МИНОБРНАУКИ РОССИИ

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования

«САРАТОВСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ Н.Г.ЧЕРНЫШЕВСКОГО»

Кафедра Дифференциальных уравнений и математической экономики

Спектральные свойства оператор-функций второго порядка с распадающимися краевыми условиями

АВТОРЕФЕРАТ БАКАЛАВРСКОЙ РАБОТЫ

студентки 4 курса 411 группы

направление 01.03.02 — Прикладная математика и информатика

механико-математического факультета

Приходько Софии Владиславовны

Научный руководитель
к.ф.-м.н., доцент ______________ В.С. Рыхлов

Зав. кафедрой
д.ф.-м.н., профессор ______________ С.И. Дудов

Саратов 2024

Введение. Актуальность темы. Спектральная теория операторов является одним из центральных разделов функционального анализа, имеющим широкий спектр приложений в различных областях математики, физики и техники. В частности, изучение спектральных свойств дифференциальных операторов с распадающимися краевыми условиями представляет собой важную и актуальную задачу, которая активно исследуется в настоящее время.

Дифференциальные операторы или дифференциальные оператор-функции второго порядка с распадающимися краевыми условиями возникают в самых разных контекстах, включая теорию колебаний, теорию упругости, электродинамику и другие. Они также играют ключевую роль в математической физике, где их спектральные свойства используются для описания различных физических явлений.

Целью бакалаврской работы является исследование спектральных свойств одного класса оператор-функций(или, по-другому, пучков) второго порядка с распадающимися краевыми условиями. В частности, мы изучаем такие спектральные свойства, как полнота системы собственных функций(с.ф.) и их минимальность в пространстве $L_2[0, \sigma]$.

Объект исследования – это оператор-функции второго порядка с распадающимися краевыми условиями и их собственные функции.

Предмет исследования – анализ спектральных свойств, таких как полнота и минимальность.

Для достижения поставленной цели были выделены следующие задачи:

- Изучение с.ф. рассматриваемого пучка, порожденного дифференциальным выражением второго порядка и краевыми условиями.
- Исследование условий двукратной полноты и минимальности системы с.ф. в пространстве $L_2[0, \sigma]$ в зависимости от значений параметров и коэффициентов.
- Исследование условий, при которых система с.ф. не является полной и имеет бесконечный дефект в пространстве $L_2[0, \sigma]$.
- Составление компьютерной программы, основанной на полученных теоретических знаниях, для исследования спектральных свойств с.ф. данного пучка.

Практическая значимость бакалаврской работы состоит в том, что данная тема широко используется в различных областях науки и техники:

1. Физика: исследование спектральных свойств важно для понимания и моделирования физических процессов, таких как колебания и волновые явления в квантовой механике, акустике и оптике. Знание собственных значений и функций помогает в разработке и применении физических теорий, а также в интерпретации экспериментальных данных.
2. Математика: в задачах математической физики, функциональном анализе, теории дифференциальных уравнений, теории операторов и теории функций. Изучение минимальности и полноты системы собственных функций пучка второго порядка с распадающимися краевыми условиями является фундаментальным для развития теории банаховых и гильбертовых пространств, что имеет значение для построения и анализа математических моделей.
3. Инженерия: анализ спектральных свойств применяется в различных инженерных дисциплинах, таких как теория управления, обработка сигналов, электротехника и механика. Знание этих свойств помогает в проектировании и оптимизации систем, анализе их устойчивости и эффективности, а также в разработке новых технологий и методов обработки информации.

Структура и содержание бакалаврской работы. Работа состоит из введения, 6 частей, заключения, списка использованных источников, приложения.

1 Основное содержание работы

В **введении** объясняется значимость выбранной темы, формулируется цель работы и решаемые задачи.

В **первой** части рассматриваются основные определения и обозначения.

Будем рассматривать семейство обыкновенных дифференциальных оператор-функций, т. е. обыкновенных дифференциальных операторов $L(\lambda)$, зависящих от некоторого комплексного параметра λ (называемый иногда "спектральным параметром"), порожденное линейным дифференциальным выражением

$$\ell(y,\lambda) = p_n(x,\lambda)y^{(n)} + p_{n-1}(x,\lambda)y^{(n-1)} + \ldots + p_1(x,\lambda)y' + p_0(x,\lambda)y$$

и краевыми условиями

$$U_\nu(y,\lambda) = 0, \quad \nu = \overline{1,n}.$$

где

$$U_\nu(y,\lambda) = \sum_{k=1}^{n} \Big(\alpha_{\nu k}(\lambda)y^{(k-1)}(0) + \beta_{\nu k}(\lambda)y^{(k-1)}(1)\Big)$$

причем коэффициенты $\alpha_{\nu k}$ и $\beta_{\nu k}$ также могут зависеть от λ. Это семейство называют пучком обыкновенных дифференциальных операторов или дифференциальных оператор-функций.

Во **второй** части рассматривается постановка задачи.

Рассмотрим обыкновенный дифференциальный пучок второго порядка, порожденный дифференциальным выражением

$$l(y,\lambda) = y'' + 2a\lambda y' + b\lambda^2 y \tag{1.1}$$

и краевыми условиями вида:

$$\begin{aligned} U_1(y,\lambda) &= \alpha_{11}y'(0) + \lambda\alpha_{10}y(0) = 0 \\ U_2(y,\lambda) &= \beta_{21}y'(1) + \lambda\beta_{20}y(1) = 0, \end{aligned} \tag{1.2}$$

где $a, b, \alpha_{ij}, \beta_{ij}$ — произвольные комплексные числа.

В случае $\alpha_{11} = 0$ считаем

$$U_1(y, \lambda) = y(0),$$

а в случае $\beta_{21} = 0$ считаем

$$U_2(y, \lambda) = y(1).$$

Характеристическое уравнение данного пучка есть

$$\omega^2 - 2a\omega + b = 0$$

и его корни, очевидно, имеют вид

$$\omega_1 = -a - \sqrt{a^2 - b}, \quad \omega_2 = -a + \sqrt{a^2 - b}.$$

Мы будем предполагать, что ω_1, ω_2 различны и лежат на одном луче, выходящем из начала координат.

Для определенности считаем, что

$$0 < \omega_1 < \omega_2.$$

Обозначим

$$y_1(x, \lambda) = e^{\lambda\omega_1 x}, \quad y_2(x, \lambda) = e^{\lambda\omega_2 x}.$$

При $\lambda \neq 0$ эти функции являются линейно независимыми решениями уравнения $l(y, \lambda) = 0$.

Далее для определенности считаем $\alpha_{11} \neq 0, \quad \beta_{21} \neq 0$.

Характеристический определитель пучка имеет вид:

$$\Delta(\lambda) = \begin{vmatrix} U_1(y_1, \lambda) & U_1(y_2, \lambda) \\ U_2(y_1, \lambda) & U_2(y_2, \lambda) \end{vmatrix} = \lambda^2 \begin{vmatrix} \alpha_{11}\omega_1 + \alpha_{10} & \alpha_{11}\omega_2 + \alpha_{10} \\ (\beta_{21}\omega_1 + \beta_{20})\, e^{\lambda\omega_1} & (\beta_{21}\omega_2 + \beta_{20})\, e^{\lambda\omega_2} \end{vmatrix} =$$
$$= \lambda^2 e^{\lambda\omega_1} c_2 \left[e^{\lambda\omega_1(\tau - 1)} - c_0 \right] = \lambda^2 e^{\lambda\omega_1} c_2 \Delta_0(\lambda), \tag{1.3}$$

где обозначено

$$\tau = \omega_2/\omega_1, \quad c_0 = c_1/c_2, \quad c_2 = a_1 b_2, \quad c_1 = a_2 b_1,$$
$$a_i = \alpha_{11}\omega_i + \alpha_{10}, \quad b_i = \beta_{21}\omega_i + \beta_{20}, \quad i = 1, 2.$$

Ясно, что в рассматриваемом случае $\tau > 1$.

Если $c_1 \neq 0, c_2 \neq 0$ (мы считаем далее, что это условие выполнено), то уравнение $\Delta_0(\lambda) = 0$ имеет счетное число корней, которые выражаются формулой

$$\lambda_k = \frac{2k\pi i + d_0}{\omega_1(\tau - 1)}, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \tag{1.4}$$

где $d_0 = \ln_0 c_0$, $\ln_0$ $-$ фиксированная ветвь натурального логарифма, определяемая условием $\ln_0 1 = 0$. Обозначим $\Lambda = \{\lambda_k\}$. Очевидно, $\Lambda \backslash \{0\}$ есть множество собственных значений пучка (1)$-$(2). Точка $\lambda = 0$ может быть собственным значением, а может и не быть, даже если $0 \in \Lambda$. Имеет место равенство

$$e^{\lambda_k \omega_1(\tau - 1)} = c_0, \quad \lambda_k \in \Lambda. \tag{1.5}$$

Решается задача на нахождение условий на параметры пучка $l(y, \lambda)$, при которых имеет место или отсутствует двукратная полнота системы собственных и присоединенных функций пучка $l(y, \lambda)$ в пространстве $L_2[0, 1]$.

При отсутствии такой полноты естественно ставить вопрос о двукратной полноте в пространстве $L_2[0, \sigma]$, при $0 < \sigma < 1$ или об однократной полноте в пространстве $L_2[0, 1]$, или, хотя бы, в пространстве $L_2[0, \sigma]$ при $0 < \sigma < 1$.

При исследовании полноты системы с.п.ф. естественно возникает задача об однократной минимальности этой системы в указанных пространствах.

В качестве собственных функций (с.ф.) пучка (1)$-$(2) возьмем следующие функции

$$y\left(x,\lambda_k\right)=\frac{1}{a_2\lambda}\left|\begin{array}{ll} U_1\left(y_1,\lambda\right) & U_1\left(y_2,\lambda\right)\\ y_1(x,\lambda) & y_2(x,\lambda)\end{array}\right|_{|_{\lambda=\lambda_k}}=a_0e^{\lambda_k\omega_1\tau x}-e^{\lambda_k\omega_1 x}=$$

$$=a_0\exp\left(\frac{\tau x}{\tau-1}\left(2k\pi i+d_0\right)\right)-\exp\left(\frac{x}{\tau-1}\left(2k\pi i+d_0\right)\right),\quad \lambda\in\Lambda\backslash\{0\}, \tag{1.6}$$

где $a_0=a_1/a_2$. Обозначим $Y=\{y(x,\lambda):\lambda\in\Lambda\}$. Очевидно, функция $y(x,0)=a_0-1$ есть либо с.ф., либо просто фиксированная ненулевая функция, либо нулевая функция.

Таким образом, добавление к системе с.ф. пучка (1)–(2) функции $y(x,0)$ (если она не входит в эту систему) может увеличить размерность замыкания линейной оболочки всех с.ф. самое большее на единицу.

Утверждение 1. Необходимым и достаточным условием двукратной в $L_2[0,1]$ полноты системы, в случае пучка, порожденного дифференциальным выражением (1) и краевыми условиями $y(0)=y(1)=0$ является расположенность корней ω_1,ω_2 характеристического уравнения на различных лучах, исходящих из начала. Если данное условие выполняется и главные коэфициенты асимптотики $\Delta(\lambda)\neq 0$ $(c_1\neq 0, c_2\neq 0)$, тогда ситема собственных и присоединенных функций пучка $L(\lambda)$ двукратно полна в $L_2[0,1]$. При нарушении этого условия система с.ф. обладает бесконечномерным дефектом в смысле двукратной полноты, как показывают рассмотренные далее примеры.

Теорема 1. Система Y не является двукратно полной системой ни в каком пространстве $L_2[0,\sigma], 0<\sigma\leqslant 1$, и имеет там бесконечный дефект.

В смысле однократной полноты в $L_2[0,1]$ ситуация неоднозначная, а именно: в зависимости от значений коэффициентов a и b в случае краевых условий $y(0)=y(1)=0$ возможны ситуации, когда однократная полнота есть, когда система с.ф. имеет одномерный дефект и, наконец, когда система с.ф. имеет бесконечный дефект.

Таким образом, представляет интерес задача описания пучков (1)–(2), для с.ф. которых имеет место однократная полнота в $L_2[0,\sigma]$, где $\sigma>0$ – произвольный параметр (в случае $\sigma>1$ с.ф. пучка (1)–(2) будем считать продолженными на отрезок $[0,\sigma]$ в соответствии с формулами (6)). Для пучков, с.ф. которых обладают однократной полнотой, естественно ставить вопрос о минимальности системы с.ф.

В **третьей** части рассматриваются критерии полноты и минимальности системы собственных функций в $L_2[0,\sigma]$.

Обозначим через B и A_ρ линейные операторы, отображающие $L_2[0,\sigma]$ в $L_2[0,\sigma\tau]$ и $L_2[0,\rho]$ в $L_2[0,\tau-1]$ соответственно и определяемые формулами:

$$(Bf)(x) = f\left(\frac{x}{\tau}\right), x \in [0,\sigma\tau];$$

$$(A_\rho f)(x) = \begin{cases} \sum_{j=0}^{s} \bar{c}_0^j f(x+j(\tau-1)), & x \in [0,\rho - s(\tau-1)]; \\ \sum_{j=0}^{s-1} \bar{c}_0^j f(x+j(\tau-1)), & x \in [\rho - s(\tau-1), \tau-1], \end{cases}$$

где s есть натуральное число или ноль, удовлетворяющее следующим неравенствам $s(\tau-1) < \rho \le (s+1)(\tau-1)$.

Теорема 2. Система Y полна в пространстве $L_2[0,\sigma]$ тогда и только тогда, когда однородное уравнение

$$(A_\sigma f)(x) - \frac{\overline{a}_0}{\tau}(A_{\sigma\tau} Bf)(x) = 0, \quad x \in [0,\tau-1] \tag{1.7}$$

имеет только тривиальное решение в $L_2[0,\sigma]$.

Теорема 3. Система Y минимальна в пространстве $L_2[0,\sigma]$ тогда и только тогда, когда для любого целого k найдется такая функция $z = z_k \in L_2[0,\sigma]$, которая является решением неоднородного уравнения

$$(A_\sigma z)(x) - \frac{\bar{a}_0}{\tau}(A_{\sigma\tau} Bz)(x) = \frac{1}{\tau-1}\exp\left(\frac{2k\pi i - \bar{d}_0}{\tau-1}x\right). \tag{1.8}$$

Определение 1. Обозначим дефектное подпространство системы Y в пространстве $L_2[0,\sigma]$ через $\mathfrak{N}_\sigma$, т.е.

$$\mathfrak{N}_\sigma = L_2[0,\sigma] \ominus \mathfrak{M}_\sigma,$$

где $\mathfrak{M}_\sigma$ есть замыкание линейной оболочки системы Y.

В **четвертой** части рассматриваются достаточные условия полноты и минимальности системы собственных функций в $L_2[0,\sigma]$.

При доказательстве следующих теорем будет использоваться принцип сжимающих отображений, поэтому рассмотрим его определение.

Определение 2. Отображение A метрического пространства (R,ρ) в себя называется сжимающим отображением, если выполняется такое неравенство $0<\alpha<1$, что для любых двух точек x и y пространства R выполняется неравенство $\rho(A(x),A(y))\leqslant\alpha\rho(x,y)$. Точка x называется неподвижной точкой отображения A, если выполняется равенство $A(x)=x$.

Теорема 4. а) Если

$$0<\sigma\leqslant 1-1/\tau,\quad \tau>1,$$

то система Y полна в $L_2[0,\sigma]$ при любых $a_0,c_0\in\mathbb{C}$.

б) Если при некотором $k=1,2,\ldots$ выполняются неравенства

$$k(1-1/\tau)<\sigma\leqslant\min\{\tau-1,(k+1)(1-1/\tau)\},\quad \tau>k,$$

то для полноты системы Y в $L_2[0,\sigma]$ достаточно выполнения условия

$$|a_0|^2\sum_{j=0}^{k}|c_0|^j\max\left\{1,|c_0|^k\right\}<\tau. \tag{1.9}$$

Теорема 5. Если $\sigma=\tau-1$ и при некотором $k=1,2,\ldots$ выполняется неравенство

$$k<\tau\leqslant k+1,$$

то для минимальности системы Y в пространстве $L_2[0,\sigma]$ достаточно выполнения условия (9).

В **пятой** части рассматриваются достаточные условия неполноты системы собственных функций в $L_2[0,\sigma]$

Теорема 6. Для того чтобы система Y была не полна в $L_2[0,\sigma]$ и имела там бесконечный дефект, достаточно:

а) в случае $\sigma>1-1/\tau$ выполнения условия

$$\tau<|a_0|^2; \tag{1.10}$$

б) в случае $\sigma > \tau - 1$, где τ удовлетворяет неравенству $k < \tau \leqslant k + 1$ при некотором $k = 1, 2, \ldots$, выполнения условия (9).

Шестая часть посвящена численной реализации. Для этого был разработан код на языке *Python*, использующий библиотеки *NumPy* и *SymPy* для символьных вычислений.

Код начинается с запроса входных значений, таких как коэффициенты дифференциального пучка, параметры краевых условий, параметр σ.

Далее выполняются следующие дейтвия:

1. определяются символы, которые будут использоваться в дальнейших вычислениях.
2. строится характеристическое уравнение и находится его решение, что позволяет определить значения ω_1 и ω_2, а также выполняется проверка удовлетворения условию $0 < \omega_1 < \omega_2$. В случае, если данное условие не выполняется, выводится соответствующее сообщение о невозможности продолжения проверки остальных условий. Затем происходит подстановка входных значений в полученные выражения для ω_1 и ω_2.
3. вычисляются коэффициенты c_0, c_1, c_2, a_0, a_1, a_2, b_1 и b_2, а также проверяются условия $c_1 \neq 0$ и $c_2 \neq 0$. В случае, если эти условия не выполняются, выводится соответствующее сообщение, и программа завершает работу.
4. вычисляется характеристический определитель Δ_0 и находится его решение относительно λ. Вычисляются собственные значения путем подстановки значений в соответствующую формулу.
5. определяется функция $y(x, \lambda_k)$, которая представляет собой собственную функцию, соответствующую корню λ_k. Вычисляются коэффициенты a_0 и c_0, а также проверяются условия теорем 4, 5 и 6, связанные с полнотой и минимальностью системы собственных функций.

В заключении выводятся результаты проверки условий теорем и делаются выводы о полноте и минимальности системы Y собственных функций в пространстве $L_2[0, \sigma]$.

Заключение. В рамках данной дипломной работы было проведено исследование спектральных свойств одного класса оператор-функций второго порядка с распадающимися краевыми условиями. Основной целью работы было изучение вопросов полноты и минимальности системы собственных функций, порождаемой дифференциальным оператором, в пространстве $L_2[0, \sigma]$.

В ходе исследования были решены следующие задачи:

1. Изучена система с.ф. рассматриваемого пучка, порожденного дифференциальным выражением второго порядка с распадающимися краевыми условиями.

2. Исследованы условия двукратной полноты и минимальности данной системы с.ф. в пространстве $L_2[0, \sigma]$.

3. Определены условия, при которых система с.ф. не является полной и имеет бесконечный дефект в пространстве $L_2[0, \sigma]$.

Был разработан код на языке $Python$, использующий известные библиотеки $NumPy$ и $SymPy$ для символьных вычислений, который позволяет проводить исследование спектральных свойств оператор-функций второго порядка с распадающимися краевыми условиями. Этот код является важным инструментом для решения задач, связанных с полнотой и минимальностью системы собственных функций.

В результате проведенного исследования были получены новые результаты, касающиеся полноты и минимальности системы собственных функций в пространстве $L_2[0, \sigma]$. Эти результаты могут быть использованы для дальнейших исследований в области спектральной теории операторов и ее приложений в математической физике.

Таким образом, результаты данного исследования могут быть использованы для более глубокого понимания спектральных свойств оператор-функций второго порядка. Дипломная работа вносит вклад в развитие спектральной теории операторов, и может быть интересна специалистам в области функционального анализа, дифференциальных уравнений и математической физики.