МИНОБРНАУКИ РОССИИ

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«САРАТОВСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ Н. Г. ЧЕРНЫШЕВСКОГО»

Кафедра дифференциальных уравнений и математической экономики

ОБОСНОВАНИЕ МЕТОДА ФУРЬЕ В СМЕШАННОЙ ЗАДАЧЕ ДЛЯ ВОЛНОВОГО УРАВНЕНИЯ С НУЛЕВОЙ НАЧАЛЬНОЙ СКОРОСТЬЮ

АВТОРЕФЕРАТ БАКАЛАВРСКОЙ РАБОТЫ

студента 4 курса 411 группы
направления 01.03.02 — Прикладная математика и информатика

механико-математического факультета
Липилина Дениса Константиновича

Научный руководитель
д. к.ф.-м.н. доцент ______________ В. П. Курдюмов

Заведующий кафедрой
д. ф.-м. н., профессор ______________ С. И. Дудов

Саратов 2024

Актуальность темы.Данная работа посвящена обоснованию метода Фурье в смешанной задаче для однородного волнового уравнения.

Метод Фурье используется при решении задач математической физике, интерес к которым постоянно поддерживается их многочисленными приложениями. Традиционно обоснование метода Фурье, в задачах математической физики опирается на доказательство равномерной сходимости ряда, представляющего формальное решение задачи и рядов, получающихся из него почленным дифференцированием нужное число раз. Информация обзорного характера содержится в книгах [1],[2],[3],[4],см.также[5],[6].

В настоящей работе использован резольвентный подход, опирающийся на метод Коши-Пуанкаре интегрирования по спектральному параметру резольвенты оператора, порожденного спектральной задачей по методу Фурье, впервые предложенный А.П.Хромовым, и прием А.Н.Крылова об ускорении сходимости рядов Фурье. Суть приема А.Н.Крылова в том, что вопрос о дифференцирование ряда решается путем разбиения его на два ряда, один из которых точно суммируется, а второй ряд сходися настолько быстро, что его можно почленно дифференцировать нужное число раз.

В.А. Чернятин приемом А.Н.Крылова с применением уточненной асимптотики собственных значений и собственных функций оператора ,соответствующего метод Фурье спектральной задачи, и значительно ослабив их условие гладкости, а в ряде случаев эти условия гладкости стали минимально возможными.

Дается обоснование метода Фурье двух смешанных задач с нулевой начальной скоростью и ненулевом начальном положением с граничнымы условиями, когда концы закреплены и в случае периодических условий при минимальных требованиях гладкости начальной функции

Цель работы. Для двух смешанных задач для однородного волнового уравнения с комплексным потенциалом, нулевой начальной скоростью с граничными условиями, когда концы закреплены и в случае периодических условий доказать теоремы о совпадении их формального решения по методу Фурье с классическим решением при минимальных требованиях гладкости начальной функции.

Структура работы. Работа состоит из введения, двух глав, заключения и программы.

Основное содержание работы

Во **Введении** излагается направление исследований, история вопросс, подход к решению поставленной задачи и ожидаемые результаты. В **Главе 1** рассматривается задача

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} - q(x)u(x,t) \tag{1}$$

$$u(0,t) = u(1,t) = 0 \tag{2}$$

$$u(x,0) = \varphi(x), \quad u'_t(x,0) = 0, \tag{3}$$

где комплекснозначная $q(x) \in C[0,1]$ и

$$\varphi(x) \in C^2[0,1], \quad \varphi(0) = \varphi(1) = \varphi''(0) = \varphi''(1) = 0 \tag{4}$$

Метод Фурье связан со спектральной задачей для оператора L

$$Ly = -y'' + q(x)y, \quad y(0) = y(1) = 0.$$

Теорема 1.Собственные значения оператора , достаточно большие по модулю, простые, и для них имеют место асимптотические формулы:

$$\lambda_n = \rho_n^2, \quad \rho_n = \pi n + O(1/n), \quad n = n_0, n_0 + 1, ...$$

Пусть $\gamma_n = \{\rho||\rho - n\pi| = \delta\}$, где $\delta > 0$ и достаточно мало, а $n \geq n_0$ и n_0 таково, что при всех $n \geq n_0$ внутрь и на границу γ_n попадает лишь по одному из ρ_n. Пусть $\tilde{\gamma}$ - образ γ_n в λ-плоскости ($\lambda = \rho^2, Re\rho \geq 0$). Обозначим через $R_\lambda = (L - \lambda E)^{-1}$- резольвенту оператора L. Тогда по методу Фурье формальное решение задачи (1)–(3) представимо в виде

$$u(x,t) = -\frac{1}{2\pi i}\int_{|\lambda|=r} (R_\lambda \varphi) cosptd\lambda - \sum_{n \geq n_0} \frac{1}{2\pi i}\int_{\tilde{\gamma}_n} (R_\lambda \varphi) cosptd\lambda,$$

где $r > 0$ фиксировано и взято таким, что все собственные значения, меньшие по модулю r , имеют номера, меньшие n_0, на контуре $|\lambda| = r$ нет собственных значений.

Теорема 2.Для формального решения $u(x,t)$ имеет место формула

$$u(x,t) = u_0(x,t) + u_1(x,t) + u_2(x,t) \tag{5}$$

где

$$u_0(x,t) = -\frac{1}{2\pi i}\int_{|\lambda|=r}\frac{R^0_\lambda g}{\lambda-\mu_0}\cos\rho t d\lambda - \sum_{n\geq n_0}\frac{1}{2\pi i}\int_{\tilde{\gamma}_n}\frac{R^0_\lambda g}{\lambda-\mu_0}\cos\rho t d\lambda$$

$$u_1(x,t) = -\frac{1}{2\pi i}\int_{|\lambda|=r}\frac{1}{\lambda-\mu_0}\left[R_\lambda g - R^0_\lambda g\right]\cos\rho t d\lambda$$

$$u_2(x,t) = -\sum_{n\geq n_0}\frac{1}{2\pi i}\int_{\tilde{\gamma}_n}\frac{1}{\lambda-\mu_0}\left[R_\lambda g - R^0_\lambda g\right]\cos\rho t d\lambda$$

$R^0_\lambda = (L_0 - \lambda E)^{-1}$ - резольвента оператора L_0, который есть оператор L при $q(x) \equiv 0$ (считаем, что вышеприведенные требования на μ_0 выполняются и для оператора L_0).$g = (L - \lambda_0 E)\varphi$

Для $u_0(x,t)$ справедлива

$$u_0(x,t) = -\frac{1}{2\pi i}\int_{|\lambda|=r}\left(R^0_\lambda\varphi_1\right)\cos\rho t d\lambda - \sum_{n\geq n_0}\frac{1}{2\pi i}\int_{\tilde{\gamma}_n}\left(R^0_\lambda\varphi_1\right)\cos\rho t d\lambda$$

где $\varphi_1 = R^0_{\mu_0} g$

Для дальнейшего потребуется точная формула для резольвенты R_λ, R^0_λ. Обозначим через $z_1(x,\rho)$ и $z_2(x,\rho)$ решения уравнения

$$y'' - q(x)y + \rho^2 y = 0$$

с начальными условиями

$$z_1(0,\rho) = 1, \quad z_1'(0,\rho) = 0, \quad z_2(0,\rho) = 0, \quad z_2'(0,\rho) = 1$$

Тогда $z_j(x,\rho)$ являются целыми функциями по ρ и даже по λ, где $\lambda=\rho^2$.

Теорема 3.

Для резольвенты R_λ имеет место формула

$$R_\lambda f = z_2(x,\rho)\,(f,z_1) - v(x,\rho)\,(f,z_2) - (M_\rho f)\,(x)$$

где

$$v(x,\rho)=\frac{z_2(x,\rho)z_1(1,\rho)}{z_2(1,\rho)},\quad (f,g)=\int_0^1 f(x)g(x)dx$$

$$(M_\rho f)\,(x)=\int_0^x M(x,t,\rho)f(t)dt,\quad M(x,t,\rho)=\begin{vmatrix} z_1(t,\rho) & z_2(t,\rho)\\ z_1(x,\rho) & z_2(x,\rho)\end{vmatrix}$$

Теорема 4. Для R_λ^0 имеет место формула

$$R_\lambda^0 f = -z_2^0(x,\rho)\left(f,z_1^0\right) + v^0(x,\rho)\left(f,z_2^0\right) + \left(M_\rho^0 f\right)(x)$$

где $z_1^0(x,\rho), z_2^0(x,\rho), v^0(x,\rho), M_\rho^0$ те же, что и $z_1(x,\rho), z_2(x,\rho), v(x,\rho), M_\rho$, но взятые теперь для оператора L_0.

Таким образом, $z_1^0(x,\rho)=\cos\rho x$,

$$z_2^0(x,\rho)=\frac{\sin\rho x}{\rho},\quad v^0(x,\rho)=\frac{\sin\rho x\cos\rho}{\sin\rho}$$

Теорема 5. Имеет место формула

$$u_0(x,t)=\frac{1}{2}\left(\tilde\varphi_1(x+t)+\tilde\varphi_1(x-t)\right)$$

где $\tilde\varphi_1(x)\in C^2(-\infty,\infty)$, нечетна, $\tilde\varphi_1(x)=\tilde\varphi_1(2+x)$, $\tilde\varphi_1(x)=\varphi_1(x)$ при $x\in[0,1]$.

Таким оббразом найдена сумма ряда $u_0(x,t)$ из (5). Для $u_2(x,t)$ из (5) справедлива формула

$$u_2(x,t)=-\frac{1}{2\pi i}\sum_{n=n_0}^{\infty}\int_{\tilde\gamma_n}\frac{1}{\lambda-\mu_0}\left[v(x,\rho)\,(g,z_2)-v^0(x,\rho)\left(g,z_2^0\right)\right]\cos\rho t d\lambda \quad (6)$$

Потребуются следующие факты о $z_1(x,\varphi)$ и $z_2(x,\varphi)$

Теорема 6.В полосе $|\operatorname{Im}\rho| \leq h(h>0$ и любое) имеют место асимптотические формулы

$$z_1(x,\rho)=\cos\rho x+O(1/\rho), \quad z_1'(x,\rho)=-\rho\sin\rho x+O(1)$$
$$z_2(x,\rho)=\frac{\sin\rho x}{\rho}+O\left(1/\rho^2\right), \quad z_2'(x,\rho)=\cos\rho x+O(1/\rho)$$

где оценки $O(\ldots)$ равномерны по $x\in[0,1]$.

Теорема 7.Для $z_2(x,\rho)$ имеет место формула

$$z_2(x,\rho)=\frac{\sin\rho x}{\rho}+\int_0^x K(x,t)\frac{\sin\rho t}{\rho}dt$$

где $K(x,t)$ непрерывно дифференцируема по x и t, и $K(x,0)\equiv 0(K(x,t)$ не зависит от ρ).

Лемма 1.

При $\rho\in\gamma_n$ имеют место асимптотические формулы

$$v^{(j)}(x,\rho)=v^{0(j)}(x,\rho)+O\left(\rho^{j-1}\right), \quad j=0,1,2$$

$$v^{(j)}(x,\rho)\left(g,z_2\right)-v^{0(j)}(x,\rho)\left(g,z_2^0\right)=v^{0(j)}(x,\rho)\left(g,z_2-z_2^0\right)+O\left(\rho^{j-1}\left(g,z_2\right)\right),$$

$$(j=0,1,2),$$

$$\left(g,z_2\right)=\rho^{-1}\left[\left(g_1(\xi)\cos\mu\xi,\sin\pi n\xi\right)+\left(g_1(\xi)\sin\mu\xi,\cos\pi n\xi\right)\right]$$
$$\left(g,z_2-z_2^0\right)=\rho^{-2}\left[\left(g_2(\xi)\cos\mu\xi,\cos\pi n\xi\right)-\left(g_2(\xi)\sin\mu\xi,\sin\pi n\xi\right)\right]$$

где

$$\rho=\pi n+\mu, \quad \mu\in\gamma_0,$$
$$g_1(\xi)=g(\xi)+\int_\xi^1 K(\tau,\xi)g(\tau)d\tau,$$
$$g_2(\xi)=-g(\xi)K(\xi,\xi)+\int_\xi^1 K_\xi'(\tau,\xi)g(\tau)d\tau$$

Лемма 2.

Обозначим через $\psi(x)$ функции $\cos x$ или $\sin x$. Пусть $f(x) \in L_{\text{ох}}[0,1]$ и $f(x,\mu) = f(x)\psi(\mu x)$, $\mu \in \gamma_0, \beta_n(\mu) = (f(x,\mu), \psi(\pi n x))$. Тогда верна оценка

$$\sum_{n=n_1}^{n_2} \frac{1}{n} |\beta_n(\mu)| \le c \sqrt{\sum_{n=n_1}^{n_2} \frac{1}{n^2}}$$

где с > 0 и не зависит от n_1, n_2 и $\mu \in \gamma_0$.

Обозначим

$$a_n(x,t) = -\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_n} \frac{2\rho \cos \rho t}{\lambda - \mu_0} \left[\mathrm{v}(x,\rho)\,(g, z_2) - v^0(x,\rho)\,\left(g, z_2^0\right) \right] d\rho$$

Использованием леммы 1 получаем

Лемма 3.Ряды

$$\sum a_{n,x^j}^{(j)}(x,t), \quad \sum a_{n,t^(}^{(j)}(x,t), \quad j = 0,1,2$$

сходятся абсолютно и равномерно по $x \in [0,1]$ и $t \in [-T,T]$, где $T > 0$ - любое фиксированное число.

Так как $u_2(x,t)$ =(6), то из леммы 3 вытекает

Лемма 4.Ряд $u_2(x,t)$ допускает почленное дифференцирование дважды по x и t при $x \in [0,1] u$ $t \in (-\infty, \infty)$.

Теорема 8. Формальное решение

$$u(x,t) = -\frac{1}{2\pi i} \int_{|\lambda|=r} (R_\lambda \varphi) cosptd\lambda - \sum_{n \ge n_0} \frac{1}{2\pi i} \int_{\tilde{\gamma}_n} (R_\lambda \varphi) cosptd\lambda,$$

есть классическое решение задачи (1)-(2) при минимальных условиях (4) на $\varphi(x)$.

В **Главе 2** рассматривается смешанная задача

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} - q(x)u(x,t) \tag{7}$$

$$u(0,t) = u(1,t), \quad u_x(0,t) = u_x(1,t) \tag{8}$$

$$u(x,0)=\varphi(x), \quad u_t'(x,0)=0, \quad x\in[0,1], \quad t\in(-\infty,\infty) \tag{9}$$

где $q(x)\in C[0,1]$ - комплекснозначная функция. Естественные минимальные требования для классического решения следующие:

$$\varphi(x)\in C^2[0,1], \quad \varphi(0)=\varphi(1), \quad \varphi'(0)=\varphi'(1) \tag{10}$$

Кроме того, в силу дифференциального уравнения (7) имеем

$$\varphi''(0)-\varphi''(1)-(q(0)-q(1))\varphi(0)=0 \tag{11}$$

При применении метода Фурье здесь возникают трудности из-за возможной кратности собственных значений соответствующей спектральной задачи. Успешно справиться с этими трудностями позволяет резольвентный подход.

По методу Фурье с задачей (7)-(9) связывает спектральная задача для оператора L

$$Ly=-y''(x)+q(x)y(x), \quad y(0)=y(1), \quad y'(0)=y'(1) \tag{12}$$

Теорема 9.Для резольвенты R_λ оператора L имеет место формула

$$R_\lambda f=-\frac{z_1(x,\rho)}{\Delta(\rho)}\begin{vmatrix} U_1\left(M_\rho f\right) & u_{12}(\rho) \\ U_2\left(M_\rho f\right) & u_{22}(\rho)\end{vmatrix}-\frac{z_2(x,\rho)}{\Delta(\rho)}\begin{vmatrix} u_{11}(\rho) & U_1\left(M_\rho f\right) \\ u_{21}(\rho) & U_2\left(M_\rho f\right)\end{vmatrix}+\left(M_\rho f\right)(x),$$

где

$$U_1(y)=y(0)-y(1), U_2(y)=y'(0)-y'(1), u_{ij}(\rho)=U_i\left(z_j\right),$$

$$\Delta(\rho)=\det\left(u_{ij}(\rho)\right)_{i,j=1}^2, \lambda=\rho^2, \operatorname{Re}\rho\geq 0$$

.

Теорема 10.Имеет место формула

$$R_\lambda f=w_1(x,\rho)\left(f,z_1\right)+w_2(x,\rho)\left(f,z_2\right)+\left(M_\rho f\right)(x)$$

где

$$w_1(x,\rho)=\frac{z_1(x,\rho)v_{11}(\rho)+z_2(x,\rho)v_{21}(\rho)}{\Delta(\rho)},\quad w_2(x,\rho)=\frac{z_1(x,\rho)v_{12}(\rho)+z_2(x,\rho)v_{22}(\rho)}{\Delta(\rho)}$$

$$v_{11}(\rho)=-u_{12}(\rho)z_2'(1,\rho)+u_{22}(\rho)z_2(1,\rho),\quad v_{12}(\rho)=-u_{22}(\rho)z_1(1,\rho)+u_{12}(\rho)z_1'(1,\rho)$$

$$v_{21}(\rho)=-u_{21}(\rho)z_2(1,\rho)+u_{11}(\rho)z_2'(1,\rho),\quad v_{22}(\rho)=-u_{11}(\rho)z_1'(1,\rho)+u_{21}(\rho)z_1(1,\rho)$$

Теорема 11.Нули ρ_n функции $\Delta(\rho)$, достаточно большие по модулю, образуют две серии с асимптотикой $\rho_n'=2\pi n+\varepsilon_n'$, $\rho_n''=2\pi n+\varepsilon_n''$ $(n=n_0,n_0+1,\ldots)$, где ε_n' и ε_n'' стремятся к нулю при $n\to\infty$. В случае $\varepsilon_n'\neq\varepsilon_n''$ они простые, а в случае $\varepsilon_n'=\varepsilon_n''$ они двукратные.

Теперь уже для задачи (7)-(9) обозначим через γ_n окружности $\gamma_n=\{\rho||\rho-2\pi n\ |=\delta\},\delta>0$ и пусть обозначим $\Delta_0(\rho)=\left(u_{ij}^0(\rho)\right)_1^2$, где $u_{ij}^0(\rho)=U_i\left(z_j^0\right)$.

Лемма 5.При $\rho\in\gamma_n$ имеют место асимптотические формулы

$$z_1^{(j)}(x,\rho)=z_1^{0(j)}(x,\rho)+O\left(\rho^{j-1}\right),\quad z_2^{(j)}(x,\rho)=z_2^{0(j)}(x,\rho)+O\left(\rho^{j-2}\right)$$

где $j=0,1,2,z_k^{(j)}(x,\rho)$ есть $j-$ производная по функции $z_k(x,\rho),z_1^0(x,\rho)=\cos\rho x,z_2^0(x,\rho)=\sin\rho x/\rho$.

Лемма 6. При $\rho\in\gamma_n$ имеет место формула

$$\frac{1}{\Delta(\rho)}=\frac{1}{\Delta_0(\rho)}+O\left(\frac{1}{\rho}\right)$$

Лемма 7.При $\rho\in\gamma_n$ имеют место формулы

$$(g,z_1)=(g_3(\xi)\cos\mu\xi,\cos2\pi n\xi)-(g_3(\xi)\sin\mu\xi,\sin2\pi n\xi)$$

$$\left(g,z_1-z_1^0\right)=\frac{1}{2\pi n+\mu}\left[(g_4(\xi)\cos\mu\xi,\sin2\pi n\xi)+(g_4(\xi)\sin\mu\xi,\cos2\pi n\xi)\right]$$

где

$$g_3(\xi)=g(\xi)+\int_\xi^1K_1(\tau,\xi)g(\tau)d\tau,$$

$$g_4(\xi) = g(\xi)K_1(\xi,\xi) - \int_\xi^1 K'_{1\xi}(\tau,\xi)g(\tau)d\tau, \quad g(\xi) \in C[0,1]$$

Лемма 8. При $\rho \in \gamma_n$ имеют место формулы

$$(g, z_2) = \frac{1}{2\pi n + \mu}\left[(g_5(\xi)\cos\mu\xi, \sin 2\pi n\xi) + (g_5(\xi)\sin\mu\xi, \cos 2\pi n\xi)\right]$$

$$\left(g, z_2 - z_2^0\right) = \frac{1}{(2\pi n + \mu)^2}\left[(g_6(\xi)\cos\mu\xi, \cos 2\pi n\xi) - (g_6(\xi)\sin\mu\xi, \sin 2\pi n\xi)\right]$$

где

$$g_5(\xi) = g(\xi) + \int_\xi^1 K(\tau,\xi)g(\tau)d\tau, \quad g_6(\xi) = -g(\xi)K(\xi,\xi) + \int_\xi^1 K'_\xi(\tau,\xi)g(\tau)d\tau,$$

$$g(\xi) \in C[0,1]$$

Лемма 9.

При $\rho \in \gamma_n$ имеют место асимптотические формулы

$$w_{1,x'}^{(j)}(x,\rho) = w_{1,x'}^{(j)}(x,\rho) + O\left(n^{j-2}\right), \quad w_{2,x(}^{(j)}(x,\rho) = w_{2,x'}^{(j)}(x,\rho) + O\left(n^{j-1}\right)$$

где $j = 0,1,2, w_k^0(x,\rho)$ есть $w_k(x,\rho)$ для случая оператора L_0 (т.е. оператора L при $q(x) \equiv 0$). Оценки O(..) равномерны по $x \in [0,1]$ и μ, где $\mu = \rho - 2\pi n$.

По методу Фурье формальное решение задачи (7)-(9) имеет вид

$$u(x,t) = -\frac{1}{2\pi i}\int_{|\lambda|=r}(R_\lambda\varphi)cosptd\lambda - \sum_{n\geq n_0}\frac{1}{2\pi i}\int_{\tilde{\gamma}_n}(R_\lambda\varphi)cosptd\lambda,$$

где R_λ есть резольвента оператора L из (12), а $\tilde{\gamma}_n$- образ в λ- плоскости окружности $\gamma_n = \{\rho||\rho - 2\pi n\ |= \delta\}$. Для формального решения сохраняется формула (7) и представление (9), т.е. $u(x,t) = u_0(x,t) + u_1(x,t) + u_2(x,t)$.

Теорема 12.Формальное решение сходится абсолютно и равномерно по $x \in [0,1]$ и всех $t \in [-T,T]$, где $T > 0$ - любое фиксированное число.

Теорема 13. Для $u_0(x,t)$ имеет место формула

$$u_0(x,t) = \frac{1}{2}\left[\tilde{\varphi}_1(x+t) + \tilde{\varphi}_1(x-t)\right],$$

где, $\tilde{\varphi}_1(x) \in C^2(-\infty,\infty)$,нечетна, $\tilde{\varphi}_1(x) = \tilde{\varphi}_1(x+t)$, и $\tilde{\varphi}_1 = \varphi_1(x)$ при $x \in [0,1]$.

Теорема 14.Функция $u_0(x,t)$ есть классическое решение смешанной задачи

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}, \quad u(0,t) = u(1,t), \quad u'_x(0,t) = u'_x(1,t)$$
$$u(x,0) = \varphi_1(x), \quad u'_t(x,0) = 0, \quad x \in [0,1], \quad t \in (-\infty,\infty)$$

Лемма 10.Пусть $\psi(x)$ и $f(x)$ те же, что и в лемме 2, $\beta_n(\mu) = (f(x,\mu), \psi(2\pi n x))$ Тогда справедлива оценка

$$\sum_{n=n_1}^{n_2} \frac{1}{n}\left|\beta_n(\mu)\right| \leq c\sqrt{\sum_{n=n_1}^{n_2}\frac{1}{n^2}},$$

где $c > 0$ и не зависит $n_1, n_2, \mu \in \gamma_0$

Обозначим

$$b_n(x,t) = -\frac{1}{2\pi i}\int \frac{1}{\lambda - \mu_0}[w_1(x,\rho)\,(g,z_1) + w_2(x,\rho)\,(g,z_2) -$$

$$-w_1^0(x,\rho)\left(g,z_1^0\right) - w_2^0(x,\rho)\left(g,z_2^0\right)]\cos\rho t d\lambda$$

Лемма 11. Ряды

$$\sum b^{(j)}_{n,x^j}(x,t), \quad \sum b^{(j)}_{n,t^j}(x,t), \quad j = 0,1,2$$

сходятся абсолютно и равномерно по $x \in [0,1]$ и $t \in [-T,T]$ при любом фиксированном $T > 0$.

Теорема 15. Формальный ряд $u(x,t)$ задачи (7)-(9) дает классическое решение при условиях (10),(11).

Основные источники, используемые в работе

Петровский И.Г. Лекции об уравнениях с частными производными. М.: ГИТТЛ, 1953.

Смирнов В.И. Курс высшей математики. Т. 4. М.: Гостехиздат, 1953.

Ладыженская О.А. Смешанная задача для гиперболического уравнения. М.: Гостехиздат, 1953.

Ильин В.А. Избранные труды. Т. 1. М.: ООО "Макспресс", 2008.

Ильин В.А. О разрешимости смешанных задач для гиперболических и параболических уравнений // Успехи матем. наук. 1960. Т. 15. Вып. 2. С. 97–154.

Чернятин В.А. Обоснование метода Фурье в смешанной задаче для уравнений в частных производных. М.: Издательство МГУ, 1991.

М. Ш. Бурлуцкая А.П. Хромов. Резольвентный подход для волнового уравнения 2015 г.// Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 2015. Т. 55, № 2. С. 229–241.

Наймарк М.А. Линейные дифференциальные операторы 1969 г.

Заключение.В данной работе рассмотрены и подробно изложены новые подходы к обоснованию метода Фурье в смешанной задаче для однородного волнового уравнения с нулевой начальной скоростью и двумя видами граничных условий, когда концы закреплены или периодического типа.

Основными результатами работы являются теоремы о совпадении классического решения этих смешанных задач с их формальным решением по методу Фурье при минимальных условиях гладкости исходных данных. В основе этих результатов резольвентный подход в методе Фурье А.П.Хромова.