МИНОБРНАУКИ РОССИИ

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования

«САРАТОВСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ Н.Г.ЧЕРНЫШЕВСКОГО»

Кафедра математического анализа

Дифференциальные свойства выпуклых функций и их обобщений

АВТОРЕФЕРАТ БАКАЛАВРСКОЙ РАБОТЫ

студентки 4 курса 421 группы
направление 02.03.01 — Математика и компьютерные науки

механико-математического факультета

Ганиловой Алёны Алексеевны

Научный руководитель
доцент, к ф.-м.н. ____________ М.А.Осипцев

Зав. кафедрой
и.о. зав. кафедрой, д.ф.-м.н. ____________ П.А.Терехин

Саратов 2024

Введение. В современном мире математика играет важную роль в различных областях науки и техники. Одной из ключевых областей математики является теория функций, которая изучает свойства и поведение функций в зависимости от их аргументов. В рамках этой теории особое внимание уделяется изучению выпуклых функций, которые обладают рядом специфических свойств и имеют разнообразные приложения. Выпуклые функции занимают важное место в математике благодаря своим дифференциальным свойствам, таким как монотонность, непрерывность и дифференцируемость. Эти свойства позволяют использовать выпуклые функции для решения различных задач оптимизации, анализа экономических процессов и моделирования реальных явлений.

Целью данной дипломной работы является изучение дифференциальных свойств выпуклых функций и их приложений в различных областях науки и техники. В работе будут рассмотрены основные понятия и определения, связанные с выпуклыми функциями, а также приведены примеры их использования в практических задачах.

Для достижения поставленной цели в работе будут решены следующие задачи:

а) Изучение основных понятий и определений, связанных с выпуклыми функциями.

б) Исследование свойств монотонности, непрерывности и дифференцируемости выпуклых функций.

В результате выполнения дипломной работы будет получен систематизированный материал, который позволит студентам и специалистам глубже понять особенности выпуклых функций и их приложений в различных сферах деятельности.

Основное содержание работы.

Определение 1.1. Множество $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ называется *выпуклым*, если вместе с любыми двумя точками x_1, x_2 оно содержит отрезок, соединяющий эти точки, т.е. $[x_1, x_2] \subset \Omega$, где

$$[x_1, x_2] = \{x \in \mathbb{R}^n \mid x = ax_1 + (1-a)x_2,\ a \in [0,1]\}.$$

Выпуклое множество Ω называется *строго выпуклым*, если для любых $x_1, x_2 \in \Omega,\ x_1 \neq x_2$, и любого $a \in [0,1]$ точка $x_a = ax_1 + (1-a)x_2 \in \mathrm{int}\Omega$.

существует другое определение выпуклого множества.

Определение 1.1*. Множество $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ называется *выпуклым*, если вместе с любыми двумя точками x_1, x_2 оно содержит точку $2^{-1}(x_1 + x_2)$, т.е. если середина отрезка, соединяющего точки x_1 и x_2 принадлежит Ω.

Если множество Ω выпуклое в смысле определения 1, то оно выпукло и в смысле определеления 1*. Обратное неверно.

Пример. Пусть Ω есть множество рациональных чисел из $[0,1]$. Очевидно, что это множество выпукло в смысле определения 1*, но не является выпуклым в смысле определеня 1.

Теорема 1.1. (теорема Каратеодори) Любой вектор $x \in \mathrm{co}\, G$ может быть представлен в виде выпуклой комбинации не более чем $n+1$ векторов множества G.

Теорема 1.2. (теорема отделимости) Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ - замкнутое выпуклое множество и $x_0 \notin \Omega$. Тогда найдутся вектор $g_0 \in \mathbb{R}^n,\ ||g_0|| = 1$, и число $a > 0$ такие, что для $\forall x \in \Omega$ будет

$$(x - x_0, g_0) \leqslant -a \tag{1.1.5}$$

Пусть на выпуклом множестве $S \subset \mathbb{R}^n$ задана функция $f(x)$. Везде в дальшейшем функция $f(x)$ предполагается конечной в области своего определения, т.е. принимает конечные значения в любой точке области определения.

Графиком функции $f(x)$ называется множество

$$\{[\beta, x] \in \mathbb{R}^{n+1} \mid x \in S,\ \beta \in \mathbb{R}^1,\ \beta = f(x)\}.$$

Надграфиком функции $f(x)$, определенной на множестве S, называется множество

$$\text{epi} f = \{[\beta, x] \in \mathbb{R}^{n+1} \mid x \in S,\ \beta \in \mathbb{R}^1,\ \beta = f(x)\}.$$

Функцию $f(x)$ будем называть выпуклой на S, если

$$f(ax_1 + (1-a)x_2) \leqslant af(x_1) + (1-a)f(x_2) \quad \forall x_1, x_2 \in S, \quad \forall a \in [0,1]. \quad (1.2.1)$$

Надграфиком выпуклой функции - выпуклое множество. Функция $f(x)$ называется *строго выпуклой* на S, если

$$\begin{gathered} f(ax_1 + (1-a)x_2) < af(x_1) + (1-a)f(x_2) \\ \forall x_1, x_2 \in S, \quad x_1 \neq x_2, \quad \forall a \in (0,1). \end{gathered} \quad (1.2.2)$$

Функция $f(x)$ называется *сильно выпуклой* на S, если существует $m > 0$ такое, что

$$\begin{gathered} f(ax_1 + (1-a)x_2) \leqslant af(x_1) + (1-a)f(x_2) - a(1-a)m||x_1 - x_2||^2 \\ \forall x_1, x_2 \in S, \quad \forall a \in [0,1]. \end{gathered} \quad (1.2.3)$$

Функция $f(x)$ называется *вогнутой* на S, если

$$\begin{gathered} f(ax_1 + (1-a)x_2) \geqslant af(x_1) + (1-a)f(x_2) \\ \forall x_1, x_2 \in S, \quad \forall a \in [0,1]. \end{gathered}$$

Аналогично определяются *строго вогнутые* и *сильно вогнутые* функции. Заметим, что *линейная* функция $f(x) = \langle A, x \rangle + b$, где $A \in \mathbb{R}^n$,

$b \in (-\infty, \infty)$, является одновременно и выпуклой, и вогнутой. Из определения также ясно, что если $f_i(x)$, $i \in 1 : N$, - выпуклые на S функции, то и функция

$$f(x) = \sum_{i=1}^{N} a_i f_i(x), \quad a_i \geqslant 0, \quad i \in 1 : N$$

тоже выпуклая. В частности, выпуклой является и функция $F(x) = Af(x)$, если $A > 0$, а $f(x)$ - выпуклая функция.

Теорема 2.1. Функция $f(x)$ непрерывна в любой внутренней точке множества S.

Теорема 2.2. Пусть $f(x)$ - выпуклая на S функция, точка $x_0 \in \operatorname{int} S$. Тогда функция $f(x)$ является дифференцируемой в точке x_0 по любому направлению $g \in \mathbb{R}^n$.

Пусть функция $f(x)$ задана на прямой $\mathbb{R}^1$, $x_0 \in \mathbb{R}^1$. Пределы

$$f'_+(x_0) = \lim_{a \to +0} a^{-1}[f(x_0 + a) - f(x_0)],$$
$$f'_-(x_0) = \lim_{a \to -0} a^{-1}[f(x_0 + a) - f(x_0)]$$

называются соответственно *левой* и *правой производными* функции $f(x)$ в точке x_0. На прямой $\mathbb{R}^1$ существует лишь два направления. Одно из них задается вектором $g_1 = +1$, другое - вектором $g_2 = -1$. Понятно, что

$$f'_+(x_0) = \lim_{a \to +0} a^{-1}[f(x_0 + ag_1) - f(x_0)] = \frac{\partial f(x_0)}{\partial g_1},$$
$$f'_-(x_0) = \lim_{a \to -0} a^{-1}[f(x_0) - f(x_0 + ag_2)] = \frac{\partial f(x_0)}{\partial g_2}.$$

Теорема 3.1. Если $f(x)$ - выпуклая на $\mathbb{R}^1$, то ее односторонние производные не убывают. При этом для всех $x \in \mathbb{R}^1$ справедливы равенства

$$\lim_{y \to x+0} f'_+(y) = f'_+(x), \quad \lim_{y \to x-0} f'_-(y) = f'_+(x), \tag{1.5.1}$$

$$\lim_{z \to x-0} f'_+(z) = f'_-(x), \quad \lim_{z \to x-0} f'_-(z) = f'_-(x). \tag{1.5.2}$$

Теорема 3.2. Выпуклая функция $f(x)$, заданная на $\mathbb{R}^1$, дифференцируема во всех точках $\mathbb{R}^1$, за исключением, быть может, не более чем счетного множества. Если функция $f(x)$ дифференцируема в некоторой точке x_0, то и правая, и левая производные непрерывны в этой точке. В частности, если $f(x)$ дифференцируема на некотором интервале, то ее производная непрерывна там.

Теорема 3.3. Пусть $f(x)$ - выпуклая на $\mathbb{R}^n$. Функция $f(x)$ дифференцируема в точке $x \in \mathbb{R}^n$ в том и только в том случе, когда она обладает частными производными $\dfrac{\partial f(x_0)}{\partial x^{(1)}}$, ... , $\dfrac{\partial f(x_0)}{\partial x^{(n)}}$.

Если $f(x)$ дифференцируема в точке x_0, то $\partial f(x_0) = \{f'(x_0)\}$.

Теорема 3.4. Выпуклая функция $f(x)$ дифференцируема в точке $x_0 \in \mathbb{R}^n$ тогда и только тогда, когда ее субдифференциал $\partial f(x_0)$ состоит из единственной точки.

Пусть

$$f(x) = \sup_{y \in G} \varphi(x, y), \tag{1.4.1}$$

где $x \in \mathbb{R}^n,\ y \in E_p,\ G \subset E_p$ - произвольное множество. Параметрические семейства функций $\varphi(x, y)$ и $\varphi'_x(x, y)$, где $y \in G$ - параметр, предполагаются равностепенно непрерывними по x в точке x_0, т.е. для любого $\varepsilon > 0$ найдется $\delta > 0$ такое, что

$$|\varphi(x, y) - \varphi(x_0, y)| \leqslant \varepsilon$$
$$||\varphi'_x(x, y) - \varphi'_x(x_0, y)|| \leqslant \varepsilon \ \ \forall x : \ ||x - x_0|| \leqslant \delta, \ \ \forall y \in G.$$

Кроме того, предполагается, что

$$|\varphi(x_0, y)| \leqslant K_0 < \infty, \ \ ||\varphi'_x(x_0, y)|| \leqslant K < \infty \quad \forall y \in G. \tag{1.4.2}$$

Легко убедиться, что $f(x)$ - непрервыная в точке x_0 функция. Возьмем $\varepsilon > 0$. Введем множества

$$R_\varepsilon(x) = \{y \in G \mid f(x) - \varphi(x,y) \leqslant \varepsilon\},$$
$$\mathcal{H}(x) = \{v \in \mathbb{R}^n \mid \exists \varepsilon_i \to +0,\ y_i \in R_{\varepsilon_i}(x)\ :\ \varphi'_x(x,y_i) \to v\}.$$

Заметим, что множество $R_\varepsilon(x)$ не обязательно замкнуто. Множество $\mathcal{H}(x_0)$ непусто, замкнуто и ограничено. Точечно-множественное отображение $\mathcal{H}(x)$ полунепрерывно сверху в точке x_0, т.е. из того, что $v_i \in \mathcal{H}(x_i),\ x_i \to x_0,\ v_i \to v$, следует $v \in \mathcal{H}(x_0)$.

Теорема 3.7. Функция $f(x)$, заданная соотношением (1.4.1), является дифференцируемой по любому направлению $g \in \mathbb{R}^n$ в точке x_0, причем

$$\frac{\partial f(x_0)}{\partial g} = \max_{v \in \mathcal{H}(x)} (v, g). \tag{1.4.3}$$

Теорема 3.9. Множество $\partial f(x_0)$ непусто, выпукло, замкнуто и ограничено.

Теорема 3.11. (Теорема Моро-Рокафелла) Пусть $f = f_1 + f_2$, где f_1 и f_2 - собственные выпуклые функции, и существует точка $x_1 \in \mathrm{dom} f_1 \cap \mathrm{dom} f_2$, в которой f_1 непрерывна. Тогда

$$\partial f(x_0) = \partial f_1(x_0) + \partial f_2(x_0).$$

Пусть M – замкнутое ограниченное множество с непустой внутренностью (выпуклое тело) из конечномерного пространства $\mathbb{R}^p$, причем $0_p \in \mathrm{int} M$. Функция вида

$$k(x, M) = \inf\{\alpha \geqslant 0 : x \in \alpha M\}$$

называется функции Минковского (калибром) множества M.

Основные свойства

а) если $\lambda > 0$, то $k(\lambda x) = \lambda k(x)$;

б) если $x \in M$, то $k(x) \leqslant 1$, а если $x \notin M$, то $k(x) > 1$;

в) $k(x+y) \leqslant k(x) + k(y), \forall x, y \in \mathbb{R}^p$

Теорема 4.1. Пусть множество $M \subset \mathbb{R}^p$ является r-сильно выпуклым. Тогда для любых точек $x_0, x_1 \in \mathbb{R}^p \backslash \{0_p\}$ и $\alpha \in [0,1]$ справедливо неравенство

$$k((1-\alpha)x_0 + \alpha x_1) \leqslant \max\{k(x_0), k(x_1)\} - \frac{\alpha(1-\alpha)||x_0 - x_1||^2}{2rC_M \max\{k(x_0), k(x_1)\}}.$$

где $C_M = \sup\limits_{x \in M} ||x||$.

Теорема 4.2. Пусть M является r-сильно выпуклым множеством и $C_M = \sup\limits_{x \in M}$. Тогда функция $\psi(\cdot) = k^2(\cdot)$ является сильно выпуклой на $\mathbb{R}^p$ с константой сильной выпуклости, равной $\frac{2}{C_M(C_M + r)}$.

Определение 5.1. Функционал $F : V \to R^1$ называется полунепрерывным снизу в точке $u_0 \in V$, если для любой сильно сходящейся к u_0 последовательности $\{u_n\}_{n=1}^{+\infty}$

$$F(u_0) \leqslant \liminf_{n \to +\infty} F(u_n).$$

Функционал $F : V \to R^1$ называется полунепрерывным снизу на V , если он полунепрерывен снизу в любой точке $u \in V$.

Теорема 5.1. Выпуклый и полунепрерывный снизу функционал $F : V \to R^1$ является слабо полунепрерывным снизу.

Определение 5.2. Отображение, сопоставляющее каждому элементу $u \in V$ единственное решение v задачи минимизации

$$G(v) = \min_{\eta \in V} G(\eta),$$

где

$$G(\eta) = F(\eta) + \frac{1}{2}||\eta - u||^2, \quad \eta \in V$$

называется проксимальным (или prox-отображением):

$$v = Prox_{\{F\}}(u)$$

Определение 5.3. Индикаторная функция выпуклого замкнутого множества $M \subset V$ является частным случаем prox-отображения, тогда оператор проекторивания в V на M, $Prox_{\{I_M\}} \equiv P_M$.

Изучим дифференцируемость по направлениям функции, являющейся евклидовым расстоянием от точки до замкнутого множества $\Omega \subset \mathbb{R}^n$.

Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ - выпуклое замкнутое множество. Образуем функцию:

$$f(x) = \min_{y \in \Omega} ||x - y|| = ||x - y(x)||$$

Очевдно, что если $x \in \Omega$, то функия $f(x) = 0$. Заметим, что $f(x)$ - выпуклая функция на $\mathbb{R}^n$. Возьмем точки $x_1 \in \mathbb{R}^n$ и $x_2 \in \mathbb{R}^n$. Пусть

$$f(x_1) = ||x_1 - y_1||, \quad f(x_2) = ||x_2 - y_2||,$$

где $y_1 \in \Omega, y_2 \in \Omega$. При $\alpha \in [0, 1]$ в силу выпуклости Ω будет

$$y_\alpha = \alpha y_1 + (1 - \alpha) y_2 \in \Omega$$

Поэтому

$$f(\alpha x_1 + (1-\alpha)x_2) \leqslant ||\alpha x_1 + (1-\alpha)x_2 - y_\alpha =$$
$$= ||\alpha(x_1 - y_1) + (1-\alpha)(x_2 - y_2)|| \leqslant$$
$$\leqslant ||\alpha||x_1 - y_1|| + (1-\alpha)||x_2 - y_2|| = \alpha f(x_1) + (1\alpha) f(x_2),$$

а это означает, что $f(x)$ - выпуклая функция.

Наша цель - найти субдифференциал этой функции.

Теорема 6.1. Если x_0 не является граничной точкой множества Ω, то точечно-множественное отображение $\mathcal{N}(x)$ непрерывно в точке x_0.

Лемма 6.1. Справедливо соотношение

$$\psi = \begin{cases} -\rho = -d, \text{ если } d > 0 \\ \rho, \text{ если } d = 0 \end{cases}$$

Лемма 6.2. Функция $f(x)$ дифференцируема по направлениям на $\mathbb{R}^n$, причем

$$\frac{\partial f(x_0)}{\partial g} = \max_{v \in \partial f(x_0)} (v, g), \qquad (1)$$

где

$$\partial f(x_0) = \begin{cases} \left\{ \frac{x_0 - y(x_0)}{f(x_0)} \right\}, & \text{если } x_0 \notin \Omega, \\ (-\Gamma^+(x_0) \cap S_1), & \text{если } x_0 \in \Omega. \end{cases} \qquad (2)$$

Заключение. В дипломной работе были изучены дифференциальные свойства выпуклых функций и их приложения. Были рассмотрены основные понятия и теоремы выпуклого анализа, такие как выпуклость, опорная функция и функция Минковского. Были изучены свойства выпуклых функций, включая субдифференциал и его свойства, а также некоторые обобщения понятия выпуклости.

В заключение, можно сказать, что дифференциальные свойства выпуклых функций являются важным инструментом для исследования и оптимизации различных процессов в экономике, финансах, инженерии и других областях. Они позволяют определить оптимальные решения задач, учитывая ограничения и условия, наложенные на систему. Кроме того, знание этих свойств позволяет более глубоко понимать структуру функций и их поведение при изменении параметров. Все это делает изучение дифференциальных свойств выпуклых функций важным для студентов и специалистов в различных областях знания.

Результаты исследования могут быть применены в различных областях математики и приложений, таких как оптимизация, экономика и механика.