенсивность поступления заявок, которая определяет скорость поступления новых заявок в систему;

-интенсивность обслуживания, которая определяет скорость обработки заявок сервером;

-распределение времени обслуживания, которое может быть различным для разных заявок и может следовать определенному вероятностному закону;

-количество серверов в системе;

-дисциплина обслуживания, которая определяет порядок, в котором заявки обрабатываются сервером (например, по принципу FIFO(англ. first in, first out «первым пришёл — первым ушёл») или по приоритетам);

Второй раздел посвящен моделям СМО с ограниченным временем пребывания требования в системе. Рассмотрена система массового обслуживания с отказами, ограниченным временем пребывания заявки в системе и упорядоченным обслуживанием. Данная модель системы массового обслуживания рассмотрена на примере радиолокационного комплекса определения параметров полета самолетов по трассе. Этот комплекс имеет определенную зону, в пределах которой он может «обслужить» самолет, т. е. измерить различные

параметры движения самолета и передать эту информацию на самолет или в другое место. Если за время пребывания самолета в зоне действия комплекса его параметры не успеют измерить, то самолет покинет зону «необслуженным». Были рассмотрены основные формулы для вычисления характеристик данной системы, такие как:
Вероятность того, что параметры самолета будут измерены:

$$P_{\text{обсл}} = \frac{\mu}{\mu+\eta}\frac{R(n-1,\alpha^*)}{R(n,\alpha^*)},$$

где μ- интенсивность потока обслуживаний каждого канала;
η - интенсивность уходов заявок из системы (не дожидаясь конца обслуживания);
$R(n,\alpha^*) = \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\lambda^{i-1}}{(i-1)!}e^{-\lambda}\right).$
Среднее число занятых каналов :

$$\overline{k} = \frac{P_{\text{обсл}}\,\lambda}{\mu},$$

где λ-интенсивность потока заявок.
Вероятность того, что канал занят:

$$\pi_{\text{з.к.}} = \frac{\overline{k}}{n},$$

где n- число обслуживающих каналов.
Среднее время занятости радиолокационной станции (канала):

$$\bar{t}_{\text{з.к.}} = \frac{1}{\mu^*},$$

где μ^*-интенсивность пуассоновского потока освобождений каналов, определяемая как $\mu^* = \mu + \eta$.
Среднее время простоя радиолокационной станции :

$$\bar{t}_{\text{п.к.}} = \bar{t}_{\text{з.к.}} \frac{1 - \pi_{\text{з.к.}}}{\pi_{\text{з.к.}}}.$$

Так же в этом разделе рассмотрена модель массового обслуживания с ожиданием, ограниченным временем пребывания требования в системе и упорядоченным обслуживанием. Здесь рассматривается работа n-канальной системы ПВО с ограниченным временем пребывания заявки в системе, которая отличается от рассмотренной ранее системы лишь тем,что заявка заставшая все каналы занятыми, может быть в дальнейшем обслужена, если за время пребывания ее в очереди освободится хотя бы один из каналов. Также были рассмотрены основные расчетные формулы для данной модели СМО такие как :

Математическое ожидание числа занятых каналов $\bar{k}$:

$$\bar{k} = \frac{a^* R\left(n, a^*\right) + nP\left(n, a^*\right) \frac{R(m+\hat{\delta},\gamma) - R(\delta,\gamma)}{P(\delta,\gamma)}}{R\left(n, a^*\right) + P\left(n, a^*\right) \frac{R(m+\delta,\gamma) - R(\delta,\gamma)}{P(\hat{\delta},\gamma)}},$$

где $\alpha^* = \frac{\lambda}{\mu^*}$;

$\nu = \frac{v}{a}$ - интенсивность потока уходов заявки из очереди.

$\gamma = \frac{\lambda}{\nu}$ - среднее число заявок, которое находилось бы в системе, если бы ни одна из них не обслуживалась;

$\delta = \frac{n\mu^*}{\nu}$ – среднее число циклов обслуживания всеми n каналами.

Вероятность обслуживания требования:

$$P_{\text{обс}} = \frac{\mu \bar{k}}{\lambda}.$$

Среднее число занятых каналов :

$$\bar{k} = \frac{\lambda}{\mu} P_{\text{обс}}.$$

Среднее число заявок, находящихся в очереди:

$$\bar{r} = \frac{P\left(n, a^*\right)\left\{\frac{R(m+\delta,\gamma)-R(\delta,\gamma)}{P(\delta,\gamma)}(\gamma-\delta) + \gamma\left[1-\frac{P(m+\delta,\gamma)}{P(\delta,\gamma)}\right]\right\}}{R\left(n, a^*\right) + P\left(n, a^*\right)\frac{R(m+\delta,\gamma)-R(\delta,\gamma)}{R(\delta,\gamma)}},$$

где m - количество мест в очереди.
Вероятность того, что канал занят:

$$\pi_{\text{з.к.}} = \frac{\bar{k}}{n}.$$

Вероятность наличия очереди:

$$p_{\text{н.о}} = p_n \frac{R(m+\delta,\gamma) - R(\delta,\gamma)}{P(\delta,\gamma)}.$$

Среднее время пребывания заявки в очереди:

$$t_{\text{оч}} = \frac{\bar{r}}{\lambda}.$$

Среднее время занятости канала:

$$\bar{t}_{\text{з.к}} = \frac{1}{\mu^*} + p_{\text{н.о}}\bar{\text{t}}_{\text{н.о}}.$$

Среднее время простоя канала:

$$\bar{t}_{\pi.\text{к}} = \bar{t}_{\text{з.к}}\frac{\pi_{\text{з.к}}}{1-\pi_{\text{з.к}}}.$$

Среднее время пребывания заявки в системе:

$$\bar{t} = \frac{\bar{r} + \bar{k}}{\lambda}.$$

В **третьем** разделе был проведен сравнительный анализ между характеристиками системы массового обслуживания, полученными при решении поставленной задачи для модели СМО с ожиданием, ограниченным временем пребывания заявки в системе и характеристиками полученными при решении задачи для модели СМО с отказами, ограниченным временем пребывания заявки в системе и упорядоченным обслуживанием.

В данном разделе был аналитически решен пример для двух, рассмотренных ранее, моделей систем массового обслуживания, было приведено численное решение для нахождения основных характеристик системы массового обслуживания. Программа для вычисления реализована на языке программирования Python в облачном сервисе Google Colab, результаты работы программы представленны в таблицах 1-3.

Таблица 1 – Расчет практических характеристик системы

Хар-ки	Модель СМО с отказами,без очереди	
	$\lambda = 0.5$, $\mu = 1$, $k = 2$ $\nu = 4/3$	$\lambda = 0.5$, $\mu = 1$, $k = 4$, $\nu = 4/3$
$P_{\text{обс}}$	0.713514	0.749575
$\bar{k}$	0.356757	0.374788
$\bar{t}_{\text{з.к.}}$	0.75	0.75
$\bar{t}_{\text{п.з.}}$	0.3750	0.1875
$\pi_{\text{з.к.}}$	0.178378	0.093697
$\bar{t}_{\text{п.к.}}$	7.254533	3.454545
λ_0	0.356757	0.374788

На основании полученных результатов можно сделать вывод, что модель с очередью лучше справляется с обслуживанем требований в системе по сравнению с моделью без очереди.

С одной стороны, данная модель с увеличением количества обслуживающих каналов, улучшает производительность и снижает время ожидания для требований. Это происходит потому, что большее количество каналов позволяет обслуживать больше требований одновременно. Тем самым сокращает время ожидания и увеличивает пропускную способность системы.

С другой стороны, с увеличением количества мест в очереди вероятность отказа и время пребывания в очереди требований обычно снижается.

Таблица 2 – Расчет практических характеристик системы с ограниченной очередью

Хар-ки	Модель СМО с очередью	
	$\lambda = 0.5,\ \mu = 1,\ k = 2$ $m = 2\ ,\ \nu = 4/3$	$\lambda = 0.5,\ \mu = 1,\ k = 4$ $m = 2,\ \nu = 4/3$
$P_{\text{обс}}$	0.738214	0.749925
$\bar{k}$	0.369107	0.374962
$\bar{r}$	7.853507	5.002458
$\pi_{\text{з.к.}}$	0.184554	0.093741
$p_{\text{н.о.}}$	0.186121	0.0001267
$t_{\text{оч}}$	0.311326	0.170340
$\bar{t}_{\text{з.к}}$	0.752340	0.750008
$\bar{t}_{\pi\text{.к}}$	7.250880	3.324199
$\bar{t}$	0.753921	0.750025

Модель без очереди может обеспечить более низкое среднее время ожидания требований в системе при низкой загрузке, она становится менее эффективной при повышенной интенсивности потока требований и увеличении количества обслуживающих каналов.

Аналогичный вывод можно сделать сравнив вероятности обслуживания заявок. На рисунке 1 представлены графики зависимости вероятности обслуживания заявок от количества каналов обслуживания для системы с отказами и системы с ограниченной очередью.

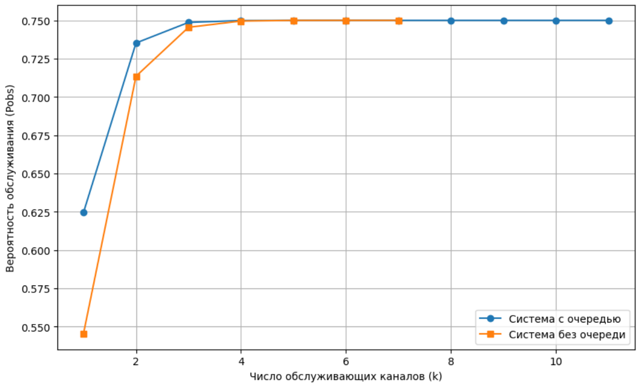

Рисунок 1 – Зависимость вероятности обслуживания от количества обслуживающих каналов

Для наглядного представления результатов работы был разработан оконный интерфейс программы представленный на рисунках 2-4.

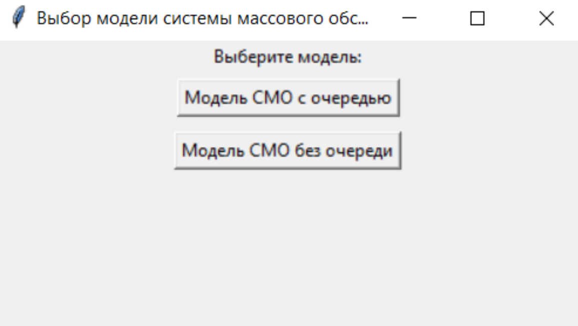

Рисунок 2 – Диалоговое окно выбора модели СМО

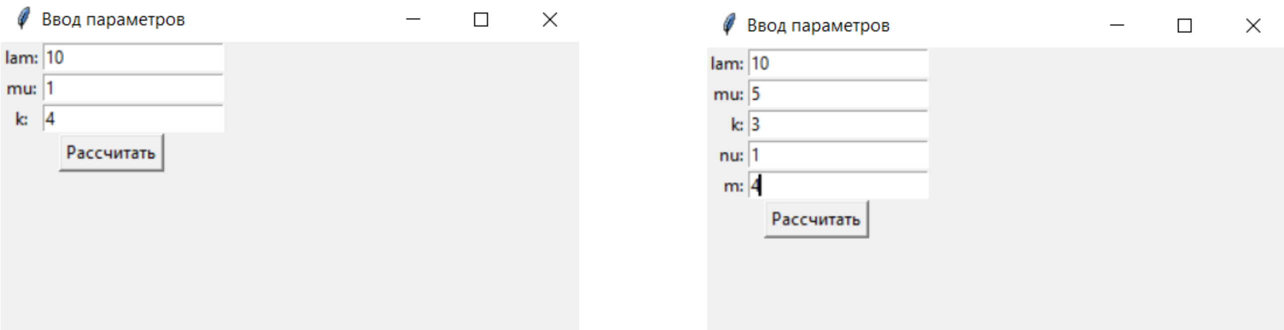

Рисунок 3 – Ввод параметров моделей

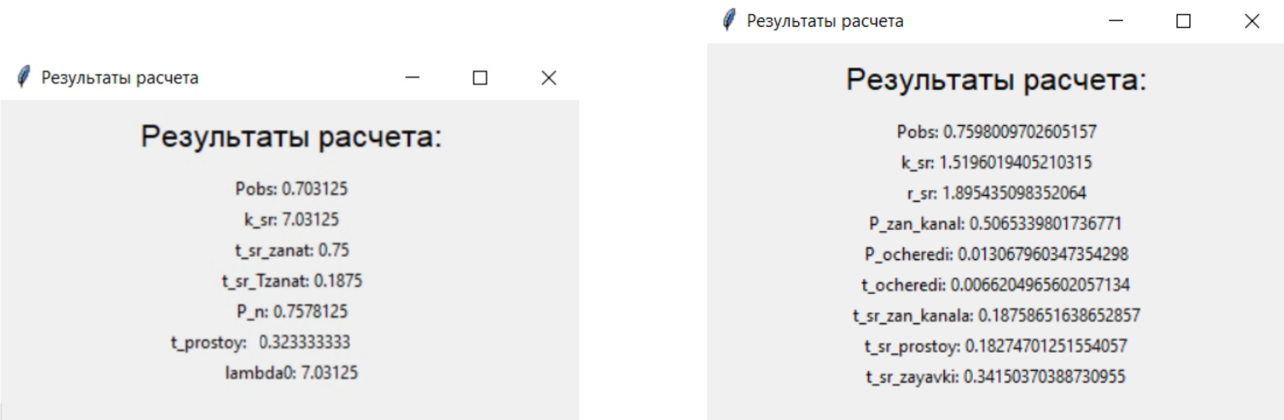

Рисунок 4 – Результаты полученные для моделей

Вычисление оптимального количества обслуживающих каналов

Для заданных параметров зададим стоимостную функцию, определяющую затраты(потери) при функционированнии данной системы с очередью,

$$f(k) = \bar{b}(k)c_1 + \bar{g}(k)c_2,$$

где c_1 - стоимость простоя канала (в единицу времени),
c_2 - стоимость нахождения требования в очереди(в единицу времени),
$\bar{b}(k)$ - среднее время простоя каналов,
$\bar{g}(k)$ - среднее время пребывания требования в системе.

Графики зависимости стоимостной функции от количества каналов обслуживания при различных значениях c_1 и c_2 представлены на рисунках 5-7.

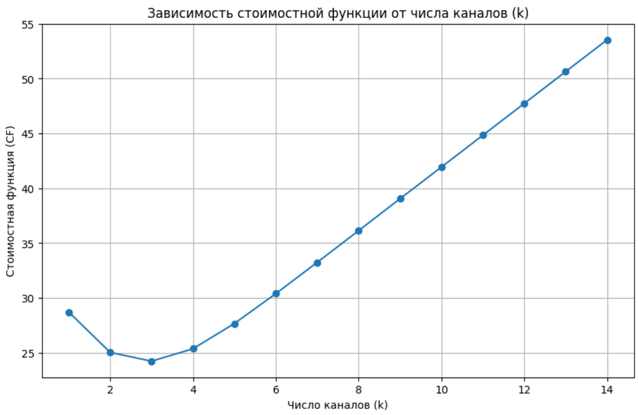

Рисунок 5 – Зависимость стоимостной функции от числа каналов при $c_1 = 29$, $c_2 = 98$

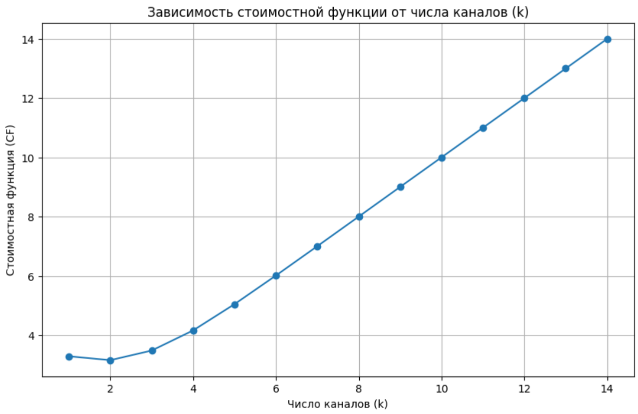

Рисунок 6 – Зависимость стоимостной функции от числа каналов при $c_1 = 10$, $c_2 = 10$

При меньшей стоимости простоя канала (c_1) количество обслуживающих каналов, минимизирующее стоимостную функцию, необходимо увеличить. Это связано с тем, что в такой ситуации приоритет отдается минимизации времени пребывания заявок в системе, что достигается увеличением числа обслуживающих каналов.

При большей стоимости нахождения заявки в системе ($c2$) оптимальное число обслуживающих каналов снижается. В этом случае акцент делается на

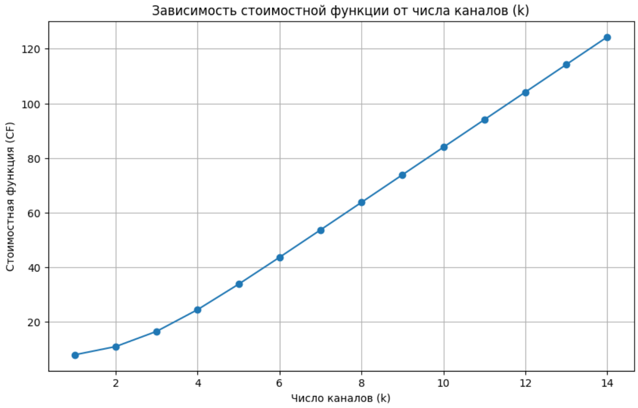

Рисунок 7 – Зависимость стоимостной функции от числа каналов при $c_1 = 101$, $c_2 = 10$

уменьшение времени простоя каналов, что достигается при уменьшении их количества.

В **заключении** приведены результаты бакалаврской работы.

ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

1. Определены основные понятия, связанные с системами массового обслуживания, а также рассмотрена классификация СМО.

2. Изучена модель СМО с ожиданием, ограниченным временем пребывания заявки в системе и модель с отказами, ограниченным временем пребывания заявки в системе и упорядоченным обслуживанием.

3. Разработана программа, решающая задачу нахождения основных характеристик системы массового обслуживания с различными ограничениями на время пребывания требования в системе на основе теоретических формул. Описание программы и программный код приводится в приложении.

4. Вычислены основные характеристики системы массового обслуживания на основе теоритических формул для одних и тех же входных параметров задачи.

5. Проведен сравнительный анализ для полученных результатов решения поставленной задачи для рассмотренных в данной работе моделей СМО.