МИНОБРНАУКИ РОССИИ

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«САРАТОВСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ИМЕНИ Н.Г. ЧЕРНЫШЕВСКОГО»

Кафедра теории функций и стохастического анализа

Аффинные базисы и фреймы

АВТОРЕФЕРАТ МАГИСТЕРСКОЙ РАБОТЫ

студента(ки) 2 курса 218 группы

направление **01.04.02 – Прикладная информатика и информатика**

механико-математического факультета

Боровой Полины Андреевны

Научный руководитель

профессор, д.ф.-м.н., профессор ________________ П. А. Терехин

Заведующий кафедрой

доцент, д.ф.-м.н.________________ С. П. Сидоров

Саратов 2024

Введение. Аффинные системы функций, образующие класс всплескоподобных систем и тесно связанные с представлением аффинной группы евклидова пространства, активно изучаются в последние десятилетия в работах зарубежных и отечественных математиков.

Аффинные системы функций представляют собой важный специальный класс функциональных систем, удобный и показательный для отработки различных методов и подходов к решению общей задачи о представлении функций рядами. В то же время, аффинные системы находят многочисленные применения в различных областях математики (вычислительная математика, дифференциальные уравнения, функциональный анализ), а также в прикладных задачах обработки, хранения и передачи информации, сжатии изображений и теории сигналов.

Задача аффинного синтеза тесно связана с теорией фреймов. В настоящее время безусловно актуальными представляются следующие задачи: развитие методов и подходов общей теории фреймов в банаховом пространстве, выяснение их роли в вопросах представления функций рядами и получение на этой основе конкретных решений задачи аффинного синтеза в классических функциональных пространствах.

В работе рассматриваются аффинные системы функций (системы двоичных сжатий и целочисленных сдвигов функции).

Цели работы:

1) дать основные определения, в частности, определения аффинной системы функций и дуальной функции;

2) сформулировать и доказать основные теоремы;

3) рассмотреть алгоритм нахождения коэффициентов биортогонального ряда;

4) составить алгоритмы вычисления коэффициентов;

5) реализовать программу вычисления коэффициентов.

Задачи:

1) изучение понятия базиса и фрейма, а также их видов;

2) рассмотрение простейших примеров;

3) изучение основных необходимых понятий для изучения алгоритмов разложения;

4) составление алгоритмов вычисления коэффициентов биортогонального ряда и дуальной функции.

Структура магистерской работы. Магистерская работа состоит из введения, шести глав, заключения, списка использованных источников и приложений.

В первой главе работы строится определение фреймов в банаховом пространстве, рассматривается теорема о представлении.

Во второй главе работы изучаются аффинные базисы рисса, основные определения и теоремы, необходимые для работы с аффинными системами.

В третьей главе разбираются примеры базисов, приведенных в предыдущей главе.

В четвертой главе изучаются основные понятия, необходимые для рассмотрения линейных алгоритмов разложения по фрейму.

В пятой главе рассматриваются линейные алгоритмы разложения по фрейму.

В шестой главе данной работы проиллюстрирована и охарактеризована практическая часть.

Наконец, в Приложениях приводится код программы, написанный на языке Python.

Основное содержание работы. Пусть X - банахово пространство, состоящее из числовых последовательностей $x = \{x_n\}_{n=1}^{\infty}$. Всюду в дальнейшем будем предполагать, что пространство последовательностей X удовлетворяет следующему основному требованию: система канонических ортов $\{\varepsilon_n\}_{n=1}^{\infty}$ образует базис в X.

Пространство последовательностей X, удовлетворяющее основному требованию, будем называть модельным пространством, а базис $\{\varepsilon_n\}_{n=1}^{\infty}$ будем называть естествениым базисом модельного пространства X.

Пусть F - некоторое банахово пространство и $G = F^*$ - сопряженное пространство к пространству F. Пусть, далсе, $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty} \subset F\backslash\{0\}-$ система пенулевых элементов пространства F.

Определение 1. *Скажем, что система $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$ является фреймом в банаховом пространстве F относительно модельного пространства X, если существуют положительные постоянные $A, B > 0$ такие, что для лю-*

бого непрерывного линейного функционала $g \in G$ последовательность его коэффициентов Фурье $\{(g, \varphi_n)\}_{n=1}^{\infty}$ удовлетворяет неравенствам

$$A\|g\|_G \leq \|\{(g, \varphi_n)\}\|_Y \leq B\|g\|_G. \tag{1.1}$$

Теорема 1 (о представлении). *Пусть $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$ - фрейм в банаховом пространстве F относительно модельного пространства X. Тогда для любого вектора $f \in F$ найдется числовая последовательность $x = \{x_n\}_{n=1}^{\infty} \in X$ такая, что справедливо представление*

$$f = \sum_{n=1}^{\infty} x_n \varphi_n.$$

Теорема 2. *Пусть $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$ - фрейм в банаховом пространстве F относительно модельного пространства X. Тогда для существования линейного алгоритма разложения по фрейму $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$ необходимо и достаточно, чтобы этот фрейм являлся проекционным.*

Определение 2. *Система элементов $\{\varphi_n\}_{n=0}^{\infty}$ гильбертова пространства H называется базисом Рисса (или базисом, эквивалентным ортонормированному), если существуют ортонормированный базис $\{e_n\}_{n=0}^{\infty}$ пространства H и обратимый линейный ограниченный оператор $A : H \to H$ такие, что $Ae_n = \varphi_n$, $n = 0, 1, \ldots$*

Пусть функция $\varphi(t), t \in \mathbb{R}$, имеет носитель $\operatorname{supp} \varphi \subset [0, 1]$. Предположим, что $\varphi \in L^2[0, 1]$ и

$$\int_0^1 \varphi(t)dt = 0$$

В противном случае система $\{\varphi_n\}_{n=n_0}^{\infty}$ полна в пространстве $L^2[0, 1]$ при любом $n_0 = 0, 1, \ldots$ и базисом быть не может.

Рассмотрим ряд Фурье-Хаара порождающей функции,

$$\varphi = \sum_{n=1}^{\infty} x_n \chi_n$$

где $x_n = (\varphi, \chi_n) = \int_0^1 \varphi(t)\chi_n(t)dt-$ коэффициенты Фурье-Хаара. Нормируем первый коэффициент условием

$$x_1 = \int_0^{1/2} \varphi(t)dt - \int_{1/2}^1 \varphi(t)dt = 1$$

$$\sum_{\nu=0}^{k} x\left(\alpha_1, \ldots, \alpha_\nu\right) y\left(\alpha_{\nu+1}, \ldots, \alpha_k\right) = 0, \quad k \geqslant 1.$$

Определение 3. *Формальный ряд по системе Хаара*

$$\varphi^d \sim \sum_{n=1}^{\infty} y_n \chi_n$$

назовем дуальной функцией к порождающей функции φ.

Определение 4. *Говорят, что ряд Фурье-Хаара*

$$f = \sum_{n=0}^{\infty} \left(f, \chi_n\right) \chi_n$$

функции $f \in L^2[0,1]$ *абсолютно сходится по пачкам, если конечна величина*

$$\|f\|_* = |(f, \chi_0)| + \sum_{k=0}^{\infty} \left(\sum_{n=2^k}^{2^{k+1}-1} |(f, \chi_n)|^2 \right)^{1/2} < \infty.$$

Теорема 3. *Пусть порождающая функция* φ *и дуальная функция* φ^d *обе принадлежат классу* L_2^*. *Тогда аффинная система* $\{\varphi_n\}_{n=0}^{\infty}$ *образует базис Рисса.*

Таким образом, базисные свойства аффинной системы тесно связаны со свойствами дуальной функции, коэффициенты формального ряда по системе Хаара которой вычисляются с помощью простых рекуррентных соотношений, определяемых некоммутативной сверткой на двоичном дереве (или свободной полугруппе с двумя образующими).

Теорема 4. *Для того чтобы аффиняая система $\{\varphi_n\}_{n=0}^{\infty}$ была базисом Рисса, необходиио и достаточно, чтобы обе аффинные системы $\{\varphi_n\}_{n=0}^{\infty}$ и $\{\varphi_n^d\}_{n=0}^{\infty}$ являлись системами Бесселя.*

Лемма 1. *При $0 < r < r_0$ Функция*

$$\varphi_r^d = \sum_{k=0}^{\infty} r^k \sum_{|\alpha|=k} y_a \chi_a$$

имеет абсолютно сходящийся по пачкам ряд Фурье-Хаара. В частности, если $\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k < 1$, то дуальная функция φ^d имеет абсолютно сходящийся по пачкам ряд Фуррье-Хаара.

Теорема 5. *Если порождающая функция φ удовлетворяет услобию*

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left(\sum_{n=2^k}^{2^{k+1}-1} |(\varphi, \chi_n)|^2 \right)^{1/2} < |(\varphi, \chi_1)|,$$

то аффинная система $\{\varphi_n\}_{n=0}^{\infty}$ является базисом Рисса.

Доказательство. Без ограничения общности полагаем, что $(\varphi, \chi) = 1$. По условию $\varphi \in L^2$ по лемме также $\varphi^d \in L^2$. Осталось применить теорему 1. □

Пример 1. Для функции $\varphi(t) = 1 - 2t, 0 \leqslant t \leqslant 1$, имеем

$$\varphi = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{r_k}{2^{k+1}}$$

Поэтому $\Phi(z) = 1/(2 - z)$ и аффинная система $\{\varphi_n\}_{n=0}^{\infty}$ является бесселевой.

Этот пример уникален в том смысле, что $1 - 2t$ - единственная (с точностью до постоянного множителя) непрерывная на $(0, 1)$ функция, представимая в виде суммы ряда по системе Радемахера. Пример 1 допускает следующее обобщение: для всякой существенно ограниченной порождающей функции $\varphi \in L^{\infty}[0, 1]$, представимой суммой ряда по системе Радемахера

$$\varphi = \sum_{k=0}^{\infty} a_k r_k$$

аффинная система $\{\varphi_n\}_{n=0}^{\infty}$ является бесселевой.

Пример 2. Функция $\Phi(z) = (1 - az)^{\alpha}, |a| < 1, \alpha \in \mathbb{R}$, является обратимым элементом банаховой алгебры H^{∞}. Следовательно, соответствующая аффинная система $\{\varphi_n\}_{n=0}^{\infty}$ образует базис Рисса.

Заметим, что пример 2 обобщает пример 1 и функция $\varphi(t) = 1-2t, 0 \leqslant t \leqslant 1$, порождает аффинный базис Рисса.

Определение 5. *Семейство функций $\{\psi_{j,k}\}_{j\in\mathbb{N},k\in\mathbb{Z}^d}$ называется аффинной системой, порожденной функцией ψ.*

Определение 6. *Пусть H - гильбертово пространство и $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty} \subset H\backslash\{0\}$ - система ненулевых элементов пространства H. Спстема $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$ называется фреймом, если существуют положительные постоянные $A, B > 0$ такие, что для любого вектора $h \in H$ выполняются неравенства*

$$A\|h\|^2 \leq \sum_{n=1}^{\infty} |(h, \varphi_n)|^2 \leq B\|h\|^2$$

Одним из основных свойств фреймов является следующая теорема о представлении.

Теорема 6. *Для любого вектора $h \in H$ существует числовая последовательность $\{c_n\}_{n=1}^{\infty} \in l_2$ такая, что*

$$h = \sum_{n=1}^{\infty} c_n\varphi_n$$

Определение 7. *Пространство последовательностей X, удовлетворяющее основному требованию, будем называть модельным пространством, а базис $\{\varepsilon_n\}_{n=1}^{\infty}$ будем называть естественным базисом модельного пространства X.*

Теорема 7 (о представлении). *Пусть $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$ – фрейм в банаховом пространстве F относительно модельного пространства X. Тогда для любого вектора $f \in F$ найдется числовая последовательность $x = \{x_n\}_{n=1}^{\infty} \in X$*

такая, что справедливо представление

$$f = \sum_{n=1}^{\infty} x_n \varphi_n$$

Определение 8. *Пусть $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$ – фрейм в банаховом пространстве F относительно модельного пространства X. Обозначим*

$$N = \left\{ \{x_n\}_{n=1}^{\infty} \in X : \sum_{n=1}^{\infty} x_n \varphi_n = 0 \right\}$$

- пространство коэффициентов нуль-рядов фрейма $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$.

Определение 9. *Синтезирующим оператором (или оператором синтеза) называется линейный оператор $S : X \to F$, заданный равенствами*

$$S\varepsilon_n = \varphi_n, \quad n = 1, 2, \ldots$$

Определение 10. *Анализирующим оператором (или оператором анализа) называется линейный оператор $R : G \to Y$, заданный равенством*

$$Rg = \{(g, \varphi_n)\}_{n=1}^{\infty}$$

Лемма 2. *Синтезирующий оператор $S : X \to F$ - ограниченный.*

Лемма 3. *Пусть E_1, E_2 - банаховы пространства и $L : E_1 \to E_2$ - ограниченный линейный оператор. Тогда оператор L является сюръекцией в том и только том случае, когда сопряженный оператор $L^* : E_2^* \to E_1^*$ является инъекцией*

$$\|L^* x\|_{E_1^*} \geq \gamma \|x\|_{E_2^*}, \quad \gamma > 0.$$

Пусть $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$ - фрейм в банаховом пространстве F относительно модельного пространства X.

Скажем, что имеет место линейный алгоритм разложения по фрейму $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$, если существует система $\{\widetilde{\varphi}_n\}_{n=1}^{\infty} \subset G$ непрерывных линейных функционалов на пространстве F такая, что для любого вектора $f \in F$ числовая последовательность $\{(f, \widetilde{\varphi}_n)\}_{n=1}^{\infty}$ принадлежит пространству X и справедливо представление

$$f = \sum_{n=1}^{\infty} (f, \widetilde{\varphi}_n) \, \varphi_n$$

Для фреймов Даффина - Шеффера в гильбертовом пространстве всегда имеет место линейный алгоритм.

Лемма 4. *Пусть $L : E_1 \to E_2$ - ограниченный линейный оператор, отображающий банахово пространство E_1 на банахово пространство E_2. Тогда следующие условия эквивалентны:*

1. *оператор L является ретракцией;*
2. *оператор L является проекцией изоморфизма;*
3. *ядро $\mathrm{Ker}(L)$ дополняемо в пространстве E_1.*

Лемма 5. *Для существования линейного алгоритма разложения по фрейму $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$ в банаховом пространстве F относительно модельного пространства X необходимо и достаточно, чтобы синтезирующий оператор $S : X \to F$ был ретракцией.*

Лемма 6. *Пусть $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$ – фрейм в банаховом пространстве F относительно модельного пространства X. Тогда для существования линейного алгоритма разложения по фрейму $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$ необходимо и достаточно, чтобы этот фрейм являлся проекционным.*

Определение 11. *Системой Хаара называется система функций $\{\chi_n\}_{n=0}^{\infty}$, которая состоит из функции $\chi_0(x) \equiv 1$ тождественно равной единицы, на отрезке $[0, 1]$, и функций*

$$\chi_n(x) = \begin{cases} 2^{k/2}, & \text{при } x \in \left[2^{-k}j, 2^{-k}\left(j + \frac{1}{2}\right)\right] \\ -2^{k/2}, & \text{при } x \in \left[2^{-k}\left(j + \frac{1}{2}\right), 2^{-k}(j+1)\right] \\ 0, & \text{при } x \notin \left[2^{-k}, 2^{-k}(j+1)\right] \end{cases}$$

где $n = 2^k + i$ - стандартное представление.

Определение 12. *Дуальной функцией к порождающей функции φ аффин-*

ной системы $\{\varphi_n\}_{n=0}^{\infty}$ *будем называть формальный ряд по системе Хаара*

$$\varphi^d \sim \sum_{n=1}^{\infty} y_n \chi_n = \sum_{\alpha \in \mathbb{A}} y_\alpha \chi_\alpha$$

где последовательность $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ *коэффициентов формального ряда, определяющего дуальную функцию* φ^d*, связана с последовательностью* $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ *коэффициентов ряда Фурье-Хаара порождающей функции* φ *соответствующими рекуррентными соотношениями.*

Для нахождения коэффициентов биортогонально сопряженной функции в пространстве $L^1[0,1]$, составим следующий алгоритм:

1. Получим значения $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}, n = 1, \ldots, 2^{N-1}$, которые вычисляются по следующим формулам:

$$x_0 = \int_0^1 \psi(t)dt = 1, \quad x_n = \int_{2^{-k}j}^{2^{-k}(j+1/2)} \psi(t)dt - \int_{2^{-k}(j+1/2)}^{2^{-k}(j+1)} \psi(t)dt$$

где $n = 2k + j$ - стандартное представление числа $n \in \mathbb{N}$.

2. Установим естественное взаимно однозначное соответствие между множеством натуральных чисел $\mathbb{N}$ и множеством $\mathbb{A}$, при котором каждому натуральному числу $n \in \mathbb{N}$ соответствует мультииндекс $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_k) \in \mathbb{A}$, где $n = 2^k + j-$ стандартное представление и $j = \sum_{\nu=1}^{k} \alpha_\nu 2^{k-\nu}-$ двоичное разложение;

3. По числовой последовательности $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}, n = 1, \ldots, 2^{N-1}$ создадим новую числовую последовательность $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}, n = 1, \ldots, 2^{N-1}$ следующим образом. Для определения y_n воспользуемся заменой индекса, основанной на взаимно однозначном соответствии между $\mathbb{N}$ и $\mathbb{A}$;

4. Зная, что при $\nu = 0$ и $\nu = k$ один из мультииндексов при x или y пустой, обозначим $x(\oslash) = x_1 = 1$ и $y(\oslash) = y_1 = 1$;

5. Рекуррентные соотношения запишем в виде

$$y\left(\alpha_1,\ldots,\alpha_k\right)=-x\left(\alpha_1,\ldots,\alpha_k\right)-\frac{1}{2}\sum_{\nu=1}^{k}x\left(\alpha_1,\ldots,\alpha_{\nu-1}\right)y\left(\alpha_{\nu+1},\ldots,\alpha_k\right)$$

6. Вычислим $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}, n=1,\ldots,2^{N-1}$ из получившегося рекуррентного соотношения.

Для нахождения коэффициентов дуальной функции, воспользуемся следующим алгоритмом:

1. Получим значения $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}, n=1,\ldots,2^{N-1}$, где

$$x_n=(\varphi,\chi_n)=\int_0^1\varphi(t)\chi_n(t)dt$$

- коэффициенты Фурье-Хаара.

Нормируем первый коэффициент условием

$$x_1=\int_0^{1/2}\varphi(t)dt-\int_{1/2}^1\varphi(t)dt=1$$

Заметим, что если $x_1=0$, то аффинная система $\{\varphi_n\}_{n=0}^{\infty}$ заведомо будет неполной, поскольку функция Хаара χ оказывается ортогональной всем функциям этой системы

2. Установим естественное взаимно однозначное соответствие между множеством натуральных чисел $\mathbb{N}$ и множеством $\mathbb{A}$, при котором каждому натуральному числу $n\in\mathbb{N}$ соответствует мультииндекс $\alpha=(\alpha_1,\ldots,\alpha_k)\in\mathbb{A}$, где $n=2^k+j-$ стандартное представление и $j=\sum_{\nu=1}^{k}\alpha_\nu 2^{k-\nu}-$ двоичное разложение;

3. По числовой последовательности $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}, n=1,\ldots,2^{N-1}$ создадим новую числовую последовательность $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}, n=1,\ldots,2^{N-1}$ следующим образом. Для определения y_n воспользуемся заменой индекса, основанной на взаимно однозначном соответствии между $\mathbb{N}$ и $\mathbb{A}$;

4. Зная, что при $\nu=0$ и $\nu=k$ один из мультииндексов при x или y пустой, обозначим $x(\oslash)=x_1=1$ и $y(\oslash)=y_1=1$;

5. Рекуррентные соотношения запишем в виде

$$-y(\alpha_1,\ldots,\alpha_k) = x(\alpha_1,\ldots,\alpha_k) + \sum_{\nu=1}^{k-1} x(\alpha_1,\ldots,\alpha_\nu)\, y(\alpha_{\nu+1},\ldots,\alpha_k)$$

6. Вычислим $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}, n = 1, \ldots, 2^{N-1}$ из получившегося рекуррентного соотношения.

С реализацией алгоритма можно ознакомиться в приложении работы.

Заключение. В ходе выполнения работы были реализованы поставленные цели и задачи: даны основные определения, в частности, определения аффинной системы функций и дуальной функции; сформулированы и доказаны основные теоремы, в частности, об образовании аффинной системой базиса Рисса; решена практическая задача подсчета коэффициентов биортогонального ряда