МИНОБРНАУКИ РОССИИ

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«САРАТОВСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ИМЕНИ Н.Г. ЧЕРНЫШЕВСКОГО»

Кафедра математического анализа

Принцип площадей и оптимальное управление в экстремальных задачах на классе однолистных функций

АВТОРЕФЕРАТ БАКАЛАВРСКОЙ РАБОТЫ

студента(ки) 4 курса 421 группы

направление **02.03.01 – Математика и компьютерные науки**

механико-математического факультета

Мещерякова Максима Сергеевича

Научный руководитель

доцент, к.ф.-м.н. _______________ В.Г.Гордиенко

Заведующий кафедрой

И.о.зав.кафедрой, д.ф.-м.н. _______________ П.А.Терехин

Саратов 2024

Введение. В задачах теории однолистных функций, на протяжении многих десятков лет, одно из центральных мест занимала гипотеза Бибербаха о справедливости неравенства $|c_n| \leq n, n \geq 2$, где c_n- коэффициент тейлоровского разложения функции $f \in S$, высказанная им в 1916 году. Знак равенства здесь возможен только для функции Кёбе

$$K(z) = \frac{z}{(1-z)^2}$$

и её вращений. Функция $w = K(z)$ имеет вещественные коэффициенты и отображает единичный круг на комплексную плоскость с разрезом вдоль луча на отрицательной части вещественной. Вершина луча находится в точке $w = -1/4$. Эта гипотеза была доказана в 1984 году де Бранжем.

Многочисленные попытки доказательства гипотезы Бибербаха, предпринимавшиеся ранее, привели к развитию новых методов исследования в решении задач теории однолистных функций. В моей выпускной квалификационной работе рассматривается применение двух из этих методов, а именно, метода площадей и метода теории оптимального управления, основанного на принципе максимума Понтрягина и разработанного в рамках метода параметрических продолжений для теории однолистных функций.

В первой главе работы рассматривается применение метода площадей к задаче об оценке модуля четвёртого коэффициента в классе S. Это доказательство приведено в книге Лебедева.

Во второй главе главе рассматривается, основываясь на статье, задача об оценке $|c_4|$ в классе $S(M)$ ограниченных однолистных функций. Решение этой задачи приводится для значений M близких к 1 и для достаточно больших значений M . Экстремальные функции при этом разные. Это связано с тем, что структура класса $S(M)$ более сложная, чем структура класса S, несмотря на то, что класс $S(M)$ является подклассом класса S.

В третьей главе работы рассматривается оценка функционала $a_3 - \alpha a_2^2, \alpha \in R$ в классе S_M^R . Эта задача решается методами теории оптимального управления.

Основная часть

Определение 1. Областью называется открытое множество, любые две точки которого можно соединить некоторой ломаной линией, целиком состоящей из точек этого множества.

Определение 2. Область называется односвязной, если ее граница состоит из континуума или из одной точки или же она является полной плоскостью.

Определение 3. Непрерывной кривой называется множество точек плоскости, прямоугольные координаты (x, y) которых заданы как непрерывные функции

$$x = \varphi(t), \ y = \psi(t)$$

вещественного переменного t в некотором конечном промежутке $a \leq t \leq b$.

Определение 4. Кривые, которые не имеют кратных точек называются простыми кривыми или кривыми Жордана, т.е. непрерывные кривые

$$z = z(t), \ z(t) = \varphi(t) + i\psi(t), \ a \leq t \leq b$$

удовлетворяющие условию, что если для двух различных точек $t', t'', t' < t''$, из $[a, b)$ то имеем $z(t') \neq z(t''), z(b) \neq z(t'')$

Определение 5. Кривая называется гладкой, если в каждой точке отрезка $[a, b]$ существует производная $z'(t)$ (на концах односторонняя), непрерывная и отличная от нуля.

Определение 6. Провести в области B разрез, значит удалить из B все точки, принадлежащие этому разрезу.

Определение 7. Говорит, что функция $\omega = f(z)$ аналитичная в области B, или имеющая там в качестве особых точек только полюсы, однолистно отображает область B на B' плоскости z, если она устанавливает взаимно-однозначное соответствие точкам B и B'.

Определение 8. Обозначим через класс S-класс голоморфных однолистных функций $f(z)$, определенных в $E = \{z : |z| < 1\}$ и имеющих там разложение в ряд Тейлора вида

$$f(z) = z + c_2 z^2 + c_3 z^3 + ... = z + \sum_{n=2}^{\infty} c_n z^n, \ |z| < 1. \tag{1.1}$$

Определение 9. Обозначим через $S(M)$, $M > 1$, класс функций, состоящий из всех функций $f \in S$, удовлетворяющих ограничения $|f(z)| \leq M, z \in E$.

Определение 10. Обозначим через класс S_R^M, $M > 1$, класс аналитических и однолистных в единичном круге $E = \{z : |z| < 1\}$ функций $f(z) = a_1 z + a_2 z^2 + ...$ с вещественными коэффициентами, удовлетворяющих в E неравенству $|f(z)| \leq M$.

Определение 11. Пусть Σ-класс мероморфных однолистных функций $f(z)$, определенных в $D = \{\xi : |\xi| > 1\}$ разложением в ряд Лорана

$$f(z) = \xi + a_0 + \frac{a_1}{\xi} + \frac{a_2}{\xi_2} + ... = \xi + a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{\xi^n}, \ |\xi| > 1. \tag{1.2}$$

Определение 12. Будем говорить, что класс S' плотен в классе S, если S' есть подкласс класса S и если любая функция $f(z) \in S$ может быть приближена последовательностью функций $f_n(z) \in S'$ так, что $f_n(z) \to f(z)$ равномерно на всяком компактном подмножестве круга $|z| < 1$

Определение 13. Введем специальную функцию $\varphi(\tau, \xi)$, регулярную в области $|\tau| > 1, |\xi| > 1$:

$$\varphi(\tau, \xi) = \ln \frac{F(\tau) - F(\xi)}{\tau - \xi} = \sum_{p,q=1}^{\infty} \frac{\omega_{p,q}}{\tau^{p\xi q}} = \sum_{q=1}^{\infty} \omega_q(\tau) \frac{1}{\xi^q},$$

$$\omega_q = \sum_{p,q}^{\infty} \omega_{p,q}(\tau) \frac{1}{\tau^p}, q = 1, 2, ..., F(\xi) \in \Sigma$$

Здесь выбрана та ветвь логарифма, которая обращается в ноль при $\xi = \infty$. Коэффициенты $\omega_{p,q}$, $p, q = 1, 2, ...$-называется коэффициентами Грунского.

Теорема 1. (Основная теорема площадей для функций класса Σ) Пусть $F(\xi) \in \Sigma$, числа $\omega_{p,q}$, $p, q = 1, 2, ...$-коэффициенты Грунского функций $F(\xi) \in \Sigma$; x_p и $x'_p p, q = 1, 2, ...$ -постоянные такие, что $0 < \sum_{p=1}^{\infty} \frac{1}{p} |x_p|^2 < \infty$

и $0 < \sum_{q=1}^{\infty} \frac{1}{q}|x'_q|^2 < \infty$. Тогда

$$\sum_{q=1}^{\infty} q \left| \sum_{p=1}^{\infty} \omega_{p,q} x_p \right|^2 \leq \sum_{p=1}^{\infty} \frac{1}{p}|x_p|^2.$$

Если $\limsup_{p\to\infty} \sqrt[p]{|x^p|} < 1$, то здесь знак равенства имеет место в том и только в том случае, если площадь дополнения $F(|\xi| > 1)$ равна нулю: $\sigma(\bar{B}(F)) = 0, \bar{B}(F) = CF(|\xi| > 1)$.

$$\left| \sum_{q=1}^{\infty} \sum_{p=1}^{\infty} \omega_{p,q} x_p x'_q \right|^2 \leq \sum_{p=1}^{\infty} \frac{1}{p}|x_p|^2.$$

и знак равенства имеет место в том и только в том случае, если

$$\sum_{p=1}^{\infty} \omega_{p,q} x_p x'_q = \lambda \frac{1}{q} \bar{x}'_q, q = 1, 2, ...,$$

где λ-некоторая постоянная

$$|\lambda|^2 = \sum_{p=1}^{\infty} \frac{1}{p}|x_p|^2 \left[\sum_{q=1}^{\infty} \frac{1}{p}|x'_q|^2 \right]^{-1}$$

(В частности $|x_p| = |x'_p|$, $p = 1, 2, ...$, имеем $|\lambda| = 1$).

Теорема 1$'$ Пусть $f_2(z) \in S^2$, x_{2p-1} и $x'_{2p-1}, p = 1, 2, ...$,- постоянные такие, что

$$0 < \sum_{p=1}^{\infty} \frac{1}{2p-1}|x_{2p-1}|^2 < \infty, 0 < \sum_{q=1}^{\infty} \frac{1}{2q-1}|x'_{2q-1}|^2 < \infty$$

Тогда

$$\sum_{q=1}^{\infty} (2q-1) \left| \sum_{p=1}^{\infty} \omega^{(2)}_{2p-1,2q-1} x_{2p-1} \right|^2 \leq \sum_{p=1}^{\infty} \frac{|x'_{2p-1}|^2}{2p-1}.$$

Если $\overline{\lim}_{p\to\infty} \sqrt[2p-1]{|x_{2p-1}|} < 1$, то знак равенств здесь имеет место в том и только в том случае, когда площадь дополнения $f(|z|<1)^{-1}$ равна нулю.

$$\begin{aligned} &\left|\sum_{p,q=1}^{\infty} 2\omega^2_{2p-1,2q-1} x_{2p-1} x'_{2q-1}\right|^2 \le \\ &\le \sum_{p=1}^{\infty} \frac{2|x_{2p-1}|^2}{2p-1} \sum_{q=1}^{\infty} \frac{2|x'_{2q-1}|^2}{2q-1} \end{aligned} \tag{1.3}$$

и знак равенства имеет место в том и только в том случае. если

$$\sum_{p=1}^{\infty} 2\omega^{(2)}_{2p-1,2q-1} x_{2p-1} = \lambda \frac{2}{2q-1} \bar{x}_{2q-1}, \quad q = 1, 2, ...,$$

где λ - некоторая постоянная:

$$|\lambda|^2 = \sum_{p=1}^{\infty} \frac{|x_{2p-1}|^2}{2p-1} \left[\sum_{q=1}^{\infty} \frac{|x'_{2q-1}|^2}{2q-1}\right]^{-1}.$$

Формулы для ω.

$$\begin{gathered} \omega_{11} = c_2, \\ \omega_{13} = c_4 - (2-\delta)c_3c_2 + \frac{1}{6}(2-\delta)(3-\delta)c_2^3, \\ \omega_{33} = c_6 - 2c_5c_2 - 3c_4c_3 + 4c_4c_2^2 + (5-\delta+\delta^2)c_3^2c_2 - \\ -\frac{14+3\delta-3\delta^2}{2}c_3c_2^3 + \frac{40+12\delta-11\delta^2-2\delta^3+\delta^4}{20}c_2^5 \end{gathered}$$

Для $f(z) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k z^k \in S$ справедлива оценка $|c_4| \le 4$ и знак равенства имеет место только для функции Кёбе,

$$f(z) = \frac{z}{(1-\eta z)} \in S, \quad |\eta| = 1 \tag{2.1}$$

Замечание 1. Неравенство

$$\begin{aligned}|c_4| \le \frac{2}{3} + 8x^2 - \frac{14}{3}x^3 + \frac{4(1-x^2)}{6-x} \le \\ \le \frac{2}{3} + 8x^2 - \frac{14}{3}x^3 + \frac{4}{5}(1-x^2) = \\ = \frac{22}{15} + \frac{36}{5}x^2 - \frac{14}{3}x^3, \quad 0 \le x \le 1.\end{aligned} \tag{2.11}$$

дает оценку $|c_4|$ в зависимости от $|c_2| = 2|\omega_{11}^{(2)}| = 2x$:

$$|c_4| \le \frac{22}{15} + \frac{9}{5}|c_2|^2 - \frac{7}{12}|c_2|^3.$$

Эта оценка точна при $|c_2| \le 2$.

Пусть $S(b_1)$ - класс однолистных ограниченных в единичном круге $E = \{z : |z| < 1\}$ функций $f(z)$, удовлетворяющих ограничению $|f(z)| < 1$, с разложением в ряд

$$f(z) = \sum_{\nu=1}^{\infty} b_\nu z^\nu, 0 < b_1 < 1. \tag{3.1}$$

Этот класс часто изучается в нормированной эквивалентной форме

$$\begin{gathered}F(z) = b^{-1} f(z) = z + \sum_{\nu=2}^{\infty} a_\nu z^\nu, \qquad 0 < b_1 \le 1 \\ |F(z)| \le b_1^{-1}, \qquad a_\nu = \frac{b_\nu}{b_1}\end{gathered} \tag{3.2}$$

Полагая $1/b_1 = M$, получим, что $F(z) \in S(M), M > 1$.

Поставим задачу, найти оценку модуля четвертого коэффициента a_4, в зависимости от b_1. Для этой цели воспользуемся неравенствами Грунского-Нехари. Такие неравенства впервые были применены В.Сингхом при решении аналогичной задачи в классе $S_R(b_1)$ ограниченных однолистных функций с действительными коэффициентами. Этот метод дает точную оценку для $|a_4|$ в интервале значений b_1 вблизи нуля и единицы.

Теорема 2. В классе $S(b_1)$ ограниченных однолистных функций модуль четвёртого коэффициента удовлетворяет неравенству

$$|a_4| \le 4 - 20b_1 + 30b_1^2 - 14b_1^3 \tag{3.46}$$

по крайней мере в интервале

$$0 \le b_1 \le \frac{1}{700}. \tag{3.47}$$

Равенство в (3.46) возможно только в случае отображения

$$P_{b_1}(z) = K^{-1}[b_1 K(z)], \qquad K(z) = \frac{z}{(1-z)^2}.$$

Заметим, что мы использовали достаточно грубую оценку для получения результата изложенного в Теореме 2. Попытаемся теперь расширить диапазон значений коэффициента b_1, посредством выбора оптимального параметра α в неравенстве

$$a_4 - (4 - 20b_1 + 30b_1^2 - 14_1^3) \le \left(\frac{4}{3\alpha} + (1-b_1)(11b_1 - 1)\right) x$$
$$- \left(\frac{3+2b_1}{2} + \frac{1}{3\alpha}\right) x^2 + \frac{7}{12} x^3 - \left(\frac{5}{2} - 4b_1 + \frac{1}{3\alpha} - \alpha - \frac{5}{4}x\right) y^2.$$

Теорема 3. При надлежащем выборе положительного параметра α, мы получаем следующую оценку для a_4 в зависимости от x:

$$a_4 - (4 - 20b_1 + 30b_1^2 - 14b_1^3) \le \frac{1}{3} x M(x) \tag{3.60}$$

где

$$M(x) = 3(1-b_1)(11b_1 - 1) - \frac{3}{2}(3 + 2b_1)x + \frac{7}{4}x^2 +$$
$$+\frac{3}{2}(4-x)\left[\sqrt{\left(\frac{4}{3} + \left(\frac{5}{2} - 4b_1 - \frac{5}{4}x\right)^2\right)} - \left(\frac{5}{2} - 4b_1 - \frac{5}{4}x\right)\right]. \tag{3.61}$$

С помощью этого неравенства мы можем расширить интервал значений b_1, для которого оценка (3.60) допустима. Действительно, это неравенство зависит, исключительно , от знака $M(x)$ в интервале $0 \le x \le 2(1-b_1)$

С помощью библиотеки sympy для языка Python 3.10, было найдено, что $M(x)$ принимает отрицательные значения по меньшей мере для $b_1 < \frac{3}{100}$. Также было найдено, что значение $M(0)$ положительно для $b_1 = \frac{1}{25}$, а это показывает, что данный метод не может быть расширен за пределы этих точек.

Равенство в

$$a_4 \le \frac{2}{3}(1-b_1^3) \qquad\qquad 1 \ge b_1 \ge \frac{19}{34} \tag{3.70}$$

возможно только для функций из класса $S(b_1)$ с $a_2 = a_3 = 0$. Экстремальная функция имеет вещественные коэффициенты и отображает круг E на единичный круг с разрезом вдоль отрезков на мнимой оси.

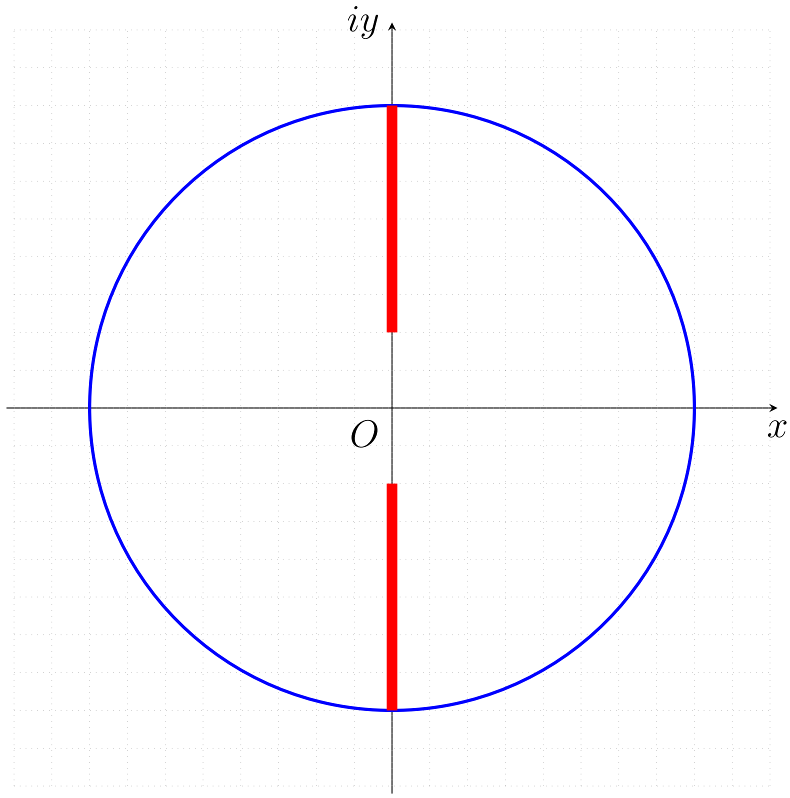

Рисунок 1 — Единичный круг с разрезом на мнимой оси

В этой части выпускной квалификационной работы рассмотрим применение методов теории оптимального управления к решению экстремальной задачи об оценке коэффициентного функционала $I(f) = a_3 - \alpha a_2^2, \alpha \in R$ в классе S_R^M ограниченных однолистных функций с вещественными коэффициентами.

Полагаем, что справедлива следующая теорема

Теорема 4 Если $f \in S_R^M$, то справедливы оценки

$$I(f) \leq \begin{cases} (5-4\alpha)/M^2 - 8(1-\alpha)/M + 3 - 4\alpha, & a \leq /(1-M) \\ 2(\beta-1)^2/M^2 + 1 - 1/M^2, & 1/(1-M) \leq \alpha \leq 1 - 1/\log M \\ 1 - 1/M^2, & \alpha \leq 1 - 1/\log M, \end{cases}$$

где $\beta \in (1, M)$ — является единственным вещественным корнем уравнения

$$\log(\beta/M) + \alpha/(1-\alpha) + 1/\beta = 0$$

и

$$I(f) \geq \begin{cases} 1/M^2 - 1, & \alpha \leq 1 \\ (5-4\alpha)/M^2 - 8(1-\alpha)/M + 3 - 4\alpha, \alpha \geq 1. \end{cases}$$

Все оценки точные.

Производящим для класса S_R^M является дифференциальное уравнение Лёвнера с ядром Пуассона в правой части

$$\frac{dw}{dt} = -w\frac{1-w^2}{1-uw+w^2}, \tag{4.1}$$
$$w|_{t=0} = z, -2 \leq u \leq 2, t \geq 0.$$

Известно, что его интегралы $w(z,t)$ представляют всюду плотный подкласс класса S_R^M функций $f(z)$ определённых формулой

$$f(z) = Mw(z, \log M) \tag{4.2}$$

Доказательство теоремы проводится применением методов оптимизации к решению экстремальных задач на классах однолистных функций, с применением принципа максимума Понтрягина.

Заключение. Были рассмотрены: применение метода площадей к задаче об оценке модуля четвёртого коэффициента в классе S, задача об оценке $|c_4|$ в классе $S(M)$ ограниченных однолистных функций. Решение этой задачи было приведено для значений M близких к 1 и для достаточно больших значений M. Экстремальные функции при этом разные. Также была рассмотрена оценка функционала $a_3 - \alpha a_2^2, \alpha \in R$ в классе S_M^R. Эта задача была решена методами теории оптимального управления.