МИНОБРНАУКИ РОССИИ

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования
«САРАТОВСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ Н.Г. ЧЕРНЫШЕВСКОГО»

Кафедра дифференциальных уравнений и математической экономики

Использование ортогональных многочленов в задаче восстановления функций

название темы выпускной квалификационной работы полужирным шрифтом

АВТОРЕФЕРАТ МАГИСТЕРСКОЙ РАБОТЫ

по направлению 01.04.02 – прикладная математика и информатика

код и наименование направления

студента 2 курса 217 группа механико-математического факультета

наименование факультета, института

Белоручкиной Полины Дмитриевны

фамилия, имя, отчество

Научный руководитель
профессор, д.ф-м.н., профессор Г.В. Хромова

должность, уч. степень, уч. звание инициалы, фамилия

Зав. кафедрой
зав.кафедрой, д.ф-м.н., профессор С.И. Дудов

должность, уч. степень, уч. звание инициалы, фамилия

Саратов 2024

Введение Данная работа относится к области некорректо поставленных задач. Среди математических проблем выделяется класс задач, решение которых неустойчиво к малым изменениям исходных данных. Они характеризуются тем, что сколь угодно малые изменения исходных данных могут приводить к произвольно большим изменениям решений.

Математическая задача называется поставленной корректно, если решение ее существует, единственно и непрерывно зависит от начальных данных.

Из определения следует, что задача будет являться некорректо поставленной, если не выполняется хотя бы одно из сформулированных условий. Однако, при решении практических задач, особенно важное значение приобретает последнее требование, поскольку исходные данные в этих задачах получаются в результате измерений и никогда не бывают известны точно, а существование и решение этих задач вытекает из их физической сущности. В связи с этим, некорректность понимается именно в смысле отсутствия непрерывной зависимости решения от исходных данных, а существование и единственность предполагаем как факт.

Актуальность работы состоит в том, что к некорректно поставленным задачам сводится ряд важных задач математической физики, теории функций, теории интегральных уравнений, прикладные задачи (обратные задачи геофизики, астрономии, задачи спектроскопии и т.д.)

Примерами некорректно поставленных задач являются:

- задача восстановления непрерывной функции на отрезке [a,b], заданной δ приближением из $L_{2[a,b]}$;
- задача дифференцирования функции, заданной с погрешностью;
- задача Коши для уравнения Лапласа и другие.

В дипломной работе рассматривается задача восстановления непреравных функций с помощью частичных сумм Фурье по полиномам Лежандра.

Цели и задачи дипломной работы:

1. Решить задачу восстановления непрерывной функции с помощью полиномов Лежандра. Задача восстановления непрерывной функции состоит в построении по f_δ функций $\widetilde{f}_\delta(x)$, таких, что $||\widetilde{f}_\delta(x) - f(x)||_C \to 0$ при $\delta \to 0/$.

2. Выяснить зависимость условий сходимости от погрешности, с которой задана функция.
3. Провести численный эксперимент на модельной задаче.

Структура и содержание дипломной работы Дипломная работа состоит из четырех глав, замечания и приложений:

1) История развития теории некоррекно поставленных задач. Корректные и некорректные задачи.

2) Ортогональные многочлены

3) Решение задачи восстановления непрерывных функций с по- мощью полиномов Лежандра

4) Решение модельной задачи

5) Замечание и приложения

В первой главе главе говорится об истории развития теории некорректно поставленных задач, родоначальнике понятия корректности Жаке Адамаре, о его последователе, нашем соотечественнике Андрее Николаевиче Тихонове, выделевшем широкий класс регуляризируемых некорректно поставленных задач, сформулировавшем одноименный метод регуляризации Тихонова, внесшем неоспоримый вклад в развитие и применение теории некорректно поставленных задач, и о его учениках. Хромова Галина Владимировна, профессор Саратовского Государственного Университета, Кафедра дифференциальных уравнений и математической экономики, мой научный руководитель, также вплотную занимается разработкой и внедрением методов регуляризации, базируемых на операторах приближения функций. Также, в главе первой приводятся практические примеры некорректно поставленных задач, с ними сталкивались и продолжают сталкиваться ученые и обыватели.

Во второй главе определяются ортогональные многочлены и их классификация, вводится теорема существования и критерий ортогональности, приводятся их основные свойства, явное представление и характеристики (вводятся понятия многочленов Чебышева первого и второго рода, многочленов Лежандра, а также рядов Фурье по ортогональным многочленам).

Последовательность многочленов $P_0(x), P_1(x), ..., P_n(x), ...,$ в которой каждый многочлен $P_n(x)$ имеет степень n и называется ортогональной с весом $h(x)$ на интервале (a, b), если выполняется условие:

$$\int_a^b h(x)P_n(x)P_m(x)\,dx = 0 \qquad m \neq n \tag{1}$$

$h(x)$ на этом интервале - неотрицательная, интегрируемая, положительная функция, с положительным интегралом, т.е.

$$0 < \int_a^b h(x)\,dx < \infty \tag{2}$$

При этом, интервал (a, b) называется интервалом ортогональности, а в случае, когда оба числа a и b конечны, обычно говорят о сегменте ортогональности.

Система ортогональных многочленов (1) называется ортонормированной, если каждый многочлен имеет положительный старший коэффициент и его норма с весом $h(x)$ равна единице, т.е.

$$||P_n|| = \left[\int_a^b h_n(x)P_n(x)\,dx\right]^{1/2} = 1 \tag{3}$$

Условие ортонормированности системы многочленов (1) имеет вид

$$\int_a^b h(x)P_n(x)P_m(x)dx = \begin{cases} 1, & n = m \\ 0, & n \neq m \end{cases} \tag{4}$$

Ортонормированные многочлены обозначаем $\left\{\widehat{P}_n(x)\right\}$.

Теорема 1.1. Для всякой весовой функции $h(x)$ существует единственная последовательность многочленов $\{P_n(x)\}$, имеющих положительный старший коэффициент и удовлетворяющих условию ортонормированности (4).

Критерий ортогональности многочлена $P_n(x)$.

Теорема 1.2. Для того, чтобы многочлен $P_n(x)$ степени n был ортогональным с весом $h(x)$, необходимо и достаточно, чтобы для всякого многочлена

$Q_m(x)$ степени $m < n$ выполнялось условие

$$\int_a^b h(x)P_n(x)Q_m(x)dx = 0, \ m < n \tag{8}$$

Теорема 1.3 Если интеграл ортогональности симметричен относительно начала координат, а весовая функция $h(x)$ чётна то каждый ортогональный многочлен $P_n(x)$ содержит только чётные степени x , которые имеют одинаковую с нормером n чётностью т.е имеет место тождество

$$P_n(-x) \equiv (-1)^n P_n(x) \tag{9}$$

В зависимости от выбора весовой функции $h(x)$ выделяют следующие системы классических ортогональных многочленов:

1) Многочлены Чебышева первого рода $\{T_n(x)\}$ ортогональные на сегменте $[-1, 1]$ с весовой функцией

$$h(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \qquad x \in [-1, 1]$$

2) Многочлены Чебышева второго рода $\{U_n(x)\}$ ортогональные на сегменте $[-1, 1]$ с весом

$$h(x) = \sqrt{1-x^2}$$

3) Многочлены Лежандра $\{P_n(x)\}$ ортогональные на том же сегменте с весом

$$h(x) = 1$$

4) Многочлены Якоби $\{P_n(x; \alpha, \beta)\}$, ортогональные на сегменте $[-1, 1]$ с весовой функцией

$$h(x) = (1-x)^\alpha (1+x)^\beta, \qquad x \in (-1, 1),$$

где $\alpha > -1, \beta > -1$.

Теорема 1.4. Для любых трех соседних ортонормированных многочленов справедлива трехчленная рекуррентная формула

$$\frac{\mu_n}{\mu_{n+1}} P_{n+1}(x) = (x - \alpha_n) P_n(x) - \frac{\mu_{n-1}}{\mu_n} P_{n-1}(x), \tag{10}$$

где μ_n - старший коэффицент многочлена $P_n(x)$.

Теорема 1.5 Для ортонормированных многочленов имеет место формула Кристоффеля-Дарбу

$$\sum_{k=0}^{n} P_k(x) P_k(t) = \frac{\mu_n}{\mu_{n+1}} \frac{P_{n+1}(x) P_n(t) - P_n(x) P_{n+1}(t)}{x - t} \tag{12}$$

В третьей главе дается общая постановка задачи восстановления функций, рассматривается задача восстановления периодической функции с помощью линейных методов суммирования рядов Фурье, решается задача восстановления непрерывных функций с помощью расширенного оператора Стеклова, а также с помощью частичных сумм ряда Фурье по полиномам Лежандра. Также, исследуется сходимость приближения точной функции.

Пусть функция $f(x)$ является исходными данными какой-либо физической задачи. Вместо точной функции $f(x)$ нам известна лиш приближенная к ней, т.е. некоторая функция $f_\delta(x)$ такая, что:

1) $\left(\int\limits_a^b (f_\delta(x) - f(x))^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \leq \delta$ или

2) $\{f_\delta(x_i)\}_{i=\overline{1,n}}$ - сеточная функция, т.е. выполняется

$$(\sum_{i=1}^{n} (f_\delta(x_i) - f(x_i))^2)^{\frac{1}{2}} \leq \delta.$$

Это означает:

1) $||f_\delta - f||_{L_2[a,b]} \leq \delta$

2) Если $f_\delta = \{f_\delta(x_i)\}_{i=\overline{1,n}}$ то можно считать, что $f_\delta \in E_n$. Рассмотрим $f^{\text{сет}} = \{f(x_i)\}$ тогда можно записать $||f_\delta - f^{\text{сет}}||_{E_n} \leq \delta$.

Задача восстановления непрерывной функции состоит в построении по f_δ функций $\widetilde{f}_\delta(x)$, таких что $||\widetilde{f}_\delta(x) - f(x)||_C \to 0$ при $\delta \to 0$.

К такой задаче сводится ряд важных задач математической физики, вычислительной математики, теории функций, теории интегральных уравнений, а также многие прикладные задачи: обратные задачи геофизики и астрономии, задачи спектроскопии и другие.

Фактически это:

1) Задача восстановления непрерывной функции на отрезке $[a, b]$, заданной δ приближением из $L_{2[a,b]}$. (Задача восстановления из L_2 в C).

2) Задача восстановления непрерывной функции по δ приближению сеточного аналога в E_n. (Задача восстановления из E_n в C).

Методы решения задачи восстановления называются методами регуляризации и состоят из двух важных моментов:

1) построения семейства линейных операторов T_h, зависящих от параметра h, действующих из пространства L_2 в пространство и обладающих свойством, что $||T_h f - f||_C \to 0$ при $\delta \to 0$. При этом параметр h называется параметром регуляризации.

2)согласования параметра h с погрешностью δ $h = h(\delta)$ такого, что

$$\delta||T_{h(\delta)}||_{L_2 \to C} \quad \text{при} \quad \delta \to 0. \tag{27}$$

Существование семейства линейных операторов $_h$, является условием, достаточным для разрешимости задачи восстановления непрерывной функции. Действительно, из оценки

$$||T_h f_\delta - f||_C \leq ||T_h f_\delta - T_h f||_C + ||T_h f - f||_C \leq$$
$$\leq ||T_h(f_\delta - f)||_C + ||T_h f - f||_C \leq \delta||T_h||_{L_2 \to C} + ||T_h f - f||_C \tag{28}$$

следует, что параметр h можно так согласовать с погрешностью $\delta(h = h(\delta))$, что будет выполняться (27), а отсюда следует стремление к нулю правой части (28) при $h = h(\delta), \delta \to 0$.

Лемма 2.1. Справедливо равенство

$$||U_n^{(\lambda)}||_{L_2 \to C} = \Big(\frac{2\sum\limits_{k=1}^{n}(\lambda_k^n)^2 + (\lambda_0^n)^2}{2\pi}\Big)^{1/2}. \tag{2.8}$$

Теорема 2.1. Для того чтобы $\Delta(\delta, U_n^{(\lambda)}, \overline{u}) \to 0$ при $\delta \to 0$, необходимо и достаточно так согласовать $n = n(\delta)$, чтобы

$$\delta\Big(2\sum_{k=1}^{n(\delta)}(\lambda_k^{n(\delta)})^2 + (\lambda_0^{n(\delta)})^2\Big)^{1/2} \to 0 \text{ при } \delta \to 0.$$

Оператор S_n

Рассмотрим частичную сумму ряда Фурье.

$$S_n = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n}(a_k \cos kx + b_x \sin kx)$$

Где $a_k = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \tilde{f}(x) \cos kx dx$, а $b_k = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \tilde{f}(x) \sin kx dx$

Подставим a_k и b_k в сумму

$$S_n = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n}\Big(\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \tilde{f}(x) \cos kt \cos kx dt + \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \tilde{f}(x) \sin kt \sin kx dt\Big)$$

Вынесем интеграл и $\dfrac{1}{\pi}$ за знак суммы:

$$S_n = \frac{a_0}{2} + \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\sum_{k=1}^{n}\Big(\Big(\tilde{f}(x) \cos kt \cos kx + \tilde{f}(x) \sin kt \sin kx\Big)dt\Big)$$

$$S_n = \frac{a_0}{2} + \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\sum_{k=1}^{n}\tilde{f}(x)\Big(\cos(kt - kx)dt\Big)$$

Мы можем представить a_0 в виде:

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)dt$$

И так же внести под знак интеграла. По итогу получим:

$$S_n f = \int\limits_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{\pi}\Big(\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n} \cos k(t-x)\Big) f(t)dt$$

Рассмотрим суммы Фурье по полиномам Лежандра, когда оператор S_n действует из пространства L_2 в пространство C, как это требуется в задаче восстановления функции. Будем применять оператор S_n к приближенной функции f_δ такой, что $||f_\delta - f||_{L_2} \leq \delta$.

Теорема 2.2 Пусть $\hat{P}_k(x)_{k=1}^{\infty}$ - нормированная система многочленов Лежандра, $S_n f$ - частичная сумма ряда Фурье по этой системе. Тогда для $\forall n \in \mathbb{Z}$ справедливо:

$$||S_n||_{L_2 \longrightarrow C} = \frac{1}{\sqrt{2}}(n+1). \tag{29}$$

Теорема 2.3 Пусть функция $f(x) \in Lip\ \alpha, \alpha > \dfrac{1}{2}$ на отрезке $[-1;1]$.

Тогда при $\delta \longrightarrow 0$ справедливо:

$$||S_{n(\delta)} f_\delta - f||_C \longrightarrow 0, \forall x \in [-1;1], \tag{32}$$

и имеет место оценка

$$||S_{n(\delta)} f_\delta - f||_C \leq K\delta^{\frac{2\alpha-1}{2\alpha+1}}, \tag{33}$$

где $K = \dfrac{1}{\sqrt{2}} C_1(\alpha) + CC_2$,

Теорема 2.4 Если функция $f(x)$ непрерывно диффиренцируема p раз на отрезке [-1,1], причем $f^{(p)} \in Lip\ \alpha, p+\alpha > \frac{1}{2}$, то

$$||S_n f_\delta - f||_C \leq K\delta^{\frac{2(p+\alpha)-1}{2(p+\alpha)+1}},$$

где $K-$ определено в Теореме 2.3

Доказательство аналогично доказательству Теоремы 2.3, но вместо α поставлено $p+\alpha$.

В четвертой главе приводится численный эксперимент на примере модельной задачи, описывается алгоритм решения этой задачи и моделирование исходных данных.

Рассмотрим реализацию метода Фурье по полиномам Лежандра на следующей модельной задаче. Пусть $f(x) = x^2 - 1$. Построим приближенную функцию $f(x)_\delta$ такую, что $\|f_\delta - f\|_L 2 \leq \Delta$. Затем применим оператор частичных сумм Фурье по полиномам Лежандра к функции $f(x)_\sigma$ и сравним значения точной и приближенной функций при различных Δ.

1) Зададим концы отрезка $[a, b]$: $a = -1, b = 1$.
2) Выберем число N разбиений отрезка $[-1, 1]$. Строим последовательность:

$$-1 = x_0 < x_1 < ... < x_N = 1, \tag{1}$$

где,

$$x_j = a + jh, \quad h = \frac{2}{N}, j = 0, 1, 2, ..., N.$$

3) Задаем константы Δи δ - погрешность исходных данных в пространстве L_2(алгоритм описан в замечании 1).
4) Строим приближенную функцию $f_\delta(x)$ в точках, соответствующих элементам последовательности (1) следующим образом:
$f_\delta(x_0) = f(x_0) + MA_1\delta$,
$f_\delta(x_1) = f(x_1) - MA_2\delta$,
а в остальных
$f_\delta(x_j) = f(x_j) + (-1)^j A_j\delta$,$j = 2, 3, ..., N$.
A_j - произвольные заданные числа, $A \in (0, 1]$. Пусть $A_j = 1$
M - константа, зависящая от N (условие выбора описаны в замечании 1).
5) Выбираем $n = n(\Delta)$ при $\Delta \to 0$,удовлетворяющее условию

$$n(\Delta) = \left[\left[\delta^{-\frac{1}{2}}\right]\right] \tag{2}$$

б) К $f_\delta(x)$ применим оператор частичных сумм Фурье $S_n(f_\delta(x))$, а именно:
   а) Пусть $j = 0, i = 1, P_0 = 1, P_1 = x_j$,

$$a_0 = \int_{-1}^{1} f_\delta(t)dt,$$

$$a_1 = \int\limits_{-1}^{1} x * f_\delta(t)dt.$$

Считаем значение частичный суммы ряда Фурье S_i в x_j в узле: $S_i(x_j) = a_0P_0(x_j) + a_1P_1(x_j)$.

б) Пусть $i = i + 1$.

в) Если $i < n(\Delta)$, то $iP_i(x_j) = (2i-1)x_jP_{i-1}(x_j) - (i-1)P_{i-2}(x_j)$.

Считаем $a_1 = \int\limits_{-1}^{1} f_\delta(t)P_i(t)dt$, $S_i(x_j) = S_{i-1}(x_j) + a_iP_i(x_j)$.

Если $i > n(\Delta)$, то $|f(x_j) - S_i(x_j)| = A_j$.

г) Пусть $j = j + 1$.

Если $j \leq N$, то возвращаемся к а).

Если $j = N$, то находим $A = \max\limits_j A_j$ и проверяем, что $A < \Delta$, выводим на печать всю информацию.

Мы можем изменять начальные данные и моделировать задачу.

7) Если меняем Δ или условие (2), то возвращаемся к 5).

Если меняем δ, то возврашаемся к 4).

В замечании дается обоснование выбора константы, фигурирующей в условии задачи.

Определим константу М:
Пусть $\Delta = 0.1, \delta \leq 0.05$, тогда $k = 2$ и $M^2 \leq \frac{1}{2}N + \frac{1}{2}$. Будем рассматривать случай $N = 5, M = 1.7$

В приложениях содержится наглядное подтверждение (код) результатов теоретического исследования. На графиках показано расхождение в точных и моделируемых исходных данных, а также отличие полученного приближенного решения от точного. Приводится таблица погрешностей в зависимости от различных исходных данных.

Заключении В моей дипломной работе я изучила задачу восстановления непрерывных функций с помощью часичных сумм ряда Фурье по полиномам Лежандра, выяснила зависимость условий сходимости от погрешности, с которой задана функция. Также получила оценки погрешностей и провела численный эксперимент на основе модельной задачи.