МИНОБРНАУКИ РОССИИ

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«САРАТОВСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ Н.Г. ЧЕРНЫШЕВСКОГО»

Кафедра математического анализа

Связь свойств управляющей функции и лёвнеровских халлов

АВТОРЕФЕРАТ БАКАЛАВРСКОЙ РАБОТЫ

студента (ки) 4 курса 421 группы

направления 02.03.01 Математика и компьютерные науки

механико-математического факультета

Павленко Олега Олеговича

Научный руководитель

доцент к.ф.-м.н. ________________ А.М.Захаров

подпись, дата

Заведующий кафедрой

и.о. зав. кафедрой, д.ф.-м.н. ________________ П.А.Терехин

подпись, дата

Саратов 2024

Введение. Основными задачами моей дипломной работы являются исследование уравнения Лёвнера и особенностей отображений, удовлетворяющих этому уравнению. Также моей целью было нахождение способа визуализации отображений, соответствующих различным примерам функций с управлением в виде квадратного корня. В качестве материалов исследования были рассмотрены статьи зарубежных научных журналов, а так же результаты работ сотрудников кафедры математического анализа.

В первой главе моей дипломной работы рассмотрены базовые понятия и определения, касающиеся самого уравнения Лёвнера, показаны некоторые примеры использования уравнения, а также его вывод.

Во второй главе по пунктам рассмотрены некоторые различные варианты функций уравнения Лёвнера с управлением в виде квадратного корня и описано поведение кривых, порождаемых уравнением, в случае конечной и бесконечной сингулярности времени, а также для различных коэффициентов k в управлении.

В третьей главе описывается способ, с помощью которого можно построить халл на полуплоскости по заданной функции с управлением в виде квадратного корня. Этот способ используется в создании программы, благодаря которой стало возможным визуализировать это построение. Большая часть изображений в моей дипломной работе построена именно с помощью этой программы, что подчеркивает значимость моей дипломной работы, ведь благодаря ей, появилась возможность достаточно точно получить графическое подтверждение уже полученных или новых результатов, касающихся функций уравнения Лёвнера с управленеим в виде квадратного корня и полученных таким образом решений.

Основное содержание работы. Основной объект изучения, рассматриваемый в данной работе – это уравнение Лёвнера. Это уравнение было введено чешским математиком Карлом Лёвнером. Дифференциальное уравнение Лёвнера послужило основным инструментом для изучения свойств однолистных функций на единичном круге.

Хотя существует довольно много версий дифференциального уравнения Лёвнера, зависящих от интересующей нас области, например, существуют версии на круге, верхней полуплоскости, на различных кольцевых областях и другие, еще более разнообразные, основное внимание уделено хордовому уравнению Лёвнера, которое является уравнением Лёвнера в верхней полуплоскости. Однако в некоторых контекстах может оказаться полезным использование радиального уравнения Лёвнера в круге. Рассмотрим оба случая.

Как было сказано выше, радиальное уравнение Лёвнера генерирует функцию, которая переводит подмножество окружности на всю окружность.

Уравнение имеет вид:

$$\frac{\partial}{\partial t} g(t,z) = -g(t,z)\frac{g(t,z)+\xi(t)}{g(t,z)-\xi(t)} \tag{1.1}$$

с начальным условием:

$$g(0,z) = z, \tag{1.2}$$

где $\xi : [0,T] \to \mathcal{R}$ - непрерывная функция функция от t и $z \in \{z : |z| < 1\}$.

Если же рассматривать хордовое уравнение Лёвнера, то этот случай также можно рассматривать в двух вариантах относительно течения времени:

1) В прямом направлении

2) В обратном направлении

Прямая версия хордового уравнения Лёвнера представляет собой дифференциальное уравнение, имеющее вид:

$$\frac{\partial}{\partial t} g(t,z) = \frac{2}{g(t,z)-\xi(t)} \tag{1.3}$$

с начальным условием (1.2),

где $\xi : [0,T] \to \mathcal{R}$ непрерывна, а область для z является верхней полуплоскостью, обозначаемой $\mathcal{H} = \{z \in \mathbb{C} : Im(z) > 0\}$. Из теоремы существования и единственности решения дифференциальных уравнений следует, что каждому $z \in \mathcal{H}$ соответствует некоторый промежуток времени $[0, t_0)$ такой, что существует единственное решение (1.3).

Теперь рассмотрим уравнение Лёвнера с геометрической точки зрения. Решение уравнения Лёвнера с управлением $\xi(t)$ показывает переход от простой кривой, которая остается над действительной линией, к кривой, пересекающей действительную линию, что аналогично переходу, осуществляемому при k=4 в SLE. По мере написания данной работы будут использоваться такие обозначения как $g_t(z)$, что по сути является эквивалентным аналогом $g(t, z)$.

Пусть z_0 - такая точка, что знаменатель правой части (1.3) равен нулю, т.е. $g(t, z_0) = \xi(t)$. В результате производная $\partial_t g(t, z)$ испытывает сингулярность в этой точке. Следовательно, мы можем заключить, что z_0 не входит в нашу область.

При определенных условиях на ξ мы можем гарантировать, что множество всех таких точек порождает кривую, берущую своё начало на вещественной оси. Однако кривая может вырождаться в некоторую область в зависимости от функции ξ. Будем обозначать эту кривую γ. Чтобы выразить её в виде формулы, положим $T_z = sup\{t_0 \in [0, T] : g(t, z)$ существует на $[0, t_0)\}$. Это дает нам наибольшее возможное значение t такое, при котором решение $g(t, z)$ имеет смысл. Определим теперь $G_t = \{z \in \mathcal{H} : t < T_z\}$, где содержатся только те точки из $\mathcal{H}$, которые в течение некоторого времени $t < T_z$ делают точки $\partial_t g$ сингулярными. Теперь G_t - наша область для (1.3).

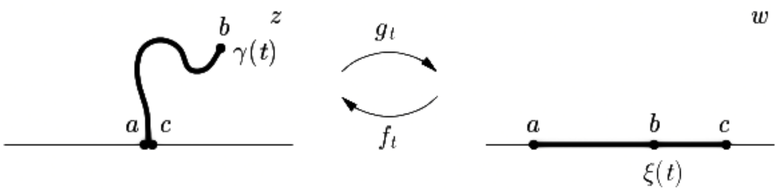

Рис. 1: Вертикальная линия после отображения становится горизонтальной линией на вещественной оси.

На самом деле G_t фактически является односвязной подобластью в $\mathcal{H}$, независимо от ξ. Так как ξ непрерывно порождает новое отображение G_t для каждого последующего значения t, то γ также непрерывна по t. Мы можем далее определить $\gamma(t)$ как кривую в $\mathcal{H}\cup 0$, где $\gamma(0)=0$ и $t\in[0,T]$. Интересно отметить, что, поскольку ξ вещественно, каждая точка $z\in\gamma$ соответствует вещественнозначной g, поэтому γ отображается на вещественную ось. Так как ξ непрерывно порождает новое отображение G_t для каждого последующего значения t, то γ также непрерывна по t. Мы можем далее определить $\gamma(t)$ как кривую в $\mathcal{H}\cup 0$, где $\gamma(0)=0$ и $t\in[0,T]$. Интересно отметить, что, поскольку ξ вещественно, каждая точка $z\in\gamma$ соответствует вещественнозначной g, поэтому γ отображается на вещественную ось. Как это показано на рисунке 1 выше, кривая γ на плоскости z переходит в линейную границу на плоскости w таким образом, что две соседние точки плоскости z находятся далеко друг от друга на плоскости w.

По мере написания данной работы будут использоваться такие обозначения как $g_t(z)$, что по сути является эквивалентным аналогом $g(t,z)$. С учетом этого, обыкновенное дифференциальное уравнение Лёвнера (1.3) принимает вид:

$$\frac{dg_t}{dt}=\frac{2}{g_t-\xi(t)} \tag{1.4}$$

с начальным условием

$$g_0=z \tag{1.5}$$

для всех z в $\mathcal{H}$.

Здесь значение ξ в момент времени t - это просто образ точек кривой $\gamma(t)$ под действием конформного отображения g_t. Как и было сказано выше, функция $\xi(t)$ так же называется управляющей функцией уравнения Лёвнера. Она непрерывна и вещественнозначна.

Дифференциальное уравнение Лёвнера (1.4), в свою очередь, обратно имеет решение для любой заданной непрерывной вещественной функции $\xi(t)$ и порождает функцию $g_t(z)$. Для каждого значения времени t эту функцию можно представить как отображение вида $w=g(t)$, которое переводит некоторое связное подмножество верхней полуплоскости z области $\mathcal{R}$ во всю область $\mathcal{H}$ над вещественной осью плоскости w. Соответсвенно, существует обратная функция $f_t(w)$, которая удволетворяет условию $g_t(f_t(w)) = w$, для всех w в верхней полуплоскости. Эта функция отображает область $\mathcal{H}$ плоскости w в область $\mathcal{R}$ плоскости z. Тогда по теореме Лёвнера о частных производных, она удволетворяет дифференциальному уравнению:

$$\frac{\partial f_t(w)}{\partial t} = -\frac{2}{w - \xi(t)} \frac{\partial f_t(w)}{\partial w} \tag{1.6}$$

Уравнение Лёвнера постоянно порождает новые сингулярные точки конформного отображения g_t, которые отобржают g_t на соответсвующие точки $\xi(t)$ в плоскости w. Таким образом, с течением времени точки непрерывно удаляются из области R. При этом, если $\xi(t)$ является достаточно гладкой функцией, то эти сингулярные точки образуют простую кривую γ, состоящую из точек $z_c(t)$ (если взять $\xi(t)$ в качестве управляющей функции, соответствующей данной кривой $\gamma(t)$, то точки $z_c(t)$ будут совпадать с данной кривой $\gamma(t)$). Это происходит когда знаменатель в (1.6) обращается в ноль, и тогда $z_c(t)$ удволетворяют условию, которое также называется сингулярностью:

$$g_t(z_c(t)) = \xi(t) \tag{1.7}$$

Такая кривая и называется лёвнеровским халлом, ее также называют следом эволюции Лёвнера или, реже, линией сингулярности.

Итак, как мы определили выше, управляющая функция особым образом порождает кривые, генерируемые уравнением Лёвнера, поэтому вид и форма таких кривых как раз зависит от управляющей функции. Рассмотрим частные случаи управления в виде квадратного корня уравнения Лёвнера и графики для них.

Управление, как функция квадратного корня времени имеет два частных случая:

1) В первом случае, управление имеет бесконечную по времени сингулярность с управлением:

$$\xi(t) = 2\sqrt{kt}, \qquad k \geq 0. \tag{2.1}$$

Как будет показано далее, здесь точки кривой $z_c(t)$ - просто образуют прямую линию, как уже ясно из условий мастабирования (1.9).

2) В втором случае, управлениее имеет конечную временную сингулярность, основанную на (1.12), то есть:

$$\xi(t) = 2\sqrt{k(1-t)}, \qquad 0 \leq t \leq 1, \qquad k \geq 0. \tag{2.2}$$

Здесь результат построения кривой непосредственно меняется при изменении коэффицента k, причем критическим случаем является $k = 4$, когда кривая проходит через вещественную ось.

Уравнением Лёвнера с управлением в виде квадратного корня для бесконечной сингулярности времени имеет вид:

$$\frac{dg_t}{dt} = \frac{2}{g - \sqrt{kt}} \tag{2.3}$$

А график в этом случае выглядит следующим образом:

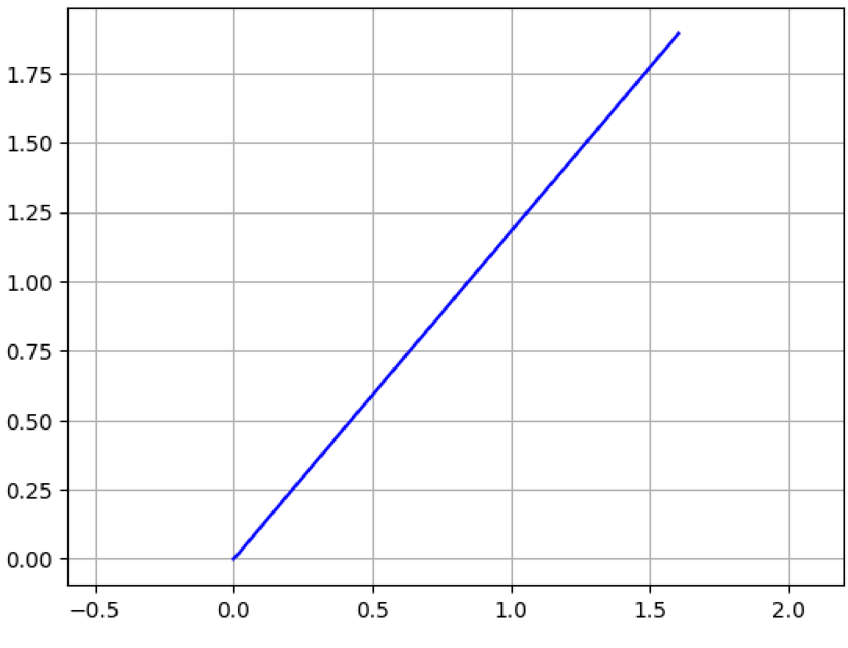

Рис. 3: Кривая с управлением в виде квадратного корня $\xi(t) = 2\sqrt{t}$ бесконечной сингулярности времени.

Здесь точки $z_c(t)$ принимают форму кривой, расположенная под углом, принимающим значение:

$$\phi = \frac{1}{2}\pi(1 - \frac{\sqrt{k}}{\sqrt{k+4}}) \tag{2.4}$$

При чем для $k = 0$ известно, что линия перпендикулярна вещественной оси, а по мере того, как $k \to \infty$ угол пересечения становится все меньше и меньше.

Теперь перейдем к управлению (2.2) с сингулярностью при конечном времени. В этом случае зависимость от времени пропадает и тогда, уравнение для порождаемой кривой принимает вид:

$$H(\sqrt{2k}) = -\ln(1-t) + H(z_c(t)). \tag{2.5}$$

Далее отдельно рассмотрим каждый из случаев коэффициента $k > 4$, $k < 4$ и $k = 4$.

Когда коэффициент $k < 4$, действительная и мнимая части $H(z)$ принимают вид логарифмической спирали.

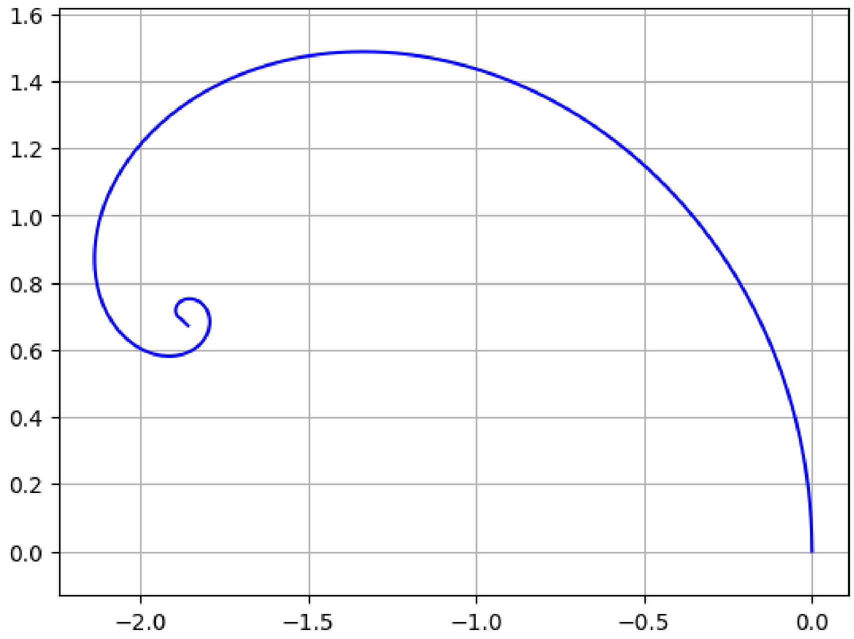

Рис. 4: Здесь управление в виде квадратного корня $\xi(t) = 2\sqrt{3.5(1-t)}$.

Для случая, когда кэффициент $k > 4$, кривая принимает вид "перечесения".

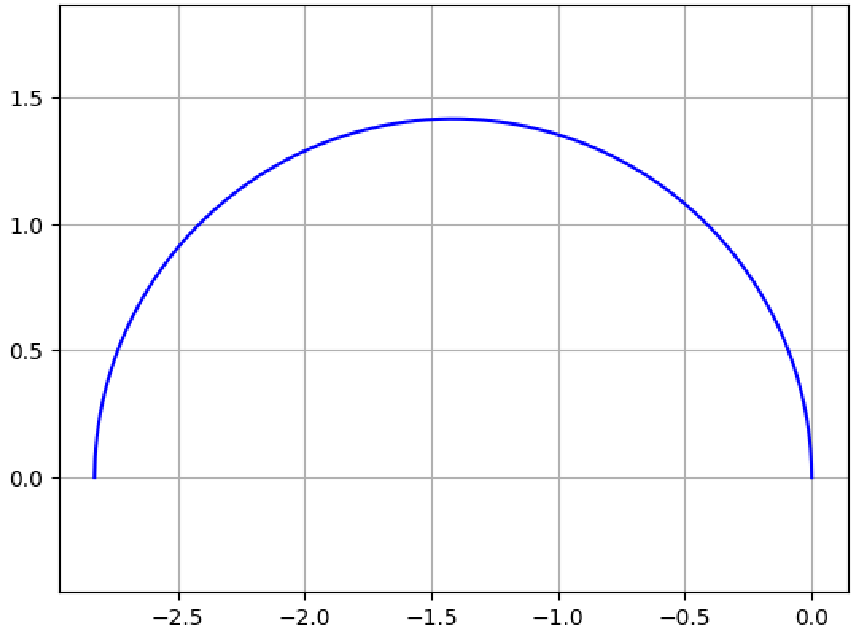

Рисунок 6: Кривая с управлением в виде квадратного корня с коэффициентом $\xi(t) = 2\sqrt{4.5(1-t)}$ пересекает действительную линию под углом, который зависит от коэффициента k.

Для случая, когда кэффициент k в управлении равен 4:

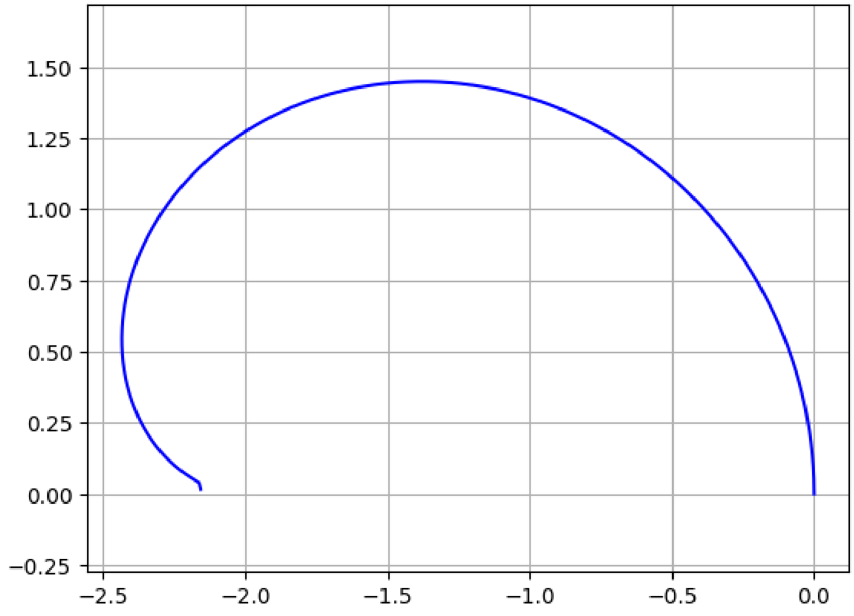

Рисунок 9: Кривая с управлением в виде квадратного корня $\xi(t) = 2\sqrt{4(1-t)}$.

Здесь порождаемый халл принимает вид, так называемой, критической кривой сингулярностей. В этом случае кривая сталкивается с вещественной линией.

Одной из главных целей моей работы являлось создание программы, способной по заданной управляющей функции в виде квадартного корня построить порождаемый уравнением Лёвнера халл. Представленные выше халлы были проиллюстрированы с помощью программы, созданной на основе данных алгоритма представленного в работе. Таким образом, появляется возможность продемонстрировать поведение кривых для различных управляющих функций в виде квадратного корня.

Заключение. В данной работе было исследовано уравнение Лёвнера и изучена связь свойств его управляющей функции с лёвнеровскими халлами на примере урпавления в виде квадратного корня. Основная часть работы посвящена изучению влияния управляющих функций на решения уравнения Лёвнера. Так, были перечислены наиболее часто встречающиеся, а также наиболее интересные примеры управляющих функций в виде квадратного корня при различных коэффициентах k. К самостоятельной части относится разработка программы, позволяющей визуализировать решения уравнения Лёвнера для наперёд заданных управляющих функций в виде квадратного корня.