МИНОБРНАУКИ РОССИИ

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования

«САРАТОВСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ Н.Г.ЧЕРНЫШЕВСКОГО»

Кафедра математического анализа

Случаи интегрирования уравнения Левнера в явном виде

АВТОРЕФЕРАТ БАКАЛАВРСКОЙ РАБОТЫ

студента 4 курса 421 группы

направление 02.03.01 — Математика и компьютерные науки

механико-математического факультета

Живайкина Андрея Романовича

Научный руководитель

доцент. к.ф. -м. н. А.М. Захаров

Заведующий кафедрой

и.о. зав. кафедрой, д.ф.-м.н. П.А.Терехин

Саратов 2024

Введение. Обыкновенное дифференциальное уравнение Лёвнера задает однопараметрическое семейство конформных отображений канонических областей в себя и служит мощным инструментом исследования свойств однолистных функций на протяжении многих лет. Впервые оно появилось в работе Карла Лёвнера и относилось к функциям, определенным в единичном круге D. Уравнение содержит произвольную измеримую функцию, которая играет роль управляющей функции. В общем случае уравнение Лёвнера не интегрируется в квадратурах, однако при выборе частных видов управления оно допускает выделение семейств интегралов. Позднее в новых версиях уравнения Лёвнера рассматривались другие канонические области: полуплоскость, полоса, кольцо. Наибольшее внимание в последние годы уделяется «радиальному» уравнению для D и «хордовому» уравнению для верхней полуплоскости $\mathbb{H}$. Обнаруженные связи теории Лёвнера со многими разделами математики и физики объясняют растущий интерес к ней в современных исследованиях.

Основное содержание работы. Основной объект, который изучается в данной работе – это уравнение Лёвнера. Существует довольно много версий этого уравнения, зависящих от интересующей нас области. Основное внимание уделено хордовому уравнению Лёвнера, которое является уравнением Лёвнера в верхней полуплоскости. Этот случай можно рассматривать в двух вариантах относительно течения времени: в прямом и обратном направлении. Прямая версия хордового уравнения Лёвнера представляет собой дифференциальное уравнение, имеющее вид:

$$\frac{\partial}{\partial t}g(t,z) = \frac{2}{g(t,z)-\lambda(t)},\ g(0,z) = z \tag{1.2}$$

где λ: $[0,T] \to \mathbb{R}$ - неприрывна, а область для z является верхней полуплоскостью, обозначаемой $\mathbb{H} = \{z \in \mathbb{C} : Im(z) > 0\}$. Из теоремы существования и единственности решения дифференциальных уравнений следует, что каждому $z \in \mathbb{H}$ соответствует некоторый промежуток времени $[0, t_0)$ такой, что существует единственное решение (1.2). Теперь посмотрим на уравнение с точки зрения геометрии. Пусть z_0 - такая точка, что знаменатель правой части (1.2) равен нулю, т.е. $g(t, z_0) = \xi(t)$. В результате производная, $\partial_t g(t,z)$, уходит в бесконечность в этой точке. При определенных условиях на ξ мы можем гарантировать, что множество всех таких точек порождает кривую, берущую своё начало на вещественной оси. Однако кривая может вырождаться в некоторую область в зависимости от функции ξ. Будем обозначать эту кривую γ. Чтобы выразить её в виде формулы, положим $T_z = \sup\{t_0 \in [0, T] : g(t, z)$ существует на $[0, t_0)\}$. Это дает нам наибольшее возможное значение t такое, при котором решение $g(t, z)$ имеет смысл. Определим теперь $G_t = \{z \in \mathbb{H} : t < T_z\}$, где содержатся только те точки из $\mathbb{H}$, которые в течение некоторого времени $t < T_z$ делают точки $\partial_t g$ сингулярными. Теперь G_t - наша область для (1.2). Поскольку в уравнение (1.2) мы подставляем разные управляющие функции ξ, то мы будем говорить, что ξ порождает $g(t, z)$ и соответствует области G_z. По теореме Римана о сопоставлении можно показать, что g_t - это конформное отображение из G_z в $\mathbb{H}$. Это отображение можно сделать уникальным, задав определенные условия для точек в нашей области. Мы выразим это в трех условиях: ∞ отображается на ∞, вещественная прямая отображается на вещественную прямую и производная, вычесленная в точке ∞, равняется 1. Такой набор условий иначе называется гидродинамической нормировкой и, точнее говоря, утверждает, что $lim_{z\in\infty, z\in\mathbb{H}}(g_t(z)z) = 0$, поэтому наше отображение будет выглядеть как тождественное отображение, когда z находится далеко от начала координат. Вблизи бесконечно удаленной точки g_t имеет вид:

$$g_t(z) = z + \frac{c(t)}{z} + O(\frac{1}{z^2})^2 \tag{1.3}$$

Когда мы говорим о втором случае хордового уравнения Лёвнера – обратном, с геометрической точки зрения мы можем это представлять себе так, что мы с течением времени рисуем кривую γ до тех пор, пока она не коснется действительной оси. Таким образом, мы можем заключить, что начиная с нашего конечного времени T и перехода назад к моменту времени 0 будет появляться некоторая кривая γ из ранее «пустой» (в момент времени T) верхней полуплоскости. Такие функции генерируются уравнением:

$$\frac{\partial}{\partial t} f_t(z) = \frac{-2}{f_t(z) - \xi(t)}, \; f_0(z) = z \tag{1.4}$$

где ξ вещественная и непрерывная. (1.4) - это обратное уравнение Лёвнера. Помимо очевидного появления отрицательного знака в числителе, уравнение (1.4) и уравнение (1.2) связаны между собой по-другому. Если T является наибольшим возможным значением для t, то, отношение $\xi(Tt) = \lambda(t)$ переводит нас от одного уравнения к другому. Таким образом, кривая γ, порожденная уравнением (1.4), не обязательно совпадает с кривой γ, порожденной уравнением (1.2). Однако верно, что

$$f_T(z) = g_T^{-1}(z) \tag{1,5}$$

где T - конечный момент времени. Выражая нашу сгенерированную функцию f_t согласно гидродинамической нормировке вблизи бесконечно удаленной точки, что и выше, получим разложение, подобное тому, которое появляется в (1.3), за исключением того, что коэффициент мощности полуплоскости, $c(t)$, теперь имеет знак, противоположный тому, что было ранее отмечено. Это можно рассматривать как результат «обратного хода» и замены всех t на t. Аналогично, если γ параметризуется так же, как в (1.2), то разложение f имеет вид:

$$f_t(z) = z + \frac{-c(t)}{z} + O(\frac{1}{z^2}) \tag{1.6}$$

Как указано выше для прямой версии, мы видим, что γ отображается на действительную ось. В обратном варианте мы наблюдаем это же явление в противоположном направлении: часть действительной оси отображается на γ. На самом деле это отображение двузначно по своей природе, то есть две точки на вещественной оси отображаются в одну точку на γ. В некоторых работах это называют «сваркой». Это легко подтверждается, если положить управляющую функцию ξ равной константе. В общем случае решения для управляющих функций, не являющихся константами, являются неявными. В свете этого мы воздержимся от прямого вычисления формул и просто сформулируем некоторые результаты. Для полноты картины проверим, что при «правильной» нормировке g_t удовлетворяет (1.2). Сформулируем это утверждение как теорему ниже, но пока мы рассмотрим несколько предварительных правил. Введём правило масштабирования. При $r > 0$ рассмотрим нормированное, и, следовательно, единственное конформное отображение g_{rt}. Обозначение представляет собой оболочку в момент времени t, которая масштабируется параметром r, в результате чего мы получаем новую оболочку в момент времени rt. Умножение r просто масштабирует все точки K на величину r. Функция $g_{rt}(z)$ затем переводит $\mathbb{H}/rK$ в $\mathbb{H}$. Однако функция $g_t(z/r)$ также переводит $\mathbb{H}/rK$ в $\mathbb{H}$. Рассмотрим сложную функцию $g_t(z/r)$. Рассматривая разложение в ряд, мы видим, что эта функция больше не удовлетворяет гидродинамической нормировке:

$$g_t(z,r) = z/r + \frac{-c(t)}{z/r} + O(\frac{1}{(z/r)^2}) = z/r\frac{-c(t)r}{z} + O(\frac{1}{z^2}) \tag{1.11}$$

Наличие r в последних двух членах не влияет на поведение $g_K(z/r)$ вблизи ∞. Единственное место, где это весомо, является появление r как коэффициента линейного члена. Решение этой проблемы просто: умножить на r. Теперь у нас есть две функции, отображающие $\mathbb{H}_0$ в $\mathbb{H}$ и поскольку каждая из них была сделана единственной посредством нормализации, следует, что они равны: $g_{rt}(z) = rg_t(z/r)$. Аналогично получаем, что их соответствующие возможности уникальны, что дает нам правило масштабирования:

$$c(rt) = r^2 c(t) \tag{1.12}$$

Теперь выведем правило суммирования. Для этой цели приведем несколько иные обозначения. Рассмотрим две оболочки J и K такие, что $J \in K$. Определим их нормализованные конформные отображения как g_J и g_K. Подстрочное обозначение можно понимать как представляющее моменты времени t_1 и $t_1 + t_2$, которые при подстановке в g_t дают нам соответствующие оболочки J и K. Затем мы построим новую оболочку $L := \overline{g_J(K/J)}$. L - это образ части оболочки K, которая не принадлежит J при g_J и может считаться соответствующей времени t_2. Теперь, если мы составим композицию g_J с g_L и применим её к оболочке K, то g_J отобразит «J-ю часть K» на действительную ось, а g_L отобразит все, что осталось. Теперь у нас есть две функции, отображающие H/K в $\mathbb{H}$, а именно $g_L \circ g_J$ и g_K. Мы уже знаем, что g_K имеет правильную нормализацию. Чтобы увидеть, что $g_L \circ g_J$ также удовлетворяет гидродинамической нормировке, отметим, что, поскольку в g_L или g_J нет постоянных членов, и поскольку единственный линейный член, входящий в их состав, возникает из составления линейных членов в каждом,условия выполняются. Итак, мы получили соотношение $g_L \circ g_J = g_K$. Таким образом, мы получаем правило суммирования:

$$c(K) = c(J) + c(L) \tag{1.13}$$

Итак, если у нас есть две оболочки $J \in K$, мы можем создать еще одну оболочку L, как определено выше, а мощность большей части оболочки K равна сумме мощностей двух меньших оболочек J и L. В терминах t этот результат можно также записать в виде:

$$c(t_2 + t_1) = c(t_2) + c(t_1) \tag{1.14}$$

Теперь используем введенные выше правила для вывода уравнения. Предположим, что $\gamma(t) \in \overline{\mathbb{H}}$ является непрерывной и $\gamma(0) \in R$. Далее накладывается условие, что если γ касается самой себя или действительной оси, то она немедленно «отскакивает» в H/K. Отсюда следует, что связанная мощность $c(t)$ непрерывна. Аналогично, $\xi(T) := g_t(\gamma(t))$ также непрерывна. Заметим, что здесь определение ξ отличается от представленного в начале пункта, потому что функции g_t могут пока не иметь правильную нормализацию. Важным атрибутом непрерывности $c(t)$ является то, что мы можем теперь параметризовать γ практически любым непрерывным образом. Теперь мы можем доказать, что g_t удовлетворяет уравнению Лёвнера и что ξ является управляющей функцией.

Теорема 1.1 Пусть $\gamma(t)$ параметризуется так, что $c(t) = 2t$. Тогда для всех $z \in \mathbb{H}/K_t$, где K_t - оболочка, ассоциированная с $\gamma(t)$, то $g_t(z)$ удовлетворяет условию (1.2). Теперь рассмотрим случай, когда управляющая функция является константой:

$$\xi(t) = A. \tag{2.1}$$

Подставим в уравнение Левнера (1.1) на место управляющей функции константу A. Получим:

$$\frac{dg_t(z)}{dt} = \frac{2}{g_t(z) - A} \tag{2.2}$$

Применим метод разделения переменных к полученному дифференциальному уравнению и проинтегрируем полученное равенство:

$$g_t(z) = A + [(z - A)^2 + 4t]^{1/2}. \tag{2.7}$$

Обратная функция имеет ту же форму, что и прямая, а именно

$$f_t(w) = A + [(w - A)^2 - 4t]^{1/2}. \tag{2.8}$$

В момент времени t функция g приобретает новую сингулярность в точке

$$z_c(t) = A + 2it^{1/2} \tag{2.9}$$

которая отображается через g_t в точку $\xi(t) = A$ в плоскости w. Таким образом, сингулярности образуют отрезок прямой, параллельный мнимой оси, а отображаемая область плоскости z является верхней полуплоскостью без этого отрезка. Отображение имеет точку сингулярности в том месте, где траектория пересекается с действительной осью. Можно рассмотреть эту точку $z_0 = A$ с двух разных направлений, что даст нам два различных изображения в точках

$$w_{0\pm} = A \pm 2t^{1/2}. \tag{2.10}$$

Теперь рассмотрим случай, когда управляющая функция является линейной. В следующем случае управление увеличивается линейно со временем согласно

$$\xi(t) = t. \tag{3.1}$$

Подставим в управляющую функцию в уравнении Левнера t. Получим:

$$\frac{dg_t}{dt} = \frac{2}{g_t - t} \tag{3.2}$$

Переопределим независимую переменную как $h = g - t$. Из этого равенства выразим g:

$$g = h + t \tag{3.3}$$

Подставим полученное выражение в равенство (3.2):

$$\frac{dh}{dt} + 1 = \frac{2}{h} \tag{3.5}$$

Функция $F(h)$:

$$F(h) = h + 2\ln(2 - h). \tag{3.7}$$

Продифференцируем данную функцию по dh:

$$\frac{dF}{dh} = 1 + 2\frac{1}{2-h} * (-1) = 1 - \frac{2}{2-h} \tag{3.8}$$

Приведем к общему знаменателю:

$$\frac{2-h-2}{2-h} = -\frac{h}{2-h} \tag{3.9}$$

$$\frac{dh}{dt} = \frac{2-h}{h} = -\frac{dh}{dF}$$

Таким образом получено равенство:

$$\frac{dh}{dt} = \frac{2-h}{h} =: -\frac{dh}{dF(h)} \tag{3.10}$$

В терминах F решение будет следующим

$$F(h) = -t + c(z). \tag{3.11}$$

Здесь $c(z)$ - константа, которая должна быть задана из начального условия, $g_0 = z$, что дает решение $F(h) = -t + F(z)$ или эквивалентно

$$F(g-t) = F(z) - t \tag{3.12}$$

Чтобы найти траекторию сингулярности, используются уравнения $g_t(z_c(t)) = \xi(t)$. и (3.12), задаем

$$F(z_c(t)) = F(0) + t = 2\ln 2 + t \tag{3.13}$$

Можно найти явное выражение для этой траектории. Для этого, нужно подставить $2 - z_c(t) = r_t exp(-i\phi_t)$ в предыдущее уравнение. Затем нужно разделить уравнение на действительную и мнимую части, чтобы получить

$$2\ln r_t - r_t \cos\phi_t = 2\ln 2 + t - 2 \tag{3.13}$$

$$r_t = 2\phi/\sin\phi_t. \tag{3.14}$$

Подставив второе уравнение в первое, можно показать, что ϕ монотонно возрастает во времени от значения $\phi_0 = 0$ до $\phi_\infty = \pi$. С точки зрения параметра ϕ, линия сингулярностей может быть записана в явном виде как

$$z_c(t) = 2 - 2\phi_t \cot\phi_t + 2i\phi_t. \tag{3.15}$$

Это показывает, что линия сингулярностей движется наружу к бесконечности, оставаясь при этом оставаясь на фиксированном расстоянии от вещественной оси. Для малых и больших значений t мы также можем построить асимптотические формы решения (3.12). Когда t стремится к нулю, можно разложить $F(z_c(t))$ до третьего порядка в $z_c(t)$ и обнаружить, что при таком порядке результат

$$z_c(t) = 2it^{1/2} + \frac{2}{3}t + O(t^{3/2}). \tag{3.16}$$

Для большого t:

$$z_c(t) = t - 2\ln[(t-2)/2] + 2\pi i + O(\ln t/t). \tag{3.17}$$

Рассмотрим уравнение Левнера с экспонентной управляющей функцией. Запишем уравнение Левнера с управляющей функцией $\xi(t) = C(e^t - 1)$. Так, переход от $\xi(t)$ к $\xi(t) + b$ компенсируется переходом от решения $f(z,t)$ к решению $f(zb,t) + b$, что ведет к сдвигу кривой $\gamma(t)$ на вектор b. Если зафиксировать значение $\gamma(t)$, положив, например, $\gamma(0) = 0$, то управляющая функция $\xi(t)$ должна быть нормирована условием $\xi(0) = 0$. Таким образом, будем рассматривать управляющую функцию в виде

$$\xi(t) = C(e^t - 1) \tag{4.1}$$

Для формулировки основного результата введем обозначения. Положим

$$G(\zeta) = \int_0^\zeta \exp(\frac{x^2}{4})dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\zeta^{2n+1}}{4^n(2n+1)n!}, \zeta \in \mathbb{C} \tag{4.2}$$

и для $C \in \mathbb{R}$

$$F(w,z,t) = \frac{C}{2}(G(w+C)-G(z+C))+\exp(\frac{(z+C)^2}{4})+\exp(\frac{(w+C)^2}{4}-t) \tag{4.3}$$

Уравнение

$$F(x,w,t) = 0 \tag{4.4}$$

порождает неявную функцию

$$w = f(z,t),\, f(z,0) = z \tag{4.5}$$

Основной результат статьи содержится в следующей теореме.

Теорема 4.1. Неявная функция (4.5), порождаемая уравнением (4.4), является решением дифференциального уравнения Лёвнера (1.2) с управляющей функцией (4.1). Связь между кривой и управлением в уравнении Левнера выражается соотношениями

$$\xi(t) = f(\gamma(t),t),\, \gamma(t) = f^{-1}(\xi(t),t) \tag{4.11}$$

которые называются линией сингулярности, поскольку обращают в тождественный нуль знаменатель дроби в правой части уравнения Левнера. Подставим соотношения (4.11) с рассматриевым управлением в уравнение $F(w,z,t) = 0$ и получим равенство

$$\exp(\frac{C^2e^{2t}}{4} - t) = \frac{C}{2}(G(Ce^t) - G(\gamma + C)) + \exp(\frac{(\gamma + C^2)}{4}) \tag{4.12}$$

Уравнение (4.12), записанное в виде $H(\gamma,t) = 0$, $H(0,0) = 0$, удовлетворяет условию

$$H_\gamma(\gamma,t) = \gamma \exp(\frac{(\gamma+C)^2}{4}) \neq 0,\, t > 0$$

и поэтому определяет неявную функцию $\gamma = \gamma(t)$. Функцию $\gamma(t)$ можно выразить и другим способом. Продифференцируем уравнение (4.12) по t, считая $\gamma = \gamma(t)$, $t > 0$, и получим дифференциальное уравнение:

$$\exp(\frac{(\gamma + C)^2}{4})\gamma\gamma' = -2\exp(\frac{C^2 e^{2t}}{4} - t) \tag{4.13}$$

с разделяющимися переменными. Его интегрирование не представляет труда. Для формулировки результата введем обозначения

$$\phi(\zeta) = \int_0^\zeta \exp(\frac{(\zeta + C)^2}{4})\zeta d\zeta$$

$$\psi(t) = -2\int_0^t \exp(\frac{C^2 e^{2t}}{4} - t)dt$$

Заметим, что функции ϕ и ψ выражаются через элементарные функции только при $C = 0$. Мы доказали следующую теорему.

Теорема 4.2. Решение $w = f(z, t)$ уравнения Левнера с экспонентным управлением отображает $\mathbb{H}/\gamma(t)$ на $\mathbb{H}$, где

$$\gamma(t) = \phi^{-1} \circ \psi(t),\ t > 0$$

При $C = 0$ теорема выражает тривиальный факт об отображении верхней полуплоскости с разрезом по отрезку на мнимой оси на верхнюю полуплоскость.

Заключение. Данная работа посвящена теме «Интегрированию Лёвнеровских халлов», а конкретно дифференциальным уравнениям Лёвнера. В ходе работы были выполнены следующие задачи:1. Были переведены различные статьи на русский язык, были рассмотрены различные дифференциальные решения уравнения Лёвнера для вещественной движущей функции для случая управления в виде константы, линейной функции и экспоненты. Также был создан алгоритм построения левнеровского халла, а также реализован на языке программирования python.