МИНОБРНАУКИ РОССИИ

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования

«САРАТОВСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ Н.Г.ЧЕРНЫШЕВСКОГО»

Кафедра математического анализа

Дельта последовательности

АВТОРЕФЕРАТ МАГИСТЕРСКОЙ РАБОТЫ

студента 2 курса 218 группы

направление 01.04.02 — Прикладная математика и информатика

механико-математического факультета

Калугова Никиты Игоревича

Научный руководитель
доцент, к.ф.-м.н., доцент ____________ В.Г. Тимофеев

Заведующий кафедрой
и.о. зав. кафедрой, д.ф.-м.н. ____________ П.А. Терехин

Саратов 2024

Введение. При описании физических явлений часто приходится использовать идеализированные понятия, такие как материальная точка, точечный заряд, мгновенная сила, сила, приложенная к данной точке, точечный источник, создающий некоторое поле и т.д. Такие понятия, хотя и не вполне адекватно описывают физическую реальность, поскольку всякое тело имеет определенный объем, источник – определенные размеры, а сила действует в течение некоторого промежутка времени и т.д., удобны и находят широкое применение. Оказывается, что для математического описания таких идеализированных объектов недостаточно "классических"функций. Характерной особенностью физических объектов, допускающих подобную идеализацию, является то, что физический смысл, в первую очередь, имеют не вводимые для их описания функции, а некоторые интегралы от них.

В настоящее время теория обобщенных фукнций хорошо развита, имеет многочисленные приложения в физике и математике и прочно вошла в обиход физиков, математиков и инженеров. Обобщенные функции возникли в результате обобщения свойств определенных интегралов и первоначально были введены в работах П. Дирака, посвященных проблемам квантовой теории. С математической точки зрения, обобщенные функции обладают рядом замечательных свойств, расширяющих возможности математического анализа, например, любая обобщенная функция оказывается бесконечно дифференцируемой (в обобщенном смысле), сходящиеся ряды из обобщенных функций можно почленно дифференцировать бесконечное число раз и т.д..

Дельта - функция - обобщённая функция, которая позволяет записать точечное воздействие, а также пространственную плотность физических величин (масса, заряд, интенсивность источника тепла, сила и т. п.), сосредоточенных или приложенных в одной точке. Например, плотность единичной точечной массы m , находящейся в точке a одномерного евклидова пространства $\mathbb{R}^1$, записывается с помощью δ - функции в виде $m\delta(x-a)$.Дельта-функция также применима для описания распределений заряда, массы и т. п. на поверхностях или линиях. Дельта-функция применяется в математической физике при решении задач, в которые входят сосредоточенные величины. Нельзя не отметить, что проблема изучения применений δ-функций в различных областях математики и физики имеет важное значение по сей день.

Данная работа будет посвещена дельта-функциям, дельтаобразным последовательностям и их применению при равномерном приближении заданной функции. Работа состоит из введения; двух разделов с определениями и понятиями основных и обобщеннных функций и действий над ними; и основной частью, которая состоит из 5 разделов; заключения; 2 приложений; списка используемых литературных источников, состоящего из 20 именований.

В 3 и 4 разделах мы рассмотрим определения δ-функции, δ-образных по-

Îïðåäåëåíèå. Îáîáùåííàÿ ôóíêöèÿ, íå ÿâëÿþùàÿñÿ ðåãóëÿðíîé, íàçûâàåòñÿ ñèíãóëÿðíîé.

Ñîâðåìåííîå îïðåäåëåíèå -ôóíêöèè Äèðàêà : çàäàäèì ôóíêöèîíàë : $D(R^n)$! C ñ ïîìîùüþ ôîðìóëû

$$(\ ) = \ (0) \qquad (2)$$

Äèðàê ââåë ïîíÿòèå äåëüòà-ôóíêöèè îäíîé âåùåñòâåííîé ïåðåìåííîé êàê ¾ôóíêöèè¿, äëÿ êîòîðîé âûïîëíÿþòñÿ ñëåäóþùèå ðàâåíñòâà

$$(x) = \begin{cases} +1 \ ; & \text{åñëè} x = 0; \\ 0; & \text{åñëè} x \neq 0; \end{cases}$$

$$\int_{1}^{1} (x)dx = 1$$

Ò. å. ýòà ôóíêöèÿ íå ðàâíà íóëþ òîëüêî â òî÷êå $x = 0$, ãäå îíà îáðàùàåòñÿ â áåñêîíå÷íîñòü òàêèì îáðàçîì, ÷òîáû åå èíòåãðàë ïî ëþáîé îêðåñòíîñòè $x = 0$ áûë ðàâåí 1. Ãðàôè÷åñêè åå ìîæíî ïðåäñòàâèòü ñëåäóþùèì îáðàçîì :

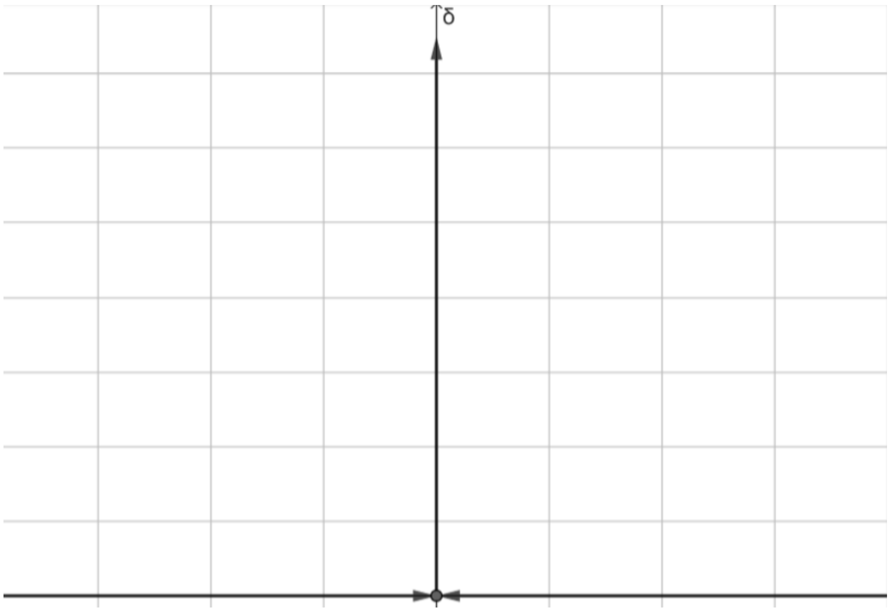

Рисунок 1 — График дельта-функции Дирака $\delta(x)$

Такое определение дельта - функции является некорректным с точки зрения математики, и мы будем смотреть на дельта - функцию как на предел дельта-образных последовательностей.

Определение. Говорят, что последовательность h_1, ..., h_k, ... вещественно-значных функций, определенных во всем пространстве $\mathbb{R}^n$, является δ-образной, если

1) для каждого $k \in \mathbb{N}$ функция $h_k : \mathbb{R}^n \to R$ интегрируема в $\mathbb{R}^n$;

2) для любых $x \in \mathbb{R}^n$ и $k \in \mathbb{N}$ справедливо неравенство $h_k \geqslant 0$;

3) для каждого $k \in \mathbb{N}$ существует положительное число ϵ_k такое, что $h_k(x) = 0$ для всех $x \in \mathbb{R}^n$ таких, что $|x| > \epsilon_k$, причем $\epsilon_k \to 0$ при $k \to +\infty$;

4) $\int\limits_{\mathbb{R}^n} h_k(x) = 1$ для всех $k \in \mathbb{N}$.

Дельта-образных последовательностей существует бесконечно много. Каждую из них можно использовать для записи точечного воздействия, сосредоточенной силы (или сосредоточенного момента), приложенной в одной точке.

Примером дельта-образной последовательности может служить следующая последовательность функций, график которой приведен на рис.7

$$h_k = \begin{cases} \frac{1}{2\epsilon_k}, \text{ если } |x| \leqslant \epsilon_k, \\ 0, \text{ если } |x| > \epsilon_k, \end{cases}$$

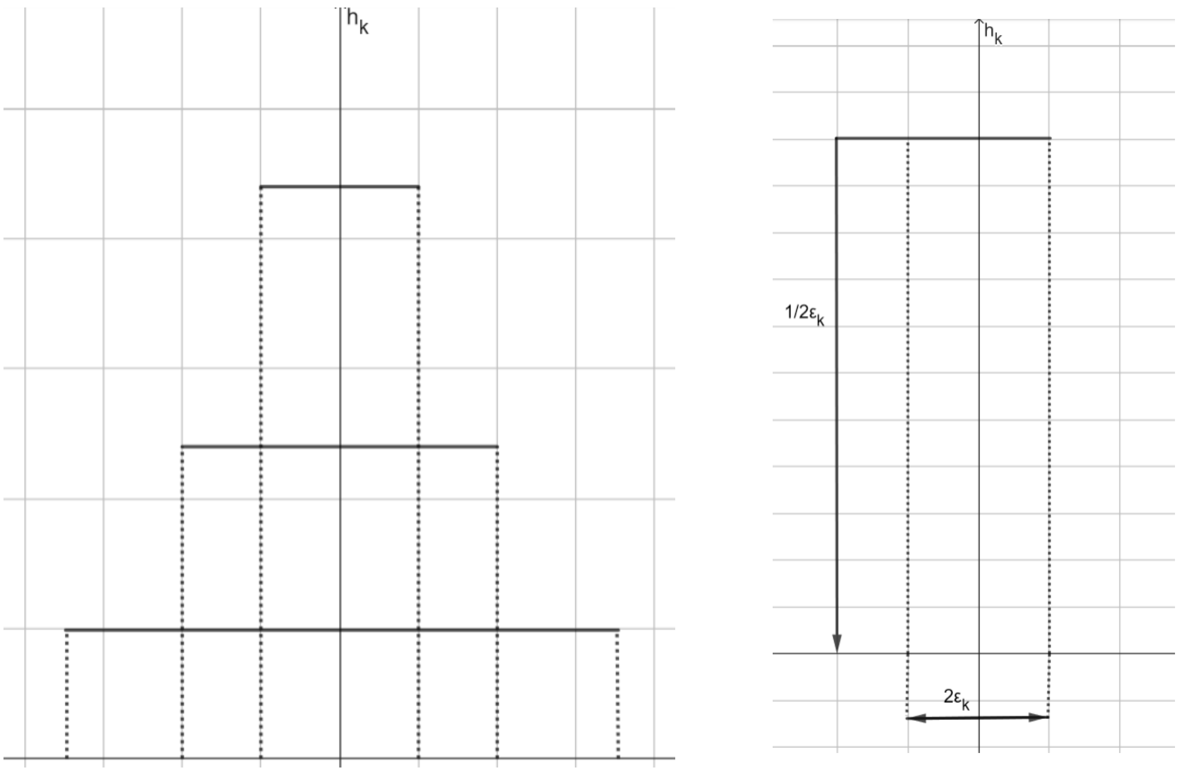

Рисунок 2 — График дельта-образной последовательности $h_k(x)$

Рассмотрим простейшие свойста δ - функции.

Свойство 1. Дельта-функция $\delta(x - x_0)$ является локальной и сосредоточенной в точке x_0, т.е.

$$\delta(x - x_0) = 0 \text{ при } x \neq x_0$$

Свойство 2. Функция $\delta(x)$ - четная, т.е.

$$\delta(x) = \delta(-x)$$

Свойство 3. Справедливо соотношение

$$(\delta(x), 1) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \delta(x) dx = 1$$

Свойство 4.

$$\int\limits_{\Delta} f(x)\delta(x - x_0) = \begin{cases} f(x_0),\ x \in \Delta \\ 0,\ x_0 \bar{\in} \Delta \end{cases}$$

Свойство 5.

$$\delta(\alpha x) = \frac{1}{|\alpha|}\delta(x)$$

Теорема. Пусть функции $D_n(x)$ интегрируемы на сегменте $[-\omega,\ \omega]$ и удовлетворяет слеующим условиям:

1) $D_n(-x) = D_n(x),\ \ D_n(x) \geq 0$;

2) последовательность $D_n(x)$ равномерно сходится к нулю при $|x| \geq \delta > 0$ для любого $\delta \leq \omega$;

3) $\int\limits_{-\omega}^{\omega} D_n(t)dt = 1$

Если функция $f(x)$ непрерывна на сегменте $[a-\omega,\ b+\omega]$, то последовательность функций

$$f_n(x) = \int\limits_{-\omega}^{\omega} f(t+x)D_n(t)dt$$

сходится равномерно на сегменте $[a,\ b]$ $(a < b)$ к функции $f(x)$.
Здесь $D_n(x) = c_n(1 - x^2/\omega^2)^n$.

Теоремы Вейерштрасса. 1. Если функция $f(x)$ непрерывна на сегменте $[a,\ b]$, то существует последовательность полиномов, равномерно сходящаяся на $[a,\ b]$ к функции $f(x)$.

2. Если функция $f(x)$ непрерывна и периодична, то существует последовательность тригонометрических полиномов с тем же пиродом равномерно сходящаяся к функции $f(x)$.

Далее в качестве примеров рассмотрим конкретные примеры приближения для функций $\sin(x)$ и e^x. В этих примерах константы c_n возьмем равными 2.

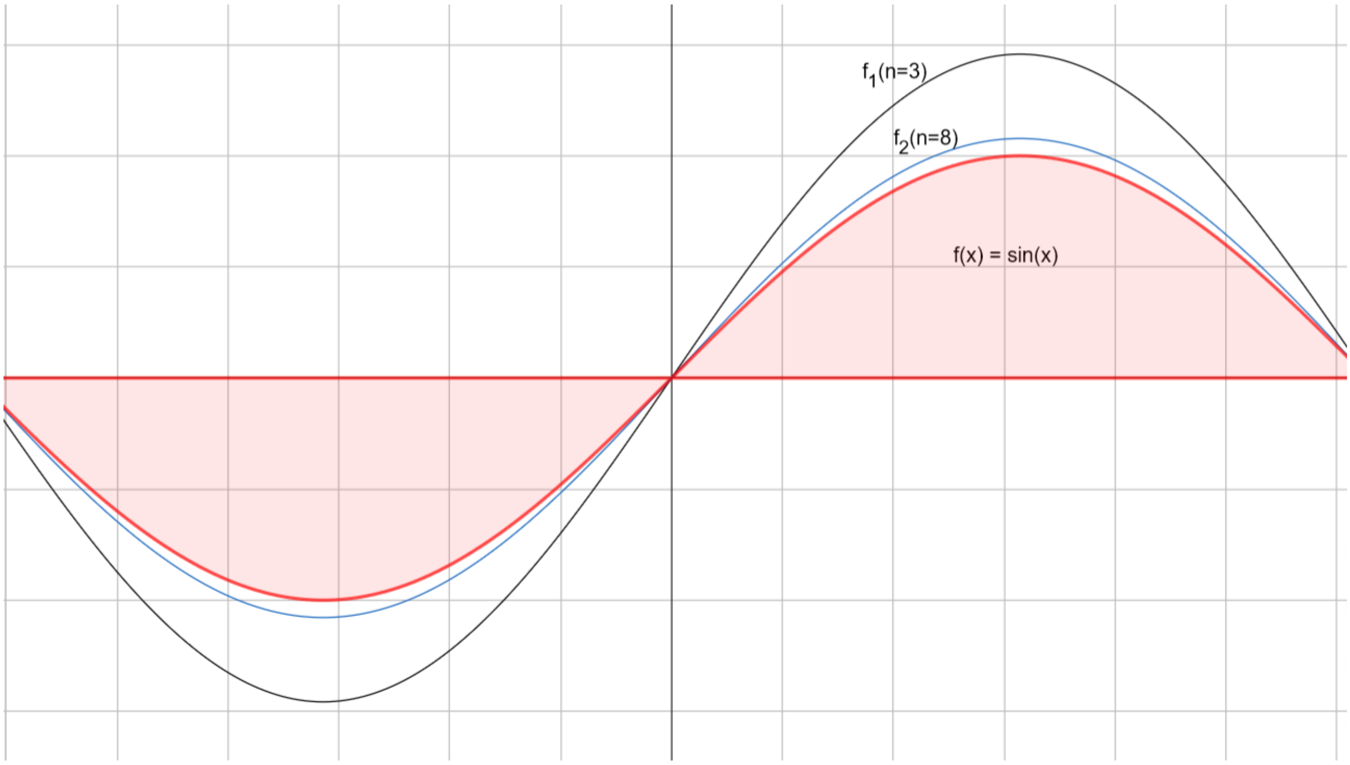

Рисунок 3 — Равномерное приближение функции $\sin(x)$. красный цвет - $\sin(x)$,черный - степень $n = 3$, синий - $n = 8$

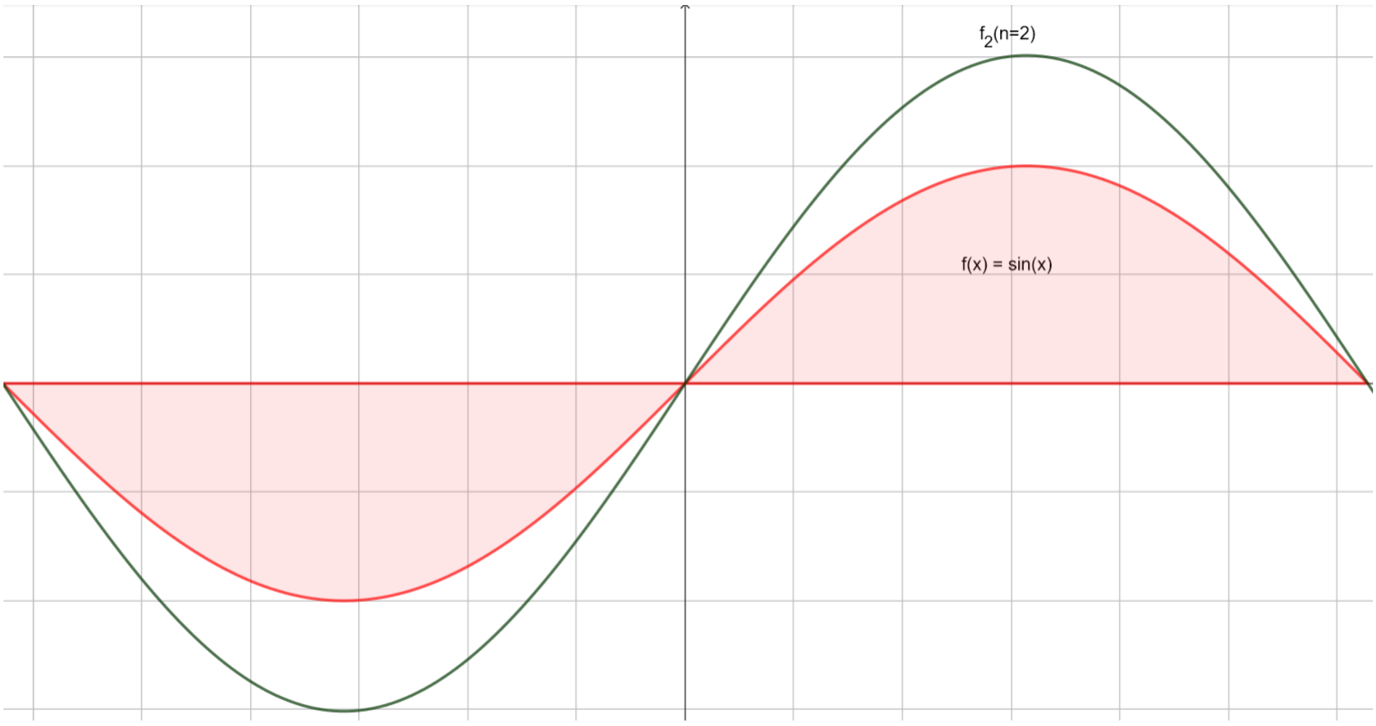

Рисунок 4

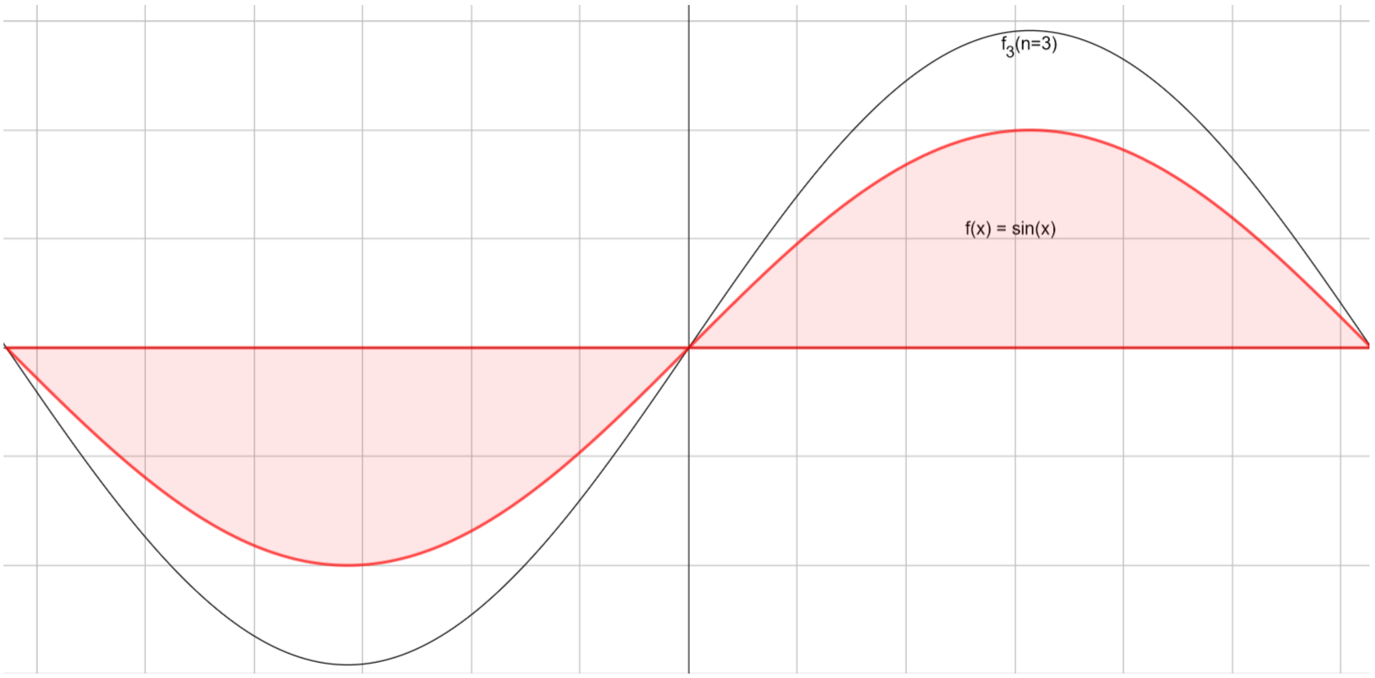

Рисунок 5

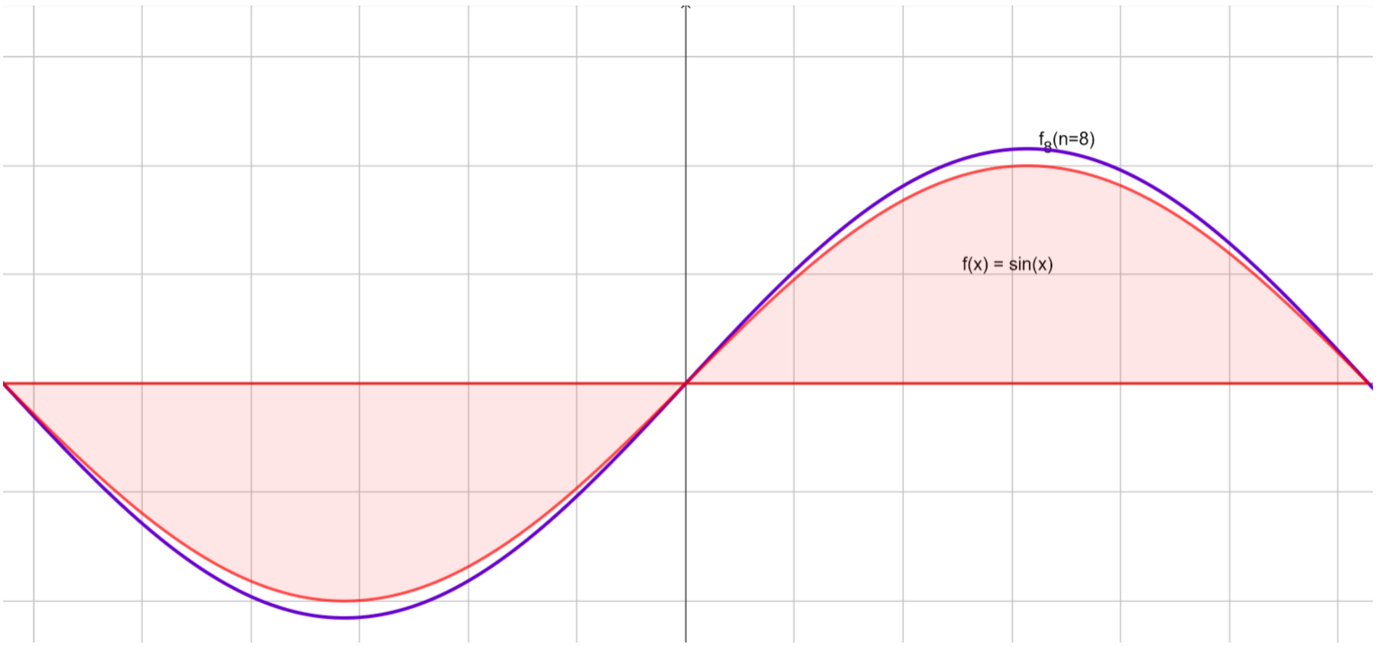

Рисунок 6

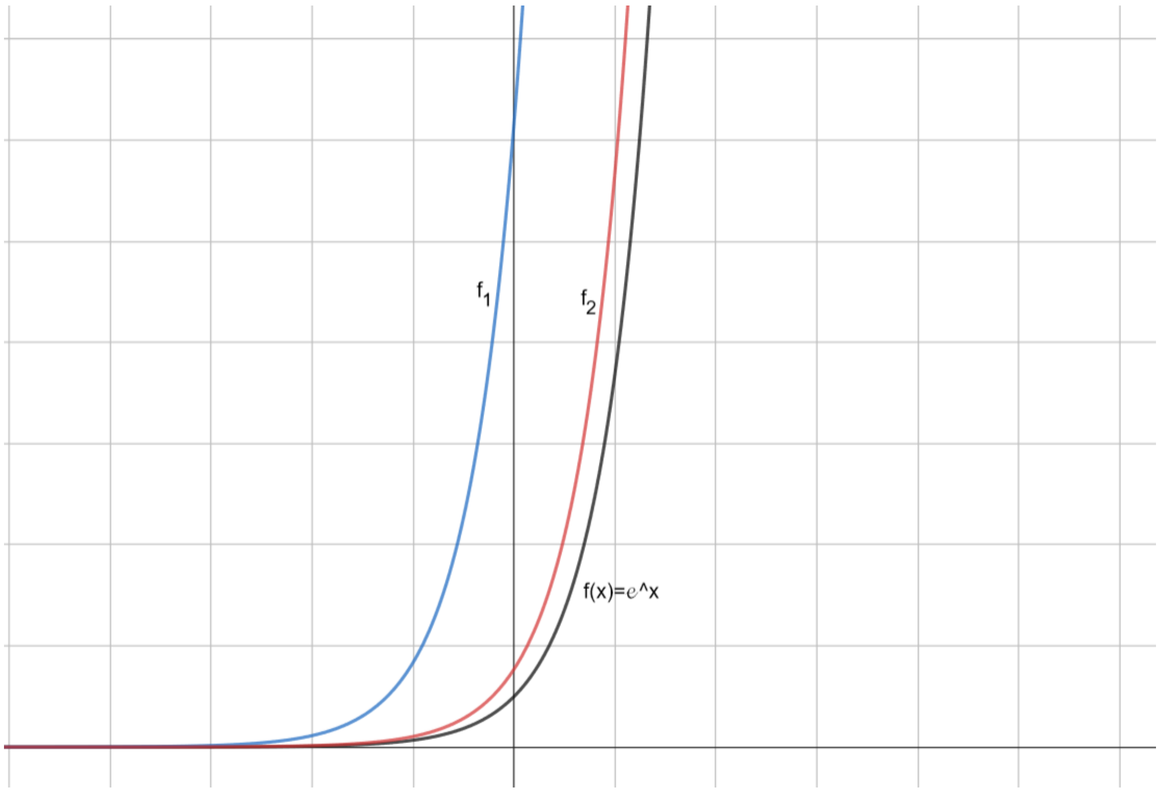

Рисунок 7 — Равномерное приближение функции e^x. черный - исходная функция e^x, синий - $n = 3$, красный - $n = 8$.

Заключение. Данная работа была посвящена изучению δ-последовательностей, для детального изучения этой темы были рассмотрены и изучены следующие аспекты :

- Понятие δ-функции и дельтаобразных последовательностей; - Свойства δ-функций; - Использование дельтаобразных последовательностей для равномерного приближения заданной функции;

На конкретных примерах было рассмотренно равномерное приближение заданной функции, как с изменением постоянных c_n и функций $D_n(x)$ меняется результат приближения.