

МИНОБРНАУКИ РОССИИ

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования

«САРАТОВСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ИМЕНИ Н.Г. ЧЕРНЫШЕВСКОГО»

Кафедра математического анализа

**Функции Хаара, Уолша и двоичные базисные сплайны
в обработке изображений**

АВТОРЕФЕРАТ МАГИСТЕРСКОЙ РАБОТЫ

студентки 2 курса 218 группы

направление **01.04.02 – Прикладная математика и информатика**

механико-математического факультета

Деревянкиной Алены Алексеевны

Научный руководитель

профессор, д.ф.-м.н., профессор _____ С.Ф.Лукомский

Заведующий кафедрой

и.о.зав.кафедрой, д.ф.-м.н. _____ П.А.Терехин

Саратов 2024

Введение. Любой сигнал, будь то звук, изображение или другая функция, почти никогда не хранится в компьютере по точкам. Это дорого и неэффективно. Сигнал раскладывается в сумму других, «базовых» функций, и хранятся его коэффициенты разложения. От того, насколько успешным будет использование в дальнейшем методов обработки речевых сигналов и изображений, во многом зависит будущее робототехники. Это имеет большое значение и для усовершенствования способов обмена информацией между человеком и ЭВМ при создании нового поколения человеко-машинных систем управления.

Обработка сигналов выполняется быстрее и проще в разреженном представлении, где информацию раскрывают несколько коэффициентов Фурье. Такие представления могут быть построены путем разложения сигналов по элементарным формам сигналов, выбранным в ортонормированной базисной области, объясненной в общем анализе Фурье. Но результаты, показываемые такими методами, иногда приводят к ошибкам из-за определенных условий. Для того чтобы избежать эти проблемы, необходимо осуществить переход к другому базису в гильбертовом пространстве, который состоял бы из локализованных функций.

Открытие ортогональных базисов вейвлетов и локальной частотно-временной основы открыло двери для огромных возможностей новых преобразований. Адаптация разреженных представлений к свойствам сигнала и получение эффективных операторов обработки, следовательно, является необходимой стратегией выживания. Ортогональный базис — это словарь минимального размера, который может дать разреженное представление, если предназначен для концентрации энергии сигнала по набору из нескольких векторов. Этот набор дает геометрическое описание сигнала.

Актуальность работы. Объем данных мультимедийного изображения после цифровой обработки очень велик. Если данные не сжаты, компьютерная система не может хранить их и обмениваться ими. Поэтому вопрос о том, как эффективно хранить и передавать данные изображения в мультимедийной системе, становится одной из самых больших проблем, с которыми сталкивается мультимедийный персональный компьютер (МРС). Сжатие данных является важным способом решения этой проблемы.

Цель работы. Целью данной работы является изучение быстрых преобразований Хаара и Уолша и дальнейшее их применение в задаче сжатия изображения. Требуется выявить наилучший из способ сжатия цветного изображения, рассматривая различные цветовые модели.

Практическая значимость работы. Предложенное решение поставленной задачи имеет прикладной характер, разработанное приложение может быть использовано по назначению с любыми изображениями формата *.jpg, *.jpeg, *.png.

Структура магистерской работы. магистерская состоит из введения, двух частей, заключения, списка литературы и приложения.

Первая часть — функции Хаара и Уолша в сжатии изображений — представляет собой девять разделов. В первом разделе описываются свойства рядов Хаара.

Во втором разделе выводятся алгоритмы прямого и обратного быстрого преобразования Хаара.

В третьем разделе описываются свойства рядов Уолша.

В четвертом разделе выводятся алгоритмы прямого и обратного быстрого преобразования Уолша.

В пятом разделе описываются особенности каждой из рассматриваемых цветовых моделей.

В шестом разделе рассматриваются блок-схемы решения задачи по сжатию изображения с применение быстрых преобразований.

В седьмом разделе описываются две основные метрики качества изображения, с помощью которых будут сделаны выводы относительно полученных результатов.

В восьмом разделе приводится программное обеспечение, необходимое для реализации приложения по сжатию изображения.

В девятом разделе приводятся результаты исследования.

Вторая часть — интерполяция двоичными базисными сплайнами на двумерной сетке — включает в себя 3 раздела. В первом из них производится построение сплайн-функций одной переменной.

Во втором разделе производится «расширение» одномерных сплайном на двумерную сетку.

В третьем разделе приводятся результаты интерполяции построенными сплайнами.

Основное содержание работы. Часть 1. Для функций вида

$$f_k^{(N)} = \lambda_k = f(\Delta_k^{(N)}), \quad t \in \Delta_k^{(N)}, \quad (1)$$

где $\Delta_k^{(N)}$ — двоичный полуинтервал ранга N , $k = 0, 1, \dots, 2^N - 1$, был осуществлен вывод формул

1. прямого быстрого преобразования Хаара при $1 \leq n \leq N$

$$\begin{aligned} \lambda_k^n &:= \frac{1}{2}(\lambda_{2k}^{n-1} + \lambda_{2k+1}^{n-1}), \\ \hat{f}(2^{N-n} + k) &:= \frac{1}{2}(\lambda_{2k}^{n-1} - \lambda_{2k+1}^{n-1}), \\ k &= 0, 1, \dots, 2^{N-n} - 1; \end{aligned} \quad (2)$$

2. обратного быстрого преобразования Хаара при $n = N, N - 1, \dots, 1$.

$$\begin{cases} \lambda_{2k}^{n-1} = \lambda_k^n + \hat{f}(2^{N-n} + k), & k = 0, 1, \dots, 2^{N-n} - 1 \\ \lambda_{2k+1}^{n-1} = \lambda_k^n - \hat{f}(2^{N-n} + k), & k = 0, 1, \dots, 2^{N-n} - 1. \end{cases} \quad (3)$$

3. прямого быстрого преобразования Уолша при $1 \leq n \leq N$

$$\begin{aligned} \lambda_k^n &:= \frac{1}{2}(\lambda_{2k}^{n-1} + \lambda_{2k+1}^{n-1}), \\ \lambda_{2^{N-n}+k} &:= \frac{1}{2}(\lambda_{2k}^{n-1} - \lambda_{2k+1}^{n-1}), \\ k &= 0, 1, \dots, 2^{N-n} - 1. \end{aligned} \quad (4)$$

4. обратного быстрого преобразования Уолша при $n = N, N - 1, \dots, 1$.

$$\begin{cases} \lambda_{2k}^{n-1} = \lambda_k^n + \lambda_{2^{N-n}+k}^n, & k = 0, 1, \dots, 2^{N-n} - 1 \\ \lambda_{2k+1}^{n-1} = \lambda_k^n - \lambda_{2^{N-n}+k}^n, & k = 0, 1, \dots, 2^{N-n} - 1. \end{cases} \quad (5)$$

Полученные преобразования были обобщены на двумерный случай: исходная матрица разбивалась на заданное количество квадратов, после чего к строкам и столбцам полученных квадратов применялись формулы (2)-(5).

В качестве цветowych моделей были рассмотрены модель RGB и YCbCr, преобразования цветowych компонент между которыми проводится по следу-

ющим формулам:

$$\begin{bmatrix} Y \\ Cb \\ Cr \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.299 & 0.587 & 0.114 \\ -0.169 & -0.331 & 0.500 \\ 0.500 & -0.419 & -0.081 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} R \\ G \\ B \end{bmatrix}; \quad (6)$$

и

$$\begin{bmatrix} R \\ G \\ B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1.402 \\ 1 & -0.344 & -0.714 \\ 1 & 1.772 & 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} Y \\ Cb \\ Cr \end{bmatrix}. \quad (7)$$

Для контроля качества изображений были введены две метрики качества — среднеквадратическая ошибка (MSE) и пиковое отношение сигнал/шум (PSNR):

$$\text{MSE} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (P_i - Q_i)^2, \quad (8)$$

$$\text{PSNR} = 20 \log_{10} \frac{\max_i |P_i|}{\text{MSE}}, \quad (9)$$

где P_i — пиксели исходного изображения, Q_i — пиксели восстановленного изображения, $1 \leq i \leq n$.

В соответствии с рисунком 1, с рисунком 2 представлено сжатое посредством БПХ изображение в палитре RGB и YCbCr соответственно, в обоих случаях процент обнуления по каждому из параметров составил 98%. В соответствии с рисунком 3, с рисунком 4 представлено сжатое посредством БПХ изображение в палитре RGB и YCbCr соответственно, в обоих случаях процент обнуления по одному из параметров составил 90%, тогда как остальные — 98%. В соответствии с рисунком 5, с рисунком 6 представлено сжатое посредством БПУ изображение в палитре RGB и YCbCr соответственно, в обоих случаях процент обнуления по одному из параметров составил 90%, тогда как остальные — 98%. Отсюда можно сделать вывод, что палитра YCbCr

наиболее лучшим образом подходит для рассматриваемой задачи, тогда как палитра RGB выдает значительно худший результат.

В соответствии с рисунком 7, с рисунком 8 представлена статистика сжатия изображения посредством БПХ и БПУ соответственно; заметим, среднеквадратичное отклонение в случае сжатием Хааром больше, чем в случае сжатия Уолшем, при этом PSNR у Уолша имеет несколько более значение, чем у Хаара. Несмотря на то, что система Уолша выполняет сжатие на 0.01 секунды дольше, чем система Хаара, качество результирующего изображения выше полученного сжатием Хаара.

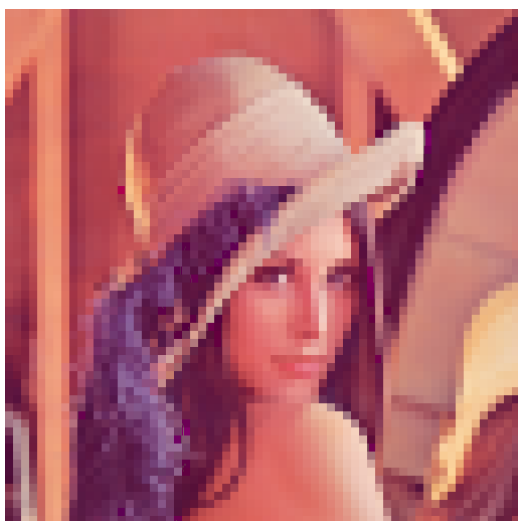


Рисунок 1 — Сжатие БПХ при процентах 98% по всем параметрам в палитре RGB

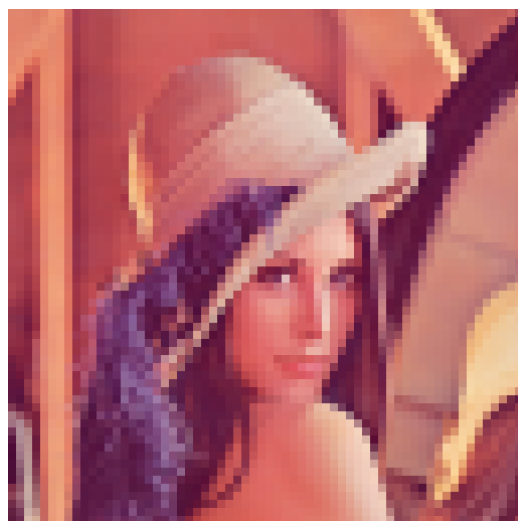


Рисунок 2 — Сжатие БПХ при процентах 98% по всем параметрам в палитре YCbCr

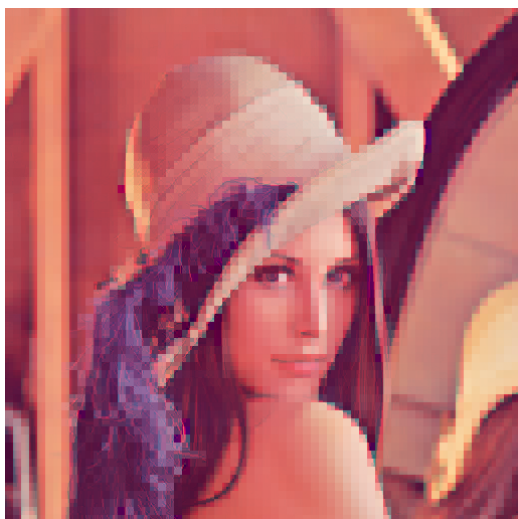


Рисунок 3 — Сжатие БПХ при 98% удалении G и B, 90% удалении R в палитре RGB

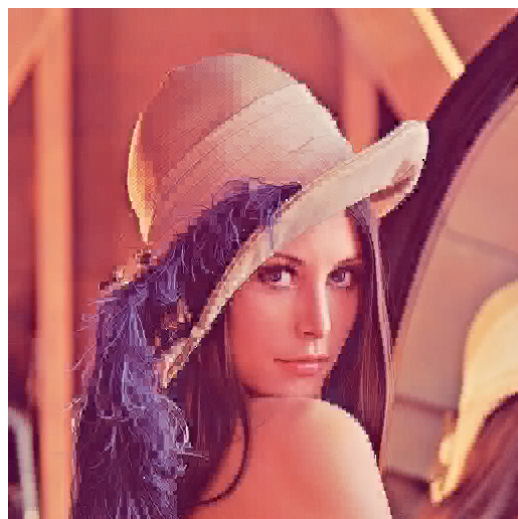


Рисунок 4 — Сжатие БПХ при 98% удалении Cb и Cr, 90% удалении Y в палитре YCbCr

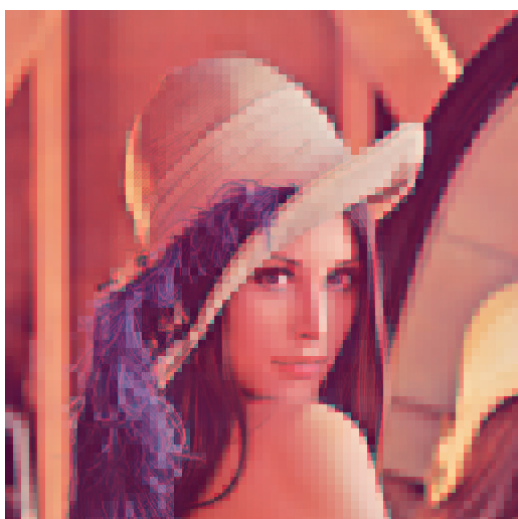


Рисунок 5 — Сжатие БПУ при 98% удалении G и B, 90% удалении R в палитре RGB

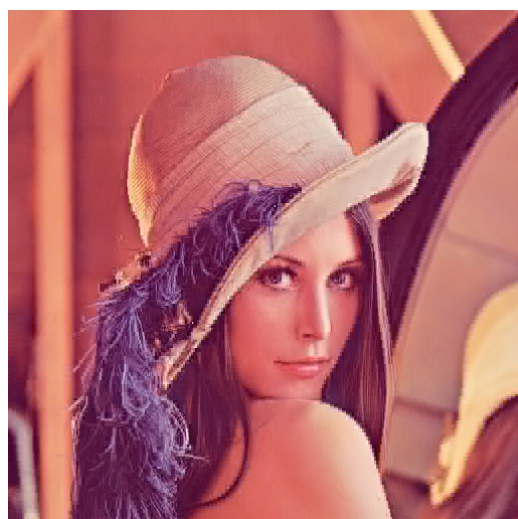


Рисунок 6 — Сжатие БПУ при 98% удалении Cb и Cr, 90% удалении Y в палитре YCbCr

MSE: B - 12.61392593383789, G - 11.135807037353516, R - 11.569390614827475
PSNR: 37.03001266167346

Рисунок 7 — Статистика БПХ при 98% удалении Cb и Cr, 90% удалении Y в палитре YCbCr

Рисунок 8 — Статистика БПУ при 98% удалении Сb и Cr, 90% удалении Y в палитре YCbCr

Основное содержание работы. Часть 2. При помощи двоичного базисного сплайна второй степени:

$$\psi(x) = \begin{cases} 8x^2, & x \in [0, \frac{1}{4}), \\ -8\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + 1, & x \in [\frac{1}{4}, \frac{3}{4}), \\ 8(x - 1)^2, & x \in [\frac{3}{4}, 1], \\ 0, & x \notin [0, 1]. \end{cases} \quad (10)$$

производилось построение интерполяционных сплайнов как на одномерной, так и на двумерной сетках. В соответствии с рисунком 9, с рисунком 10 представлены графики функций $\frac{1}{4}\psi'(x)$ и $\psi(x)$ соответственно.

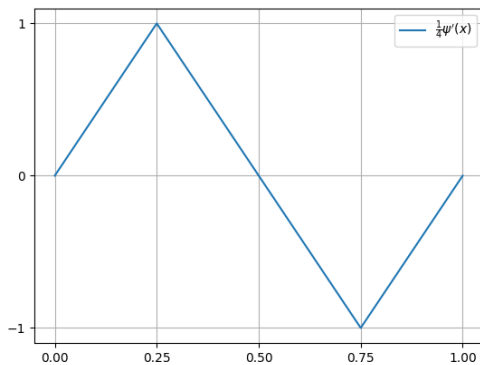


Рисунок 9 — График функции $\frac{1}{4}\psi'(x)$

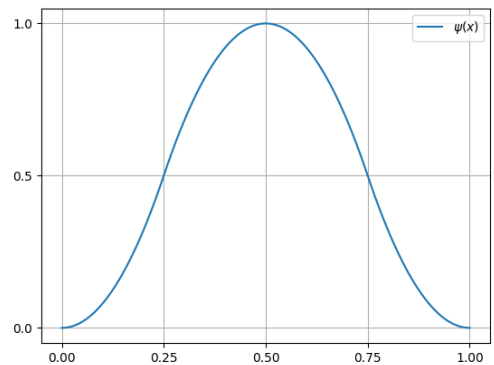


Рисунок 10 — График функции $\psi(x)$

Пусть на прямоугольнике

$$R = [a, b] \times [c, d] = \{(x, y) | a \leq x \leq b, c \leq y \leq d\}$$

задана сетка

$$\Delta = \Delta_x \times \Delta_y,$$

где

$$\begin{aligned} \Delta_x : a = x_0 < x_1 < \dots < x_{m-1} < x_m = b, \\ \Delta_y : c = y_0 < y_1 < \dots < y_{n-1} < y_n = d; \end{aligned}$$

и определена функция $z = f(x, y)$ со значениями в узлах $z_{ij} = f(x_i, y_j)$, $i = 0, 1, \dots, m, j = 0, 1, \dots, n$.

Двумерная интерполяционная сплайн функция $S(x, y)$ была построена при помощи Функции $\varphi(x) = \psi\left(x \frac{n}{2}\right)$ следующим образом:

$$S(x, y) = \sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^n z_{ij} \varphi\left(x - \frac{i-1}{m}\right) \varphi\left(y - \frac{j-1}{n}\right). \quad (11)$$

Теорема 1. Для $A = (x, y) \in R_{ij}$, где $R_{ij} = [x_{i-1}, x_i] \times [y_{j-1}, y_j]$ ($i = \overline{1, n}, j = \overline{1, m}$) справедлива оценка

$$|f(A) - S(A)| \leq 2\omega_\delta(f), \quad (12)$$

где $\delta = \sqrt{\frac{1}{n^2} + \frac{1}{m^2}}$, $B_{ij} = (x_i, y_j)$, $\omega_\delta(f) = \sup_{|A-B_{ij}| < \delta} |f(A) - f(B_{ij})|$ — модуль непрерывности функции $f(x, y)$ на R_{ij} .

Замечание 2. Сплайн-функцию $S(x, y)$ можно построить и при помощи функции $\varphi(x) = \psi\left(x \frac{n}{4}\right)$.

В качестве примера была рассмотрена задача восстановления поверхности. Пусть $(x, y) \in R = [0, 1] \times [0, 1]$ и задана сетка Δ так, что

$$\Delta = \Delta_x \times \Delta_y.$$

Определим на этой сетке функцию $z = x^2 + y^2$ со значениями в узлах $z_{ij} = x_i^2 + y_j^2$ и восстановим ее по этим значениям при помощи сплайна $S(x, y)$ в (11).

В соответствии таблицей 1 представлены входные данные; в соответствии с рисунком 11 представлены графики значений z_{ij} (график «Points»), значения сплайна $S(x, y)$ и график исходной поверхности.

		$x^2 + y^2$				
		x				
y \ x		0	0.25	0.5	0.75	1
0	0	0	1/16	4/16	9/16	1
	0.25	1/16	2/16	5/16	10/16	17/16
	0.5	4/16	5/16	8/16	13/16	20/16
	0.75	9/16	10/16	13/16	18/16	25/16
	1	1	17/16	20/16	25/16	2

Таблица 1 — Поверхность. Входные данные

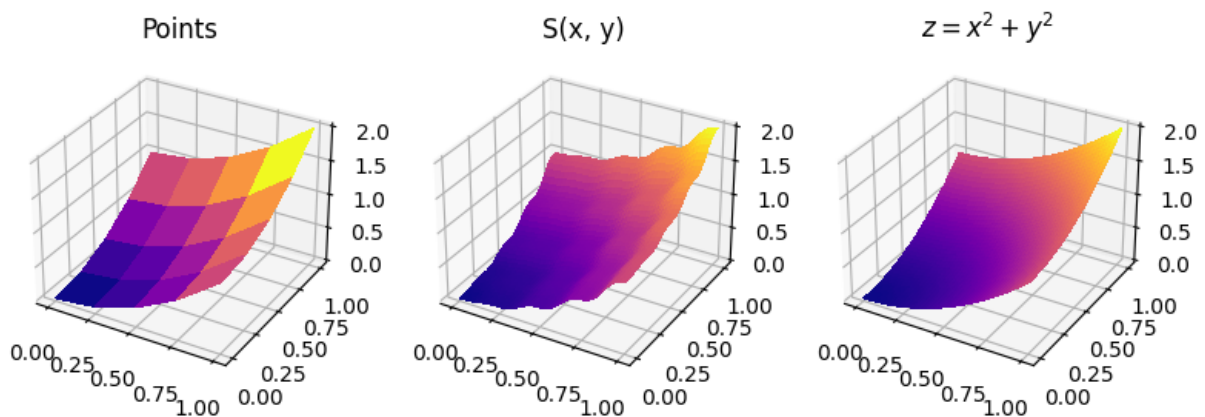


Рисунок 11 — Интерполяция поверхности сплайном $S(x, y)$

Заключение. Была разработана программа сжатия изображений с использованием функций Хаара и Уолша. Проведен сравнительный анализ результатов сжатия изображения при помощи быстрых преобразований.

В ходе решения был выявлен недостаток быстрого преобразования Хаара в задаче сжатия изображений. Быстрое преобразование Уолша показало лучший результат, несмотря на проигрыш во времени.

Также были построены двоичные базисные сплайны 2-й степени несколькими способами. В дальнейшем представляется возможным использование полученных сплайнов в задачах обработки изображений.