МИНОБРНАУКИ РОССИИ

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«САРАТОВСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ИМЕНИ Н.Г. ЧЕРНЫШЕВСКОГО»

Кафедра математического анализа

Базисные сплайны Стремберга в вэйвлет-анализе

АВТОРЕФЕРАТ МАГИСТЕРСКОЙ РАБОТЫ

студента(ки) 2 курса 218 группы

направление **01.04.02 – Прикладная информатика и информатика**

механико-математического факультета

Витулева Арсения Михайловича

Научный руководитель

профессор к.ф.-м.н., профессор ______________ С.Ф. Лукомский

Заведующий кафедрой

И.о.зав.кафедрой, д.ф.-м.н.________________ П.А.Терехин

Саратов 2024

Введение.

Сплайн – это кусочно заданная функция, то есть совокупность нескольких функций, каждая из которых задана на каком-то множестве значений аргумента, причём эти множества попарно непересекаются.

Если рассматривать линейное пространство сплайнов, то можно говорить о базисе этого линейного пространства. Этим базисом будут называться базисные B-сплайны, построенные определенным образом. Базисные сплайны являются одним из важных инструментов в вэйвлет-анализе. Одной из главных особенностей базисных сплайнов является то, что они образуют ортонормированный базис пространства функций. Это позволяет представить любую функцию в виде линейной комбинации этих сплайнов. Этот факт позволяет уменьшить количество вычислений при построении произвольного интерполяционного сплайна, что является несомненным преимуществом. Впервые в своих работах подобные сплайны рассматривали Фергюсон, Шёнберг, Уитни и Карри.

Целью данной работы являтся изучение базисных сплайнов Стремберга, а также жестких фреймовых структур. Кроме того, одной из задач является построение жестких фреймов с использованием базисных сплайов.

Работа состоит из: введения, первой части, посвященной сплайнам, второй части, связанной с жесткими фреймами и принципом унитарного расширения и третьей практической части с вычислительным экспериментом, заключением, списком использованных источников и приложением с исходным кодом программы.

В разделе 1.1 описываются интерполяционные сплайны 1-ой и 3-ей степеней. Приводится пример, для сплайна 3-ей степени.

В разделе 1.2 говорится о базисных сплайнах, двух определениях, через свертку функций и разделенные разности, свойствах сплайна, а также приводятся основные теоремы о базисных сплайнах.

В разделе 1.3 речь идет о кратномасштабном анализе, масштабирующих функциях и масках.

В разделе 2.1 речь переходит к жестким фреймам, даются основные определения и теорема о том, когда вэйвлет будет являться жестким фреймом.

В разделе 2.2 описывается принцип унитарного расширения на прямой, приводятся некоторые допущения и 3 леммы, а также теорема о принципе унитарного расширения.

В разделе 2.3 приводится алгоритм быстрого разложения и восстановления фрейма.

В практической части (раздел 3.1), описывается алгоритм нахождения коэффицентов (масок) для разложения жестких фреймов через базисные сплайны, а также проводится вычислительный эксперимент построения жестких фреймов с использованием базисных сплайнов.

Основное содержание работы.

Типичной задачей приближения функции является **задача интерполяции**.

Дадим определение сплайну в общем виде.

Определение 1. Рассмотрим некоторый заданный отрезок $[a, b]$. Разделим этот отрезок на части $a = x_0 < x_1 < ... < x_n = b$. Сплайном степени n дефекта r называется $(n - r)$ раз непрерывно-дифференцируемая функция, которая на каждом отрезке $[x_i, x_{i+1}], \quad i = 0, ..., n - 1$ представляет собой многочлен степени не выше n. Сплайн будем обозначать как S_n^r, а отрезки вида $[x_i, x_{i+1}], \quad i = 0, ..., n - 1$, называть сеткой сплайна S_n^r.

Если задастся задачей построить n-раз непрерывно-дифференцируемый сплайн, то это может стать нетривиальной задачей. Для решения этой проблемы можно использовать базисные сплайны Стремберга.

Рассмотрим особый вид базисного сплайна или B-сплайна. Существует два способа определения базисного сплайна.

Определение 2. Ненормированным i-ым базисным сплайном $M_{i,n}(x)$, для неубывающей последовательности узлов: $x_i, x_{i+1}, \ldots, x_{i+n}$ называется разделенная разность n-го порядка от усеченной степенной функиии $\sigma_{n-1}(z, x)$:

$$M_{i,n}(x) = \sigma_{n-1}\left[x_i, x_{i+1}, \ldots, x_{i+n}\right](x).$$

Определение 3. Нормированным i-ым базисным сплайном n-го порядка $B_{i,n}(x)$ для неубывающей последовательности узлов: $x_i, x_{i+1}, \ldots, x_{i+n}$ называется разделенная разность n-го порядка от усеченной степенной функции $\sigma_{n-1}(z, x)$:

$$B_{i,n}(x) = (x_{i+n} - x_i)\,\sigma_{n-1}\left[x_i, x_{i+1}, \ldots, x_{i+n}\right](x),$$

где $(x_{i+n} - x_i)$ является нормирующим коэффициентом базисного сплайна.

Рассмотрим линейное пространство кусочно-полиномиальных функций с заданной сеткой S_k^n. Здесь $k = \{x_i, x_{i+1}, \ldots, x_{i+n}\}$, n – порядок кусочнополиномиальной функции. Очевидно, что сплайн-функция в классическом определении является кусочно-полиномиальной функцией. Здесь можно сформулировать главное свойство B-сплайнов.

Теорема 1 (Карри-Шенберга). Система функций $\{B_{i,n}\}_{n=1}^{m}$ образует базис в пространстве S_k^n. То есть:

$$S_k^n(x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n \{B_{i,n}\}_{n=1}^{m}.$$

Графики B-сплайнов первой и второй степеней представлены, в соответствии с рисунком 1.1.

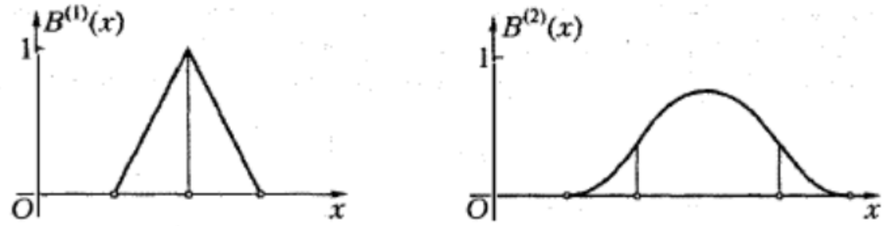

Рисунок 1.1 — Графики B-сплайнов первой и второй степеней.

Определение 4. Определим по индукции последовательность функций $B_n(x), x \in \mathbb{R}, n = 0, 1, \ldots$, следующим образом:

$$B_0(x) = \chi_{[0,1]}(x),$$

$$B_{n+1} = (B_n * B_0)(x) = \int_{\mathbb{R}} B_n(x - t) B_0(t) dt, \tag{1.1}$$

где $\chi_{[0,1]}(x)$ - характеристическая функция единичного интервала [0,1):

$$\chi_{[0,1]}(x) := \begin{cases} 1, & \text{для} \quad 0 \le x < 1 \\ 0, & \text{в других точках} \end{cases} \tag{1.2}$$

Фукнции $B_n(x)$ называются базисными сплайнами (B-сплайнами) порядка n.

Приведем теорему о свойствах базисного сплайна.

Теорема 2 (Свойства базисных сплайнов). B-сплайн n-го порядка B_n обладает следующими свойствами:

1. Для $\forall f \in C$:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) B_n(x) dx = \int_0^1 ... \int_0^1 f(x_1 + ... + x_n) dx_1 ... dx_n. \tag{1.3}$$

2. Для $\forall g \in C^n$:

$$\int_{-\infty}^{\infty} g^{(n)}(x) B_n(x) dx = \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} \binom{n}{k} g(k). \tag{1.4}$$

3. $supp \quad B_n = [0, n]$.
4. $B_n(x) > 0 \quad \text{для} \quad \forall x: \quad 0 < x < n$.
5. $\sum_{k=-\infty}^{\infty} B_n(x-k) = 1 \quad \text{для} \quad \forall x$.
6. $B_n'(x) = (\triangle B_{n-1})(x) = B_{n-1}(x) - B_{n-1}(x-1)$.
7. $B-$ сплайны $\quad B_n, B_{n-1} \quad$ связаны тождеством:

$$B_n(x) = \frac{x}{n-1} B_{n-1}(x) + \frac{n-x}{n-1} B_{n-1}(x-1). \tag{1.5}$$

Для дальнейших рассуждений необходимо вспомнить понятия кратномасштабного анализа (КМА).

Для определенной функции $\varphi \in L_2(\mathbb{R})$ возьмем подпространство $V(\varphi) \subset L_2(\mathbb{R})$, такое что:

$$V(\varphi) := \overline{span\{\varphi(\cdot - k), k \in \mathbb{Z}\}}.$$

Обозначим V_n как 2^n-расширение $V(\varphi)$, т.е.:

$$V_n := \overline{span\{\varphi(2^n \cdot -k), k \in \mathbb{Z}\}}.$$

Определение 5. Если выполнены условия (аксиомы):

$$1) V_n \subset V_{n+1};$$

$$2) \overline{\cup_{n\in Z} V_n} = L_2(\mathbb{R});$$

$$3) \cap_{n\in Z} V_n = 0,$$

то совокупность $(V_n)_{n\in\mathbf{Z}}$ называют обобщенным кратномасштабным анализом. Говорят также, что функция φ порождает обобщенный КМА.

Определение 6. Совокупность замкнутых подмножеств $(V_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ будет называться кртаномасштабным анализом (КМА), если выполняются аксиомы 1), 2), 3) в определении 1.3.1, а также следующие утверждения (аксиомы):

$$4) f(x) \in V_n \to f(2x) \in V_{n+1};$$

$$5) f(x) \in V_0 \to f(x-k) \in V_0;$$

$$6) \{\varphi(x-l)\}_{l\in\mathbb{Z}} - \text{ортонормированный базис в} \quad V_0.$$

6) аксиома также подразумевает то, что: $\exists \varphi_1(x) \in L_2(\mathbb{R}) : \{\varphi_1(x-l)\}_{l\in\mathbb{Z}} -$ базис Рисса $\quad V_0$.

$\varphi(x)$ в определении 1.3.2 называется масштабирующей функцией КМА $(V_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ и будет выглядеть как:

$$\varphi(x) = 2\sum_{k\in\mathbb{Z}} m_0[k]\varphi(2x-k), \tag{1.6}$$

где $m_0 \in l_2(\mathbb{Z})$ называется маской для функции φ.

В области Фурье данное равенство примет вид:

$$\widehat{\varphi}(\xi) = \widehat{m}_0\Big(\frac{\xi}{2}\Big)\hat{\varphi}\Big(\frac{\xi}{2}\Big), \tag{1.7}$$

где

$$\widehat{m}_0(\xi) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} m_0[k]e^{-ik\xi} \in L_2(0; 2\pi).$$

Определения 1.6, 1.7 называются масштабирующими уравнениями КМА V_n. Здесь $\widehat{\varphi}$ обозначает преобразование Фурье для φ, а $\widehat{m}_0$ обозначает ряд Фурье последовательности m_0.

В качестве примера масштабирующей функции можно взять базисные сплайны.

Для набора векторов $\Psi := \{\psi_1, ..., \psi_r\} \subset L_2(\mathbb{R})$ вэйвлет-система определяется как:

$$X(\Psi) := \{\psi_{l,n,k} : 1 \leq l \leq r; \quad n, k \in Z\},$$

где $\psi_{l,n,k} = D^n T_k \psi_l = 2^{n/2}\psi_l(2^n \cdot -k)$.

Определение 7. Система векторов $X(\Psi) \subset L_2(R)$ будет называться жестким вэйвлет-фреймом в $L_2(\mathbb{R})$, если выполняется равенство:

$$||f||^2_{L_2(\mathbb{R})} = \sum_{g\in X(\Psi)} |\langle f, g\rangle|^2,$$

для всех $f \in L_2(\mathbb{R})$, где $\langle \cdot, \cdot \rangle$ - скалярное произведение в $L_2(R)$, а $|| \cdot ||_{L_2(\mathbb{R})} = \sqrt{\langle \cdot, \cdot \rangle}$.

Запишем более общее определение для фрейма.

Определение 8. В более общем случае, система $X(\Psi) \subset L_2(\mathbb{R})$ будет называться вэйвлет-фреймом в $L_2(\mathbb{R})$, если существуют константы $0 < C_1 \leq C_2 < \infty$, такие что:

$$C_1||f||^2_{L_2(\mathbb{R})} \leq \sum_{g\in X(\Psi)} |\langle f, g\rangle|^2 \leq C_2||f||^2_{L_2(\mathbb{R})},$$

для всех $f \in L_2(\mathbb{R})$.

Как выбрать набор векторов Ψ, чтобы $X(\Psi)$ был бы жестким фреймом?

Теорема 3. Вэйвлет $X(\Psi)$ будет являться жестким фреймом тогда и только тогда, когда выполняется:

$$\sum_{\psi\in\Psi}\sum_{k\in\mathbb{Z}}|\widehat{\psi}(2^k\xi)|^2=1;\quad \sum_{\psi\in\Psi}\sum_{k=0}^{\infty}\widehat{\psi}(2^k\xi)\overline{\widehat{\psi}(2^k(\xi+(2j+1)2\pi))}=0,\quad j\in\mathbb{Z}, \tag{1.8}$$

$\xi\in\mathbb{R}$ п.в. Более того, $X(\Psi)$ будет ортонормированным базисом в $L_2(\mathbb{R})$, тогда и только тогда, когда выполняется 1.8 и $||\psi||=1$, для всех $\psi\in\Psi$.

Одним из важных принципов при построении жестких фреймов с помощью базисных сплайнов Стремберга является принцип унитарного расширения на прямой.

Пусть $\{V_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ – КМА построенный с масштабирующей функцией φ и маской m_0. Построение жестких фреймов начинается с построения $\Psi\subset L_2(\mathbb{R})$. Основная задача построения заключается в нахождении значений $\Psi=\{\psi_1,...,\psi_r\}\subset V_1$, так, чтобы $X(\Psi)$ образовывало жесткий фрейм в $L_2(\mathbb{R})$. Найти $\Psi\subset L_2(\mathbb{R})$ – это то же самое, что и найти все m_l, из слегка модифицированной формулы 1.6, запишем ее:

$$\psi_l(x)=2\sum_{k\in\mathbb{Z}}m_l[k]\varphi(2x-k), \tag{1.9}$$

m_l-маски также называются фильтрами верхних частот, маска m_0 будет называться фильтром нижних частот.

Теорема 4. (Принцип унитарного расширения).

Пусть $\varphi\in L_2(\mathbb{R})$ – масштабирующая функция с маской m_0 и $\{m_1,...,m_r\}$ – набор масок. Предположим, что масштабирующая функция $\varphi\in L_2(\mathbb{R})$ и набор масок $\{m_0,m_1,...,m_r\}$. Тогда система $X(\Psi)$, где $\Psi=\{\psi_1,...,\psi_r\}$ из формулы 1.9 образует жесткий фрейм в $L_2(\mathbb{R})$, при выполнении равенств:

$$\sum_{l=0}^{r}|\widehat{m}_l(\xi)|^2=1 \quad \text{и} \quad \sum_{l=0}^{r}\widehat{m}_l(\xi)\overline{\widehat{m}_l(\xi+\pi)}=0, \tag{1.10}$$

выполняется для п.в. $\xi\in\sigma(V_0)$, где

$$\sigma(V_0):=\{\xi\in\mathbb{R}:[\widehat{\varphi},\widehat{\varphi}](\xi)\neq 0\}.$$

Кроме того, учитывая $r = 1$ и $||\varphi||_{L_2(\mathbb{R})} = 1$, считаем, что система $X(\Psi)$ будет ортонормированным базисом в $L_2(\mathbb{R})$.

На практике принято проводить разложение функции до определенного уровня, а не до отрицательной бесконечности.

Рассмотрим B-сплайны порядка n. Соответствующая масштабирующая маска $\widehat{m}_0(\xi)$, имеет вид:

$$\widehat{m}_0(\xi) = e^{-ij\frac{\xi}{2}} \cos^{n+1}\left(\frac{\xi}{2}\right), \tag{1.11}$$

$j = 0$, когда $n + 1$ - четное и $j = 1$, когда $n + 1$ - нечетное. Вэйвлет-маски будут иметь вид:

$$\widehat{m}_{l+1}(\xi) := -i^l e^{-ij\frac{\xi}{2}} \sqrt{\binom{n+1}{l}} \sin^l\left(\frac{\xi}{2}\right) \cos^{n+1-l}\left(\frac{\xi}{2}\right), \quad l = 0, 1, 2, ..., n. \tag{1.12}$$

Очевидно, что все пункты допущения 1 выполняются. Кроме того имеем:

$$\sum_{l=0}^{n+1} |\widehat{m}_l(\xi)|^2 = \left(\cos^2\left(\frac{\xi}{2}\right) + \sin^2\left(\frac{\xi}{2}\right)\right)^{n+1} = 1$$

и

$$\sum_{l=0}^{n+1} \widehat{m}_l(\xi)\overline{\widehat{m}_l(\xi+\pi)} = e^{\frac{\pi}{2}ij}\left(\sin\left(\frac{\xi}{2}\right)\cos\left(\frac{\xi}{2}\right)\right)^{n+1}(1-1)^{n+1} = 0.$$

Следовательно, формула для n-вэйвлета имеет следующий вид:

$$\widehat{\psi}_l := -i^l e^{-ij\frac{\xi}{2}} \sqrt{\binom{n+1}{l}} \frac{\cos^{n+1-l}(\frac{\xi}{4})\sin^{n+1+l}(\frac{\xi}{4})}{(\frac{\xi}{4})^{n+1}}, \tag{1.13}$$

по которой создается жесткий фрейм в $L_2(\mathbb{R})$. При этом каждый элемент фрейма ψ_l представляет собой вещественнозначную антисимметричную функцию на отрезке $[-(n+1+j)/2, (n+1+j)/2]$.

Рассмотрим алгоритм быстрого разложения и восстановления.

Задан сигнал $\nu \in \mathbb{R}^N$, где N - целое число кратное $2^L, L \in \mathbb{N}_+$. Обозначим $\nu_{0,0} = \nu$. Тогда быстрый алгоритм разложения и восстановления фрейма порядка L будет выглядеть:

(1) Разложение: Для каждого $j = 1, 2, ..., L$ получить разрешение на низкочастотное подключение к ν на уровне j:

$$\nu_{0,j} =\downarrow (\widetilde{h}_0 \otimes \nu_{0,j-1}),$$

затем получить коэффициенты фрейма для ν на уровне j:

$$\nu_{l,j} =\downarrow (\widetilde{m}_l \otimes \nu_{0,j-1}), \quad l = 1, 2, ..., r,$$

(2) Восстановление: Для каждого $j = L, L-1, ..., 1$:

$$\nu_{0,j-1} = \sum_{l=0}^{r} \widetilde{m}_l^* \otimes (\uparrow \nu_{l,j}), \tag{1.14}$$

В качестве примера для вычислительного эксперимента, возьмем следующий пример. Для заданных $n = 0$, $n = 1$, $n = 2$, $n = 3$ необходимо графически построить базисные сплайны, а также соответствующие им жесткие фреймы, описать алгоритм построения, найти коэффициенты разложения.

Реализация алгоритма может быть выполнена на языке программирования Python. Для этого необходимо импортировать необходимые библиотеки, такие как Matplotlib – для построения графиков, а также библиотеку NumPy – для вычислений.

Построим базисный сплайн n-го порядка, где порядок, а также точки t_i, t_{i+1} задаются пользователем. Для этого воспользуемся алгоритмом де Бора:

$$b_{i,0}(t) = \begin{cases} 1, & \text{если} \quad x \in [t_i, t_{i+1}) \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$$

$$B_{i,j}(t) = \frac{x - t_i}{t_{i+j} - t_i} B_{i,j-1}(x) + \frac{t_{i+j+1} - x}{t_{i+j+1} - t_{i+1}} B_{i+1,j-1}(x), \quad j = 1, 2, ..., m.$$

Здесь задается одна точка t_i, так как шаг $h = 1$ четко задан, а значит следующая точка не нуждается в определении пользователем. График базисного сплайна 5-го порядка для $t_i = -1$ представлен в соответствии с рисунком 3.2.

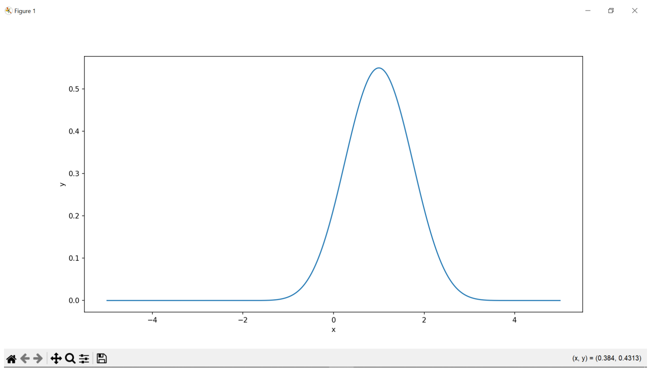

Рисунок 1.2 — Базисный сплайн 5-го (n) порядка.

Рассмотрим построение жесткий фреймов.

Возьмем $n = 2$, найдем маски m_0, m_1, m_2, m_3. Возьмем $k = -1, 0, 1, 2$. Получится: $m_0 = [\frac{1}{8}, \frac{3}{8}, \frac{3}{8}, \frac{1}{8}]$. Маска m_1 соответственно будет равна $m_1 = [-\frac{1}{8}, \frac{3}{8}, -\frac{3}{8}, \frac{1}{8}]$. Маска $m_2 = [-\frac{\sqrt{3}}{8}, \frac{\sqrt{3}}{8}, \frac{\sqrt{3}}{8}, -\frac{\sqrt{3}}{8}]$. Маска $m_3 = [-\frac{\sqrt{3}}{8}, -\frac{\sqrt{3}}{8}, \frac{\sqrt{3}}{8}, \frac{\sqrt{3}}{8}]$.

Графики полученных вэйвлетов для базисного сплайна 2 степени представлены в соответствии с рисунками 1.3, 1.4, 1.5.

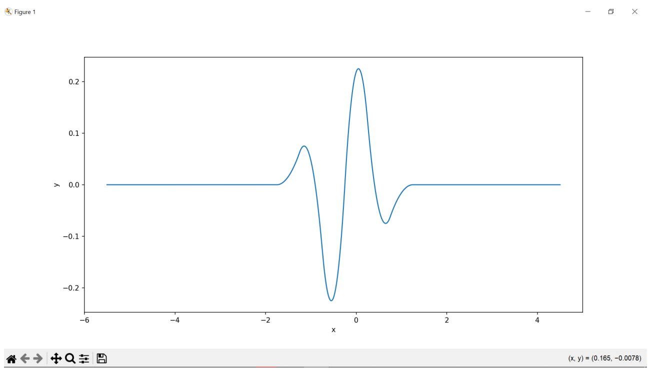

Рисунок 1.3 — Вэйвлет ψ_1 для базисного сплайна 2 степени.

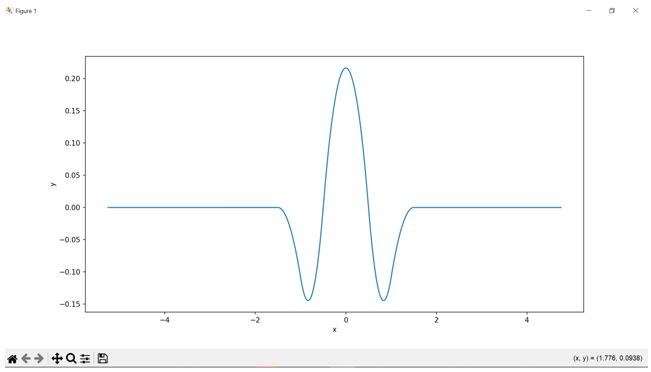

Рисунок 1.4 — Вэйвлет ψ_2 для базисного сплайна 2 степени.

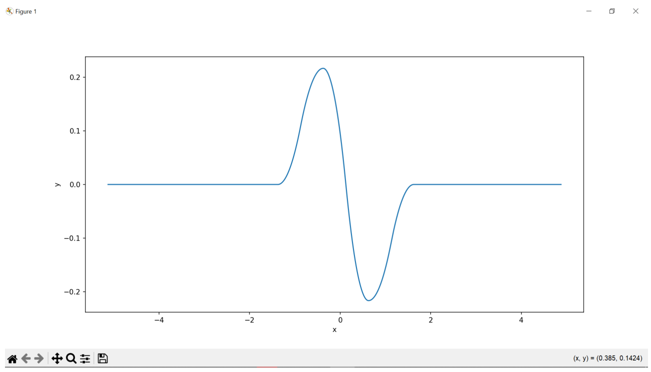

Рисунок 1.5 — Вэйвлет ψ_3 для базисного сплайна 2 степени.

Заключение. В данной работе подробно рассмотрены базисные сплайны Стремберга.

Было приведено общее понятие сплайна, а так же приведено построение кубического интерполяционного сплайна, который является одним из самых популярных сплайнов на практике.

Далее пристальное внимание было уделено базисным сплайнам. В работе были рассмотрены 2 способа построения B-сплайнов: как разделенная разность от усеченной степенной функции и как свертка функций, описаны свойства базисных сплайнов, приведены примеры 1-го и 2-го порядков.

Также расмотрены жесткие фреймы, принцип унитарного расширения на прямой и построение вэйвлетов для жестких фреймов при помощи базисных сплайнов Стремберга. Рассмотрен алгоритм быстрого разложения и восстановления.

В практической части был разобран вычислительный эксперимент построения жестких фреймов с использованием базисных сплайнов.