

МИНОБРНАУКИ РОССИИ
Федеральное государственное бюджетное
образовательное учреждение высшего образования
**«САРАТОВСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ИМЕНИ Н.Г. ЧЕРНЫШЕВСКОГО»**

Кафедра математической теории упругости и биомеханики

**Нестационарные безмоментные волны в вязкоупругих двухслойных
пластинах**

АВТОРЕФЕРАТ БАКАЛАВРСКОЙ РАБОТЫ

студента 4 курса 431 группы

направления 01.03.03 – Механика и математическое моделирование

механико-математического факультета

Барышева Дмитрия Андреевича

Научный руководитель
доцент кафедры МТУ и БМ,
к.ф.-м.н., доцент

подпись, дата

Н.С. Анофрикова

Зав. кафедрой
д.ф.-м.н., профессор

подпись, дата

Л.Ю. Коссович

Саратов 2024

Ведение

Большое количество материалов, используемых в строительстве и технике, обладает вязкоупругими свойствами. Поэтому проблемы теории вязкоупругости привлекают в последнее время особое внимание многих исследователей и инженеров в связи с использованием полимерных материалов в различных отраслях производства и строительной индустрии.

Вязкоупругость в механике твёрдого деформируемого тела – один из видов поведения материала под нагрузкой, при котором одновременно проявляются свойства, характерные как для упругого тела, так и для вязкой жидкости. Для описания такого поведения часто используются уравнения состояния, записанные в интегральной форме.

Исследование волновых процессов в вязкоупругой среде является весьма сложной проблемой, что связано со сложностью математической постановки трехмерных динамических задач теории вязкоупругости. Часто задача в трехмерной постановке не имеет точного аналитического решения. В связи с этим применяются различные приближенные методы и теории. Одними из распространенных аналитических методов исследования процесса распространения нестационарных волн в вязкоупругих элементах конструкций являются асимптотические методы.

Существует много работ, посвященных построению низкочастотных длинноволновых приближений трехмерных уравнений теории упругости и вязкоупругости для различного вида тонкостенных элементов конструкций. Основа методики лежит в асимптотическом интегрировании трехмерных уравнений и выводе двумерных уравнений для асимптотически главных компонент напряженно-деформированного состояния.

В настоящей работе показано применение методов, разработанных для случая упругих и вязкоупругих пластин с уравнениями состояния в дифференциальной форме, к исследованию нестационарных волновых процессов в вязкоупругих двухслойных пластинах, свойства материалов которых описаны уравнениями состояния, взятыми в интегральной форме.

Целью бакалаврской работы является применение асимптотических методов к моделированию процесса распространения нестационарных безмоментных волн в вязкоупругой двухслойной пластине.

Задачами выполняемой работы являются:

- 1) изучение различных форм представления уравнений состояния, используемых для описания вязкоупругого поведения материалов;
- 2) постановка трехмерной задачи о распространении нестационарных продольных волн в полубесконечной двухслойной вязкоупругой пластине, подверженной ударному продольному воздействию на торец;
- 3) вывод двумерных уравнений для безмоментной составляющей методом асимптотического интегрирования;
- 4) постановка и решение краевой задачи для двумерной безмоментной составляющей;
- 5) проведение анализа полученных результатов.

Структура и объём работы

Бакалаврская работа состоит из введения, четырех разделов, заключения и содержит 40 страниц. Список использованных источников включает 20 наименований.

Раздел 1. Основные модели вязкоупругого поведения.

Раздел 2. Постановка задачи о распространении нестационарных волн в вязкоупругой двухслойной пластине.

Раздел 3. Вывод низкочастотных длинноволновых тангенциальных приближений трехмерных уравнений.

Раздел 4. Решение краевой задачи для двумерной безмоментной составляющей.

Основное содержание работы

Работа посвящена исследованию процесса распространения нестационарных продольных безмоментных волн в тонкой полубесконечной двухслойной вязкоупругой пластине, подверженной ударному воздействию на ее торец, с помощью асимптотических методов.

Во введении описана актуальность поставленной задачи, проведен обзор литературы по теме работы, сформулированы цель и задачи бакалаврской работы.

Первый раздел посвящен обзору определяющих уравнений, используемых в литературе для описания вязкоупругих свойств материалов. Рассмотрены два подхода: с дифференциальной и интегральной формами определяющих уравнений.

В случае определяющих уравнений, взятых в интегральной форме, рассмотрены различные функции, описанные в научной литературе, используемые в качестве ядер интегральных операторов.

В результате для дальнейшего описания материалов слоев пластины выбраны уравнения в интегральной форме, как более гибкие для описания вязкоупругого поведения различных полимерных материалов.

Во втором разделе произведена постановка задачи о распространении нестационарных продольных волн в полубесконечной двухслойной вязкоупругой пластине, возникающих в результате приложения к торцу пластины ударного продольного воздействия тангенциального типа.

Записана система исходных трехмерных уравнений, включающая уравнения движения в напряжениях, определяющие уравнения в интегральной форме, соотношения, связывающие деформации и перемещения. В качестве ядра интегрального оператора выбрана трехпараметрическая функция Работнова Ю.Н., которая хорошо подходит для описания свойств различных полимерных материалов.

К полученной системе уравнений добавлены граничные условия на торце и лицевых поверхностях, условия на стыке слоев и начальные условия.

Граничное условие на торце задано для функции напряжения и моделирует приложение к торцу ударной продольной нагрузки тангенциального типа. Ударная нагрузка промоделирована с помощью функции Хевисайда.

Граничные условия на лицевых поверхностях соответствуют свободным от напряжения поверхностям пластины.

В качестве условий на стыке двух слоев пластины взяты условия непрерывного контакта.

Добавлены соответствующие механической постановке задачи нулевые начальные условия.

Третий раздел посвящен выводу асимптотически оптимальных уравнений для безмоментной составляющей напряженно-деформированного состояния.

Введение безразмерных переменных, безразмерных параметров материалов и асимптотик для искомых функций в уравнениях, граничных условиях на лицевых поверхностях и условиях на стыке двух слоев позволило установить с помощью метода асимптотического интегрирования зависимость исходных функций от нормальной координаты, связь между компонентами вязкоупругого состояния первого и второго слоев и получить двумерные уравнения для безмоментной составляющей в усилиях и перемещениях срединной поверхности пластины с выбранной степенью точности.

Четвертый раздел посвящен постановке и решению задачи для двухслойной пластины в случае нагрузки, симметричной относительно второй пространственной координаты.

К задаче, записанной в безразмерной форме, было применено интегральное преобразование Лапласа по переменной времени. При этом было использовано понятие свертки двух функций и теорема о свертке, согласно которой, произведение двух изображений является изображением свертки соответствующих оригиналов.

В результате был осуществлен переход от системы дифференциальных уравнений в частных производных к системе обыкновенных дифференциальных уравнений, из которых найдено общее решение для изображения перемещения в направлении продольной координаты.

Данное решение позволило получить выражение для изображения нормального продольного усилия и найти произвольную постоянную из граничного условия на торце, записанного для нормального продольного усилия, в изображениях по Лапласу.

С целью обращения полученного изображения решение было разложено в ряд по отрицательным степеням параметра интегрального преобразования Лапласа. При этом слагаемые с неотрицательными степенями параметра интегрального преобразования были оставлены в показателе степени экспоненты.

В результате почленного обращения полученного разложения с помощью таблиц интегральных преобразований Лапласа и теоремы о сдвиге был получен оригинал решения для безразмерного нормального продольного усилия, выражающийся через кратные интегралы вероятностей.

С целью проведения анализа полученного решения были построены графики приведенного значения нормального продольного усилия относительно безразмерной продольной координаты для нескольких случаев.

В первом случае сравнивалось поведение графиков для двухслойной вязкоупругой пластины, оба слоя которой выполнены из различных вязкоупругих материалов и имеют одинаковую толщину. В одной системе координат были построены графики для решения, представленного первым членом асимптотического разложения, и решения, представленного двумя первыми членами разложения. Расчеты показали, что данные кривые совпадают в пределах выбранной точности. Поэтому для дальнейших исследований можно ограничиться первым членом в разложении.

Во втором случае были построены графики для приведенного значения нормального продольного усилия относительно продольной координаты для той же пластины, но в различные моменты времени. Анализ последних показал, что в окрестности торца решение ведет себя подобно решению упругой задачи. Со временем влияние параметров вязкоупругости становится

более заметным, что приводит к сглаживанию решения в окрестности фронта по двумерной теории.

Третий случай позволил выявить влияние соотношения толщин слоев пластины, выполненной из различных вязкоупругих материалов, на поведение решения.

Для этого в одной системе координат были построены три графика:

1) график нормального продольного усилия для однослойной пластины, выполненной из материала со слабо выраженными вязкоупругими свойствами (далее – материал 2);

2) график для двухслойной пластины, в которой 0,1 толщины пластины из материала 2 заменено слоем из материала с более выраженными вязкоупругими свойствами (далее – материал 1);

3) график для двухслойной пластины, в которой 0,5 толщины пластины из материала 2 заменено слоем из материала с более выраженными вязкоупругими свойствами.

Численные расчеты показали, что для пластины, выполненной из материала 2, свойства которого близки к упругим, поведение решения является квазиупругим.

При замене однослойной пластины двухслойной, один из слоев которой представлен вязкоупругим материалом 1 с более ярко выраженными вязкоупругими свойствами, получаем численное решение, которое тем быстрее убывает в окрестности двумерного фронта с ростом времени, чем толще слой из более вязкоупругого материала.

Все сделанные выводы согласуются с физической постановкой задачи.

Заключение

При написании бакалаврской работы были изучены различные формы представления уравнений состояния, используемых для описания вязкоупругого поведения материалов.

Поставлена трехмерная задача о распространении нестационарных продольных волн в полубесконечной двухслойной вязкоупругой пластине,

подверженной ударному продольному воздействию на торец. Уравнения состояния взяты в интегральной форме. В качестве ядра интегрального оператора выбрана дробно-экспоненциальная функция Работнова.

Методом асимптотического интегрирования, основанного на малости геометрического параметра, в качестве которого взята относительная полутолщина пластины, выведены двумерные уравнения для безмоментной составляющей.

С помощью выведенных двумерных уравнений поставлена краевая задача об определении нормального продольного усилия для случая продольной нагрузки ударного типа, приложенной на торце и симметричной относительно поперечной координаты.

Решение поставленной задачи проводилось с помощью применения интегрального преобразования Лапласа по переменной времени с последующим разложением полученного изображения в ряды по отрицательным степеням параметра интегрального преобразования и почленным обращением полученного ряда.

Результаты численных расчетов в виде графиков для приведенного значения нормального продольного усилия, построенные при различных значениях параметров материалов слоев пластины и различных соотношений между толщинами слоев, позволили сделать выводы о влиянии геометрических и механических параметров материалов слоев на поведение решения.

Полученные результаты могут быть использованы для исследования процессов распространения нестационарных волн в конечных и полубесконечных вязкоупругих двухслойных пластинах.