

«САРАТОВСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ
Н.Г.ЧЕРНЫШЕВСКОГО»

Жесткие вейвлет-фреймы в обработке информации
(удаление размытости)

б

в

2

218

01.04.02

-

в

в

ММ ММ

М М

ММ М

ММ ММ

М М

О

Введение. Устранение размытия изображений — это одна из ключевых задач в области обработки изображений и компьютерного зрения. Размытие может возникать по ряду причин, таких как движение камеры, дефокусировка, атмосферные условия и т.д. В контексте цифровой фотографии, видеонаблюдения и медицинской визуализации четкие изображения имеют решающее значение для точного анализа и принятия решений. В связи с этим разработка методов устранения размытия имеет большое значение.

Настоящая работа посвящена изучению методов устранения размытия изображений с использованием жестких фреймов. Жесткие фреймы представляют собой совокупность структур, которые описывают пространственные или временные ограничения, применяемые к обработке данных.

Основное содержание работы. Магистерская работа состоит из четырех глав.

Во введении были четко обоснованы актуальность исследования, определены цели и задачи, а также описаны возможные практические приложения.

В первой главе были введены базовые определения и свойства, относящиеся к теории жестких вейвлет-фреймов.

Вторая глава была посвящена базисным сплайнам и их роли в кратномасштабном анализе. Было показано, что такая система способна формировать жесткий фрейм.

Третья глава содержала практическую реализацию алгоритма разложения по жесткому фрейму.

В четвертой главе были представлены различные инструменты и методы обработки изображений. В частности, был применен метод, использующий теорию жестких фреймов, чтобы решить проблему устранения размытия изображения, что подтверждает практическое значение проведенного исследования.

В заключении подведен итог проделанной работы, сформулированы общие выводы исследования.

Теория кратномасштабного анализа (КМА) базируется на теории функциональных пространств. Такое описание $L^2(\mathbb{R})$ через «иерархические» вло-

женные друг в друга подпространства $V_m, m \in \mathbb{Z}$:

$$\{0\} \subset V_{-2} \subset V_{-1} \subset V_0 \subset V_1 \subset V_2 \subset \dots \subset L^2(\mathbb{R}), \quad (1)$$

как можно заметить, что каждое следующее пространство «шире» предыдущего.

Для того чтобы последовательность подпространств $V_m, m \in \mathbb{Z}$ являлась ортогональным КМА, она должна удовлетворять следующим требованиям:

1. $\overline{\bigcup_{m \in \mathbb{Z}} V_m} = L^2(\mathbb{R})$, объединение всех замкнутых подпространств есть пространство $L^2(\mathbb{R})$;
2. $\bigcap_{j \in \mathbb{Z}} V_j = \{0\}$, подпространства нигде не пересекаются;
3. $\varphi \in V_m \rightarrow \varphi(2 \cdot) \in V_{m+1}$;
4. $\varphi \in V_0 \rightarrow \varphi(\cdot - n) \in V_0, n \in \mathbb{Z}$;
5. $\exists \varphi \in V_0$ такая, что семейство $\varphi_{0,n} = \varphi(\cdot - n)$ образует ортонормированный базис (ОНБ) для V_0 . Тогда φ — масштабирующая функция (scaling function).

В целях построения КМА целесообразно рассмотреть ортогональное дополнение W_m к V_m , такое что:

1. $\overline{\bigcup_{m \in \mathbb{Z}} W_m} = L^2(\mathbb{R})$, объединение всех W_m в пределе есть пространство $L^2(\mathbb{R})$;
2. $\bigcap_{m \in \mathbb{Z}} W_m = \{0\}$, подпространства W_m нигде не пересекаются;
3. $\exists W_0 \in V_1 : W_0 \perp V_0$, и $V_0 \oplus W_0 = V_1$;
4. $3. \rightarrow L_2(\mathbb{R}) = \bigoplus_{j=-\infty}^{\infty} W_j$.

Пространство W_m — вейвлет пространство. Пусть $\{\varphi_{0,n}, \psi_{0,n}\}_{n=-\infty}^{\infty}$ — образуют базис пространства V_1 , где $\{\varphi_{0,n}\}_{n=-\infty}^{\infty}$ — есть ортонормированный базис пространства V_0 , а $\{\psi_{0,n}\}_{n=-\infty}^{\infty}$ — базис W_0 в соответствии с разложением $V_0 \oplus W_0 = V_1$.

Построенная последовательность расширяющихся подпространств (1) может быть использована для того, чтобы от произвольной функции f из $L_2(\mathbb{R})$ перейти к ее достаточно точному приближению в пространстве V_j . Это делается ортогональным проектированием пространства $L_2(\mathbb{R})$ на подпространство V_j :

$$P_j : L_2(\mathbb{R}) \rightarrow V_j, P_j(f) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \langle f, \varphi_{j,n} \rangle \varphi_{j,n}(x).$$

Стоит заметить, что здесь не возникает вопроса о сходимости ряда, так как в любой точке $x \in \mathbb{R}$ сумма состоит из одного ненулевого слагаемого, поскольку промежутки, на которых функции $\phi_{j,n}(x)$ отличны от нуля, при различных n не пересекаются. Достаточно очевидно, что операторы $P_j : L_2(\mathbb{R}) \rightarrow V_j$ — линейны и непрерывны. Также стоит заметить, что для любого $j \in \mathbb{Z}$ имеет место равенство $P_j P_{j+1} = P_j$.

Далее предлагается отметить некоторые результаты, на которых будет основано дальнейшее повествование.

Определение 1.1 Пусть $\varphi \in V_1$, но $V_0 \subset V_1$, тогда функция φ — называется масштабирующей, а соответствующее ей масштабирующее уравнение записывается как:

$$\varphi(x) = 2 \sum_{k \in \mathbb{Z}} h_0[k] \varphi(2x - k), \quad (2)$$

для некоторого $h_0 \in \ell_2(\mathbb{Z})$.

Определение 1.2 Последовательность h_0 — называется маской масштабирующего уравнения.

Определение 1.3 Система $X(\Psi) \subset L_2(\mathbb{R})$ — жесткий фрейм в $L_2(\mathbb{R})$, если справедливо представление:

$$\|f\|_{L_2(\mathbb{R})}^2 = \sum_{g \in X(\Psi)} \|\langle f, g \rangle\|^2,$$

где $\langle \cdot, \cdot \rangle$ — скалярное произведение в $L_2(\mathbb{R})$:

$$\langle f_1, f_2 \rangle = \int_{\mathbb{R}} f_1 \overline{f_2} dx.$$

Определение 1.4 Система $X(\Psi) \subset L_2(\mathbb{R})$ — фрейм в $L_2(\mathbb{R})$, если для $0 < A \leq B < \infty$ справедливо представление:

$$A \|f\|_{L_2(\mathbb{R})}^2 \leq \sum_{g \in X(\Psi)} \|\langle f, g \rangle\|^2 \leq B \|f\|_{L_2(\mathbb{R})}^2,$$

где A, B — нижняя и верхняя граница фрейма соответственно.

Определение 1.5 Система $X(\Psi) \subset L_2(\mathbb{R})$ — жесткий фрейм в $L_2(\mathbb{R})$, если для $0 < A \leq B < \infty$ справедливо представление:

$$\sum_{g \in X(\Psi)} \|\langle f, g \rangle\|^2 = B \|f\|_{L_2(\mathbb{R})}^2,$$

где $A = B = 1$ — нижняя и верхняя граница фрейма соответственно.

Теорема 1.1 Система вейвлетов $X(\Psi)$ — образует жесткий фрейм в $L_2(\mathbb{R})$, тогда и только тогда, когда выполнено:

$$\sum_{\psi \in \Psi} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \|\widehat{\psi}(2^k \xi)\| = 1; \sum_{\psi \in \Psi} \sum_{k=0}^{\infty} \widehat{\psi}(2^k \xi) \overline{\widehat{\psi}(2^k(\xi + (2j+1)2\pi))} = 0, j \in \mathbb{Z}. \quad (3)$$

$X(\Psi)$ — ОНБ в $L_2(\mathbb{R})$ тогда и только тогда, когда выполнено (3) и $\|\psi\| = 1, \forall \psi \in \Psi$.

Пусть $\{V_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$ — КМА, порожденный масштабирующей функцией φ с маской h_0 . Построение системы, которая образует жесткий фрейм начинается с построения $\Psi \subset L_2(\mathbb{R})$. Целью построения жестких вейвлет-фреймов на основе КМА — является нахождение $\Psi = \{\psi_1, \dots, \psi_r\} \subset V_1$ такого, что $X(\Psi)$ образует жесткий фрейм для $L_2(\mathbb{R})$. Поскольку $V_0 \subset V_1$ порождается $\varphi(2 \cdot)$, то задача сводится к нахождению $\Psi \subset V_1$, а именно к нахождению такой маски h_ℓ :

$$\psi_\ell(x) = 2 \sum_{k \in \mathbb{Z}} h_\ell[k] \phi(2x - k). \quad (4)$$

Где h_1, \dots, h_r — называется маской вейвлетов. Преобразование Фурье (4) имеет вид:

$$\widehat{\psi}_\ell(2 \cdot) = \widehat{h}_\ell \widehat{\phi}, \quad \ell = 1, \dots, r.$$

Предложение 1.6 Рассматриваемые конструкции КМА удовлетворяют следующим требованиям:

- $\{h_l : l = 0, 1, \dots, r\} \in \ell_2(\mathbb{Z})$ и \widehat{h}_ℓ — измеримо и ограничено;
- Маска h_0 масштабирующей функции $\varphi \in L_2(\mathbb{R})$ удовлетворяет:

$$\|\widehat{h}_0(\xi) - 1\| \leq C \|\xi\|;$$

- $\sum_{k \in 2\pi\mathbb{Z}} |\hat{\phi}(\cdot + k)|^2$ — ограничена.

Теорема 1.2 Пусть $\varphi \in L_2(\mathbb{R})$ — масштабирующая функция, и h_0 — маска масштабирующей функции и $\exists \{h_1, \dots, h_r\}$. Также, если масштабирующая функция φ и $\{h_l : l = 0, 1, \dots, r\} \in \ell_2(\mathbb{Z})$ удовлетворяют предложению 1.8, то система $X(\Psi)$, где $\Psi = \{\psi_1, \dots, \psi_r\}$, определена в (4), образует жесткий фрейм в $L_2(\mathbb{R})$ при условии:

$$\sum_{\ell=0}^r |\hat{h}_\ell(\xi)|^2 = 1, \quad \sum_{\ell=0}^r \hat{h}_\ell(\xi) \overline{\hat{h}_\ell(\xi + \pi)} = 0, \quad (5)$$

выполняется почти для всех $\xi \in \sigma(V_0)$, где:

$$\sigma(V_0) := \{\xi \in \mathbb{R} : \sum_{k \in 2\pi\mathbb{Z}} |\hat{\phi}(\cdot + k)|^2 \neq 0\}. \quad (6)$$

Кроме того, при $r = 1$ и $\|\phi\|_{L_2(\mathbb{R})} = 1$, тогда $X(\Psi)$ — ОНБ в $L_2(\mathbb{R})$.

Также, маска масштабирующей функции h_0 должна удовлетворять:

$$|\hat{h}_0(\xi)|^2 + |\hat{h}_0(\xi + \pi)|^2 \leq 1. \quad (7)$$

Условия в (5) могут быть записаны в терминах последовательностей $\{h_0, h_1, \dots, h_r\}$:

$$\sum_{\ell=0}^r \sum_{k \in \mathbb{Z}} \overline{h_\ell[k]} h_\ell[k - p] = \delta_{p,0}, \quad p \in \mathbb{Z}; \quad (8)$$

$$\sum_{\ell=0}^r \sum_{k \in \mathbb{Z}} (-1)^{k-p} \overline{h_\ell[k]} h_\ell[k - p] = 0, \quad p \in \mathbb{Z}, \quad (9)$$

где $\delta_{p,0} = 1$, тогда и только тогда, когда $p = 0$ и 0 в противном случае.

Лемма 1.7. Пусть масштабирующая функция $\phi \in L_2(\mathbb{R})$, и выполняется предположение 1.8. Тогда для любой функции $f \in L_2(\mathbb{R})$ выполняется:

$$\lim_{n \rightarrow -\infty} \mathcal{P}_n f = 0.$$

Лемма 1.8. Пусть масштабирующая функция $\phi \in L_2(\mathbb{R})$ удовлетворяет предложению 1.8 и (7). Тогда для любой функции $f \in L_2(\mathbb{R})$ выполняется:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathcal{P}_n f = f.$$

Пусть В-сплайн первого порядка есть:

$$B_1(x) = \chi(x) = \begin{cases} 1, & \text{при } x \in [0, 1]; \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Далее определим сплайн B_m через свертку:

$$B_m(x) := (B_{m-1} * B_1)(x) = \int_0^1 B_{m-1}(x-t)dt, \quad m \geq 2, \quad (10)$$

где B_1 — характеристическая функция интервала $[0, 1]$.

Далее пусть:

$$\psi_l(x) = 2 \sum_{k \in \mathbb{Z}} h_l[k] \phi(2x - k),$$

где $h_0 = [\frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}]$, $h_1 = [-\frac{1}{4}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{4}]$, $h_2 = [\frac{\sqrt{2}}{4}, \frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{4}]$.

Далее объединим пересекающиеся интервалы, получим:

$$\psi_0 = \begin{cases} 1+x, & x \in [-1, -\frac{1}{2}]; \\ 1+x, & x \in [-\frac{1}{2}, 0]; \\ 1-x, & x \in [0, \frac{1}{2}]; \\ 1-x, & x \in [\frac{1}{2}, 1]; \\ 0, & \text{иначе,} \end{cases} \quad \psi_1 = \begin{cases} -1-x, & x \in [-1, -\frac{1}{2}]; \\ 1+3x, & x \in [-\frac{1}{2}, 0]; \\ 1-3x, & x \in [0, \frac{1}{2}]; \\ -1+x, & x \in [\frac{1}{2}, 1]; \\ 0, & \text{иначе,} \end{cases}$$

$$\psi_2 = \begin{cases} -\sqrt{2}(1+x), & x \in [-1, -\frac{1}{2}]; \\ \sqrt{2}x, & x \in [-\frac{1}{2}, 0]; \\ \sqrt{2}x, & x \in [0, \frac{1}{2}]; \\ \sqrt{2}(1-x), & x \in [\frac{1}{2}, 1]; \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Очевидно, выбранные последовательности $\{h_0, h_1, h_2\}$ удовлетворяют (8) - (9) и $X(\Psi)$ — жесткий фрейм.

Поскольку:

$$\mathcal{P}_L f = D^L \mathcal{P}_0 D^{-L} f,$$

то без потери общности можно использовать $\mathcal{P}_0 f \in V_0$ для приближения f . При необходимости всегда можно рассматривать функцию $f(2^{-L})$ вместо f , так как приближение функции f в пространстве V_L то же, что приближение функции $f(2^{-L})$ в пространстве V_0 .

Алгоритм. Для заданного сигнала $v \in \mathbb{R}^N$, где $N \in \mathbb{N}$ — кратное 2^L , где $L \in \mathbb{N}$. Обозначим $v_{0,0} = v$. Тогда L -уровневое быстрое разложение и восстановление задаются следующим образом:

1. *Разложение:* Для каждого $j = 1, 2, \dots, L$:

- Получить низкочастотные коэффициенты v на уровне j :

$$v_{0,j} = \downarrow (\tilde{h}_0 \circledast v_{0,j-1});$$

- Получить высокочастотные коэффициенты v на уровне j :

$$v_{\ell,j} = \downarrow (\tilde{h}_\ell \circledast v_{0,j-1}), \quad \ell = 1, 2, \dots, r.$$

2. *Восстановление:* Для каждого $j = L, L-1, \dots, 1$:

$$v_{0,j-1} = \sum_{\ell=0}^r \tilde{h}_\ell^* \circledast (\uparrow v_{\ell,j})$$

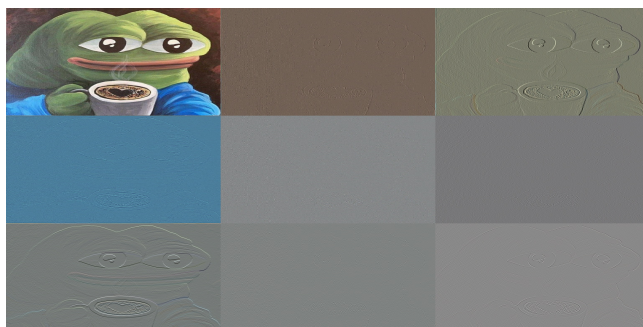


Рисунок 1 — Результат разложения.

В соответствии с рисунком 1, представлено разложение исходного изображения с фильтрами $h_0 = [\frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}]$, $h_1 = [-\frac{1}{4}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{4}]$, $h_2 = [\frac{\sqrt{2}}{4}, \frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{4}]$.

Фильтрация в частотной области заключается в модифицировании Фурье-образа изображения и последующем выполнении обратного преобразования для получения обработанного результата.

Простейшим способом восстановления является инверсная фильтрация, которая предполагает получение оценки $\hat{F}(u, v)$ Фурье-преобразования исходного изображения делением Фурье-преобразования искаженного изображения на частотное представление искажающей функции:

$$\hat{F}(u, v) = F(u, v) + \frac{N(u, v)}{H(u, v)}, \quad (11)$$

очевидно, что даже зная искажающую функцию, невозможно точно восстановить неискаженное изображение (обратное Фурье-преобразование функции $F(u, v)$), поскольку функция $N(u, v)$ неизвестна.



(a)



Рисунок 2 — Модифицированный метод Винера: а - Восстановленное изображение.

В соответствии с рисунком 2 представлен результат восстановления изображения посредством применения модифицированного метода Винера.

MSE	PSNR
R 22.6629	34.5776
G 21.1638	
B 26.8322	

Таблица 1 — Полученные ошибки для модифицированного метода Винера.

Пусть наблюдаемое изображение имеет вид:

$$y = x * k + \varepsilon,$$

тогда предлагаемая целевая функция модели устранения размытия представлена как:

$$\arg \min_{k,x} \|x \circledast k - y\|_2^2 + \gamma_1 P_x^\sigma + \gamma_2 P_k^\alpha, \quad (12)$$

где:

$$P_x^\sigma = \sigma \|x\|_0 + \|\nabla x\|_0,$$

$$P_k^\alpha = \|wk\|_0 - \alpha \|k\|_1,$$

γ_1 , γ_2 и σ — веса регуляризации, $\alpha \in [0, 1]$; w — матрица преобразования фреймлетов, удовлетворяющая условию $w^T w = I$, ∇ — оператор градиента, где $\nabla x = (\nabla_h x, \nabla_v x)^T$.

Для приближенного восстановления изображения с некоторой PSF, в соответствии с предложенной моделью, необходимо решить следующую задачу:

$$\arg \min_x \|x \circledast k - y\|_2^2 + \gamma_1 (\sigma \|x\|_0 + \|\nabla x\|_0). \quad (13)$$

Для приближения PSF в (12) необходимо решить следующую задачу:

$$\arg \min_k \|x \circledast k - y\|_2^2 + \gamma_2 (\|wk\|_0 - \alpha \|k\|_1)$$



Рисунок 3 — Восстановленное изображение: а - исходное изображение; б - Восстановленное изображение; с - Исходная PSF; d - Найденная PSF.

MSE		PSNR
R 4.345456		41.647336
G 4.282529		
B 4.426256		

Таблица 2 — Полученные ошибки для восстановленного изображения.

В соответствии с рисунком 3, представлены промежуточные значения найденной PSF.

Заключение. В настоящей работе были изучены основы теории жестких вейвлет-фреймов и их применение в области обработки данных и изображений. Проведенный анализ показал, что В-сплайны могут служить эффективной основой для создания жестких фреймов, что открывает широкие возможности для различных практических применений.

Были реализованы различные алгоритмы, в контексте обработки изображений, в частности, для решения задачи устранения размытия.

Таким образом, проделанная работа продемонстрировала практическую значимость жестких вейвлет-фреймов в области обработки изображений, а также стимулирует поиск новых способов применения теории жестких фреймов в других областях науки и техники.