МИНОБРНАУКИ РОССИИ

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования
«САРАТОВСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ Н.Г. ЧЕРНЫШЕВСКОГО»

Кафедра математического анализа

Оценки тейлоровских коэффиентов для двух классов однолистных функций

АВТОРЕФЕРАТ БАКАЛАВРСКОЙ РАБОТЫ

студента(ки) 4 курса 421 группы

направление **02.03.01 – Математика и компьютерные науки**

механико-математического факультета

Ждановой Анастасии Андреевны

Научный руководитель

профессор, д.ф.-м.н., профессор ________________ Д.В.Прохоров

Заведующий кафедрой

И.о.зав.кафедрой, д.ф.-м.н. ________________ П.А.Терехин

Саратов 2024

Введение. Теория функций коплексного переменного (ТФКП) есть раздел математического анализа, изучающий функции комплексного переменного, то есть отображения вида

$$f : D \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{C}.$$

Большой интерес в исследованиях для ТФКП представляют функции регулярные (то есть комплексно дифференцируемые в каждой точке области определения) и однолистные (то есть взаимно однозначно отображающие D на $f(D)$). При ведении выпускной квалификационной работы были рассмотрены различные свойства таких функций.

Работа содержит в себе 5 разделов. В первой главе – *Класс* $B_2(\alpha,\ \beta)$ – подробно представлен вопрос об интегральном представлении однолистных функций, выпуклых в нескольких направлениях. Рассматриваемые материалы были взяты из публикации Д. В. Прохорова, Б. Н. Рахманова "Об интегральном представлении одного класса однолистных функций".

Вторая глава – *Класс* CJA – содержит в себе данный Д. В. Прохоровым в статье "Линии уровня функций, выпуклых в направлении оси"ответ на один из вопросов, опубликованных У. Хейманом в списке нерешённых задач в теории функций, представляющих научный интерес.

Объединяет эти главы то, что в каждой из них описаны подклассы одного класса функций. В четвёртой главе – *Оценки тейлоровских коэффициентов для классов* $B_2(\alpha,\ \beta)$ *и* CJA – говорится об оценках тейлоровских коэффициентов для них. Для получения этих оценок использовались материалы из публикации Д. В. Прохорова, *J. Szynal* "Коэффициенты обратных функций к функциям $(\alpha,\ \beta)$-выпуклым где в том числе говорится об оценках тейлоровских коэффициентов для другого класса функций, к которому однако возможно свести интересующий нас класс. Они подробно представленны в третьей главе – *Оценка функционала* $\Psi(\omega)$.

Наконец, в пятой главе – *Численные эксперименты* – представлены результаты написанной для этой работы программы, подверждающие верность полученных в четвёртой главе оценок.

Основное содержание работы. В первой главе даются следующие определения.

Определение 1.1. Класс S – класс функций

$$f(z) = z + a_2 z^2 + ..., \ z \in D,$$

регулярных и однолистных в единичном круге $D = \{z : |z| < 1\}$.

Определение 1.2. Класс $B_1\ (\alpha,\ \beta)$ – класс функций $f(z)$, представимых в виде

$$f(z) = C \int\limits_{z_0}^{z} (1 - se^{-i\gamma})^{-\lambda}\ (1 - se^{-i\delta})^{\lambda - 2}\ p(s)\ ds, \qquad (1.2)$$

где $\lambda = \alpha - \beta$, $|C| < \infty$, $z_0 \in D$, $0 \leq \gamma \leq \delta < 2\pi$, $p(z)$ – регулярная в D функция, $p(0) = 1$, удовлетворяющая в D условию

$$\mathrm{Re}\ e^{-i\sigma} p(z) > 0$$

с некоторым $\sigma \in (-\pi/2,\ \pi/2)$.

Определение 1.3. Класс $B_2\ (\alpha,\ \beta)$, $-1 < \beta < \alpha \leq 1$, – класс функций $f(z) \in S$, однолистно отображающих D на область $f(D)$, при условии, что существуют два таких параметра

$$\alpha_1,\ \beta_1 \in \mathbb{R}:\ \alpha_1 - \beta_1 = \lambda = \alpha - \beta,$$

что по крайней мере один из лучей l_1 и l_2, имеющих в качестве начала произвольную точку $w_0 \overline{\in} f(D)$ и образующих с OX^+ углы $\alpha_1\pi$ и $\beta_1\pi$ соответсвенно, не пересекает $f(D)$.

Идея рассматриваемой в этой главе работы в том, чтобы показать, что класс однолистных функций, выпуклых в нескольких направлениях, имеет интегральное представление (1.2). Для этого далее рассматривается соотношение классов $B_1\ (\alpha,\ \beta)$ и $B_2\ (\alpha,\ \beta)$.

Теорема 1.1. Пусть $-1 < \beta < \alpha \leq 1$. Тогда $B_2\ (\alpha,\ \beta) \subset B_1\ (\alpha,\ \beta)$.

Теорема 1.2. Пусть $-1 < \beta < \alpha \leq 1$. Тогда $B_1\ (\alpha,\ \beta) \subset B_2\ (\alpha,\ \beta)$.

Предложение 1.1. Классы $B_1\ (\alpha,\ \beta)$ и $B_2\ (\alpha,\ \beta)$ совпадают.

Во второй главе речь идёт о задаче нахождения максимального значения $r \in (0,\ 1)$, для которого $B_r \in CJA$ при всех $f \in CJA$, где $B_r = w : w = f(z), |z| < r, 0 < r < 1$ – область, принадлежащая классу CJA.
Определение 2.1. Класс CJA – класс функций $f(z)$, регулярных в D, для которых $f(0) = 0$, $f'(0) = 1$ и $f(D)$ – области, выпуклые в направлении мнимой оси.
Теорема 2.1. Если функция f принадлежит классу CJA, то для всех $r \in (0,\ \sqrt{2} - 1]$ область B_r принадлежит классу CJA. Для всякого $r \in (\sqrt{2} - 1,\ 1)$ существует функция f класса CJA, для которой область B_r не принадлежит классу CJA.

В третьей главе, как и в предыдущих главах, рассматриваются функции, регулярные в единичном круге $D = \{z\ :\ |z| < 1\}$, которые имеют вид

$$f(z) = z + a_2 z^2 + ...,\ z\ \in\ D. \qquad (3.1)$$

Ключевой здесь является лемма, касающаяся точной оценки функционала $\Psi(\omega)$, для которой необходимо ввести следующие определения и обозначения.
Определение 3.1. Класс α-выпуклых функций порядка β в смысле Мокану – класс $M(\alpha,\ \beta),\ \alpha \geq 0,\ 0 \leq \beta < 1$ функций, представимых в виде (3.1), которые удовлетворяют условиям:

$$z^{-1} f(z) f'(z) \neq 0;$$

$$\mathrm{Re}\left\{(1-\alpha)\,\frac{zf'(z)}{f(z)} + \alpha\left(1 + \frac{zf''(z)}{f'(z)}\right),\ z\ \in\ D\right\}.$$

Определение 3.2. Класс функций, обратных к $(\alpha,\ \beta)$-выпуклым, определяется следующим образом:

$$\widehat{M}(\alpha,\ \beta) = \left\{F:\ F = f^{-1},\ f\ \in\ M(\alpha,\ \beta)\right\},$$

где F определяется при помощи ограничения f на достаточно малую окрестность начала координат.

Определение 3.3. Класс Ω – класс всех регулярных функций вида

$$\omega(z) = c_1 z + c_2 z^2 + c_3 z^3 + ..., \ z \ \in \ D,$$

удовлетворяющих условию $|\omega(z)| < 1, \ z \ \in \ D$.

Определение 3.4. Функционал $\Psi(\omega)$ – функционал

$$\Psi(\omega) = |c_3 + \mu c_1 c_2 + \nu c_1^3|,$$

где μ и ν – вещественные параметры, внутри класса Ω.

Чтобы сформулировать лемму, необходимо записать следующие обозначения:

$$D_1 = \left\{(\mu, \ \nu): \ |\mu| \le \frac{1}{2}, \ -1 \le \nu \le 1\right\},$$

$$D_2 = \left\{(\mu, \ \nu): \ \frac{1}{2} \le |\mu| \le 2, \ \frac{4}{27}(|\mu|+1)^3 - (|\mu|+1) \le \nu \le 1\right\},$$

$$D_3 = \left\{(\mu, \ \nu): \ |\mu| \le \frac{1}{2}, \ \nu \le -1\right\},$$

$$D_4 = \left\{(\mu, \ \nu): \ |\mu| \ge \frac{1}{2}, \ \nu \le -\frac{2}{3}(|\mu|+1)\right\},$$

$$D_5 = \left\{(\mu, \ \nu): \ |\mu| \le 2, \ \nu \ge 1\right\},$$

$$D_6 = \left\{(\mu, \ \nu): \ 2 \le |\mu| \le 4, \ \nu \ge \frac{1}{12}(\mu^2+8)\right\},$$

$$D_7 = \left\{(\mu, \ \nu): \ |\mu| \ge 4, \ \nu \ge \frac{2}{3}(|\mu|-1)\right\},$$

$$D_8 = \left\{(\mu, \ \nu): \ \frac{1}{2} \le |\mu| \le 2, \ -\frac{2}{3}(|\mu|+1) \le \nu \le \frac{4}{27}(|\mu|+1)^3 - (\mu+1)\right\},$$

$$D_9 = \left\{(\mu, \ \nu): \ |\mu| \ge 2, \ -\frac{2}{3}(|\mu|+1) \le \nu \le \frac{2|\mu|(|\mu+1|)}{\mu^2+2|\mu|+4}\right\},$$

$$D_{10} = \left\{(\mu,\ \nu):\ 2 \le |\mu| \le 4,\ \frac{2|\mu|(|\mu+1|)}{\mu^2+2|\mu|+4} \le \nu \le \frac{1}{12}(\mu^2+2)\right\},$$

$$D_{11} = \left\{(\mu,\ \nu):\ |\mu| \ge 4,\ \frac{2|\mu|(|\mu+1|)}{\mu^2+2|\mu|+4} \le \nu \le \frac{2|\mu|(|\mu-1|)}{\mu^2-2|\mu|+4}\right\},$$

$$D_{12} = \left\{(\mu,\ \nu):\ |\mu| \ge 4,\ \frac{2|\mu|(|\mu-1|)}{\mu^2-2|\mu|+4} \le \nu \le \frac{2}{3}(|\mu|-1)\right\},$$

где $\mu,\ \nu\ \in\ \mathbb{R}$.

Лемма 3.1. Если $\omega(z)\ \in\ \Omega$, то для всех $\mu,\ \nu\ \in\ \mathbb{R}$ верна оценка

$$\Psi(\omega) \le \Phi(\mu,\ \nu),$$

где

$$\Phi(\mu,\ \nu) = \begin{cases} 1, & \text{при } (\mu,\ \nu) \in D_1\ \cup\ D_2\ \cup\ \{(1,\ 2)\}, \\ |\nu|, & \text{при } (\mu,\ \nu) \in \bigcup\limits_{k=3}^{7} D_k, \\ \frac{2}{3}\left(|\mu|+1\right)\left(\frac{|\mu|+1}{3(|\mu|+1+\nu}\right)^{\frac{1}{2}}, & \text{при } (\mu,\ \nu) \in D_8\ \cup\ D_9, \\ \frac{1}{3}\left(\frac{\mu^2-4}{\mu^2-4\nu}\right)\left(\frac{\mu^2-4}{\mu^2-4\nu}\right)^{\frac{1}{2}}, & \text{при } (\mu,\ \nu) \in D_{10}\ \cup\ D_{11}\ \cup\ -\{(2,\ 1)\}, \\ \frac{2}{3}\left(|\mu|-1\right)\left(\frac{|\mu|-1}{3(|\mu|-1-\nu}\right)^{\frac{1}{2}}, & \text{при } (\mu,\ \nu) \in D_{12}. \end{cases}$$

В полном тексте выпускной квалификационной работы содержится доказательство данной леммы, в котором в частности говорится об оценках для первых трёх коэффициентов определённого класса Ω, которые представляют особый интерес для данной бакалаврской работы:

$$\begin{gathered} |c_1| \le 1, \\ |c_2| \le 1 - |c_1|^2, \qquad (3.8) \\ |c_3(1-|c_1|^2) + \overline{c}_1 c_2^2| \le (1-|c_1|^2)^2 - |c_2|^2. \end{gathered}$$

В четвёртой главе содержится основной результат данной работы, касающийся оценок тейлоровских коэффициентов классов $B_2\left(\alpha,\ \beta\right)$ и CJA. Оценки для тейлоровских коэффициентов функций класса S можно вычислить при помощи оценок (3.8). Но для этого рассматриваемые функции должны принадлежать и классу Ω, то есть их область значений должна находиться в единичном круге, что не выполняется по определению. Более того, если же это условие выполяется для класса S, то сама задача оценивания не имеет смысла, так как $f(z) = z$. Тогда следует рассматривать случай $f(D) \overline{\subset} D$. При условии, что $f(D)$ не содержит бесконечность, можно найти $\sup\limits_{z\in D}|f(z)| = M$. При обозначении

$$F(z) = \frac{1}{M}|f(z)|$$

получается, что $F(D) \subset D$, то есть $F(z) \in \Omega$:

$$F(z) = c_1 z + c_2 z^2 + c_3 z^3 + \dots .$$

Такое преобразование позволяет вывести следующий факт.

Предложение 4.1 Пусть $f(z) \in S$ и определён $\sup\limits_{z\in D}|f(z)| = M$. Если $M \leq 1$, то $a_2 = 0, a_3 = 0$. В ином случае,

$$|a_2| \leq \tfrac{M^2-1}{M}, \qquad (4.6)$$

$$|a_3| \leq \tfrac{M^2-1}{M} - \tfrac{1}{M+1}|a_2|^2. \qquad (4.7)$$

Замечание 4.1. Поскольку $B_2\ (\alpha,\ \beta),\ CJA \subset S$, оценки коэффициентов для этих двух классов однолистных функций можно представить через (4.6) и (4.7).

В пятой главе представлены результаты численных эксперементов, проведённых с целью подтверждения верности полученных оценок и их графического изображения. В силу того, что оценка верна для класса S аналитических функций вида

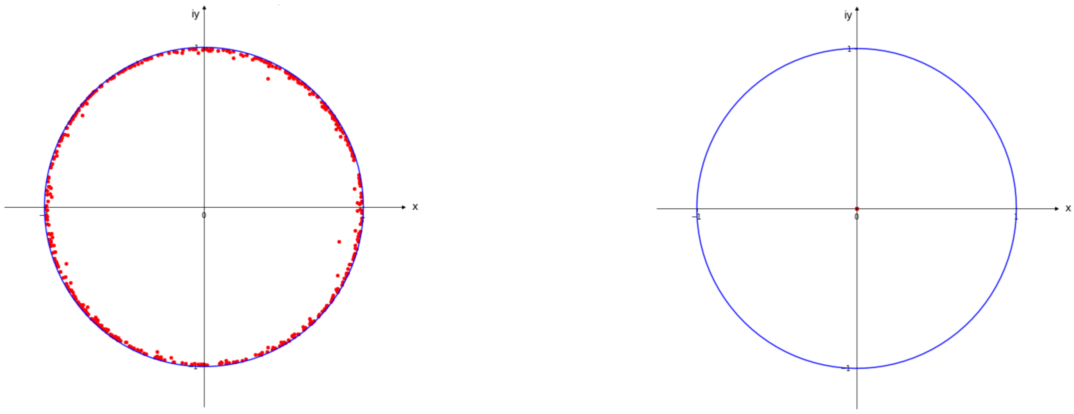
$$f(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n,$$

исследуемые функции можно задавать через их разложение Тейлора. Стоит заметить, что численно мы не можем работать с бесконечными рядами, поэтому в экспериментах используются конечные суммы вида

$$f(z) = z + \sum_{n=2}^{N} a_n z^n,$$

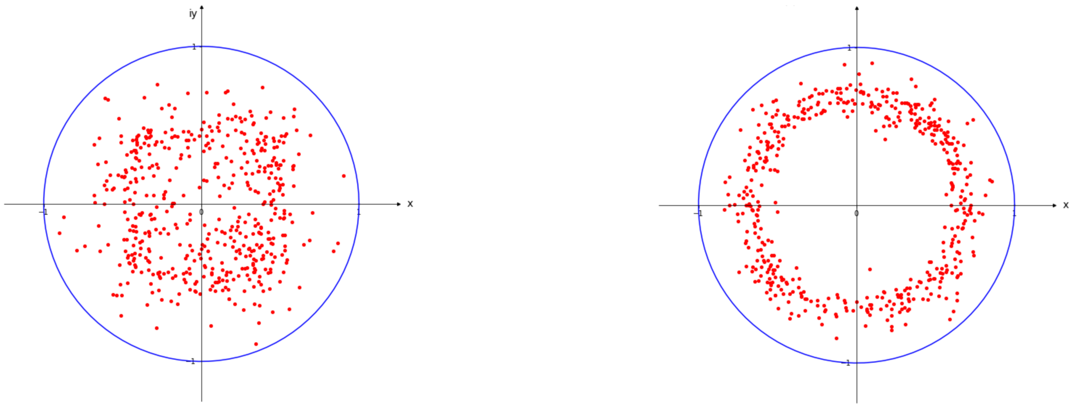
то есть алгебраические полиномы сколь угодно больших, но конечных порядков. При помощи программы, код которой представлен в приложении выпускной квалификационной работы, генерируется по 500 алгебраических полиномов заданного порядка и создаются графики положения коэффициентов и границ оценок в комплексной плоскости. Важным является замечание, что оценки для различных функций различны, так как зависят от максимума модуля M функции в единичном круге. Поэтому, для удобства отображения, все коэффициенты и оценки масштабируются, и в результате представлены не сами коэффициенты, а величины $\frac{\text{коэффициент}}{\text{оценка}}$ (изображаемые красными точками), которые помещены в единичный круг (граница которого изображается синей окружностью), играющий роль оценки. По положению точек в единичном круге мы можем заключить, удовлетворяют ли они оценке.

На рисунке 1 представлено распределение коэффициентов a_2 и a_3 для полиномов степени 2, принадлежащих классу S, то есть полиномов вида $x + a_2x^2$. Видно, что коэффициент a_2 может достаточно близко подходить к границе оценки, что косвенно подтверждает её точность. Коэффициент a_3 для таких полиномов равен нулю, что, очевидно, удовлетворяет оценке. На рисунке 2 представлено распределение коэффициентов a_2 и a_3 для полиномов 3 степени. Также эксперименты были проведены для полиномов класса S степеней 10, 100 и 500
На рисунках 2, 3, 4 и 5 представлено распределение коэффициентов a_2 и a_3 для полиномов класса S степеней 3, 10, 100 и 500 соответсвенно. То, что распределение коэффициентов тяготеет к квадрату, объясняется особенностями генерации: действительная и мнимая часть каждого коэффициента берется из одинакового равномерного распределения. Здесь так же видно, что их положение удовлетворяет представленной оценке.



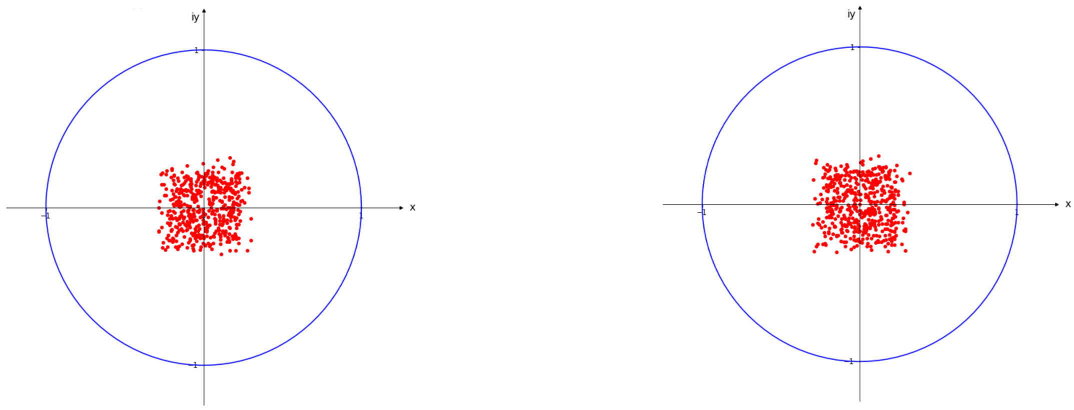
a_2 a_3

Рисунок 1 — Положение коэффициентов для алгебраических полиномов второго порядка.



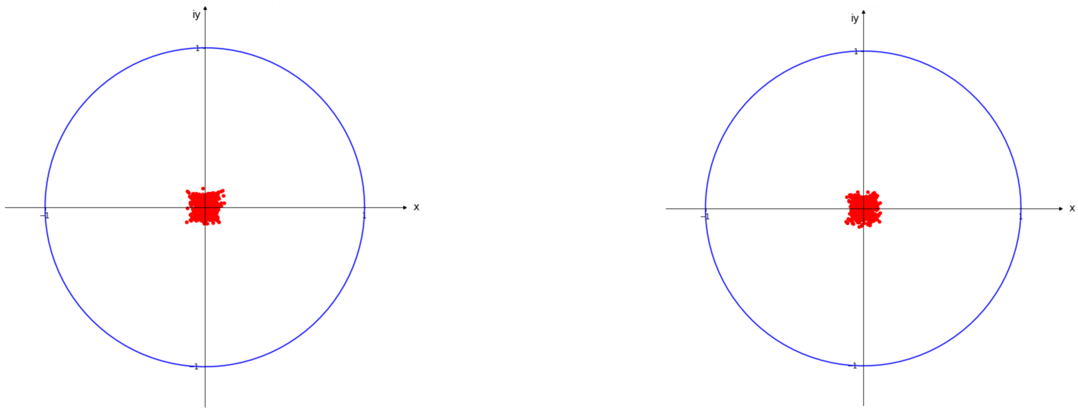
a_2 a_3

Рисунок 2 — Положение коэффициентов для алгебраических полиномов третьего порядка.



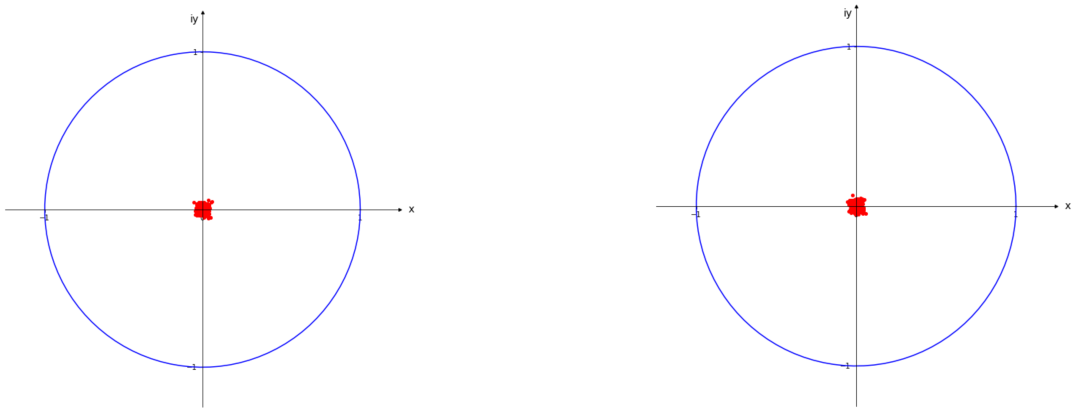
a_2 a_3

Рисунок 3 — Положение коэффициентов для алгебраических полиномов порядка 10.



a_2 a_3

Рисунок 4 — Положение коэффициентов для алгебраических полиномов порядка 100.



a_2 a_3

Рисунок 5 — Положение коэффициентов для алгебраических полиномов порядка 500.

Заключение. В результате данной работы были изучены некоторые подклассы регулярных на единичном круге однолистных функций и различные их свойства, а также был поднят вопрос об оценках тейлоровских коэффициентов этих функций. Как видно из третьей главы, задача их оценивания представляет немалую сложность, и результатом данной работы является получение оценок коэффициентов для широкого класса функций через максимум их модуля, который имеет логичное продолжение в конкретизации результатов для представленных его подклассов. Полученная оценка подтверждается также и численными экспериментами.