МИНОБРНАУКИ РОССИИ
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«САРАТОВСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ Н.Г. ЧЕРНЫШЕВСКОГО»

Кафедра геометрии

Каноническое разложение тензора кривизны Схоутена

АВТОРЕФЕРАТ БАКАЛАВРСКОЙ РАБОТЫ

студента 4 курса 421 группы
направления 02.03.01 Математика и компьютерные науки
механико-математического факультета

Каренина Николая Евгеньевича

Научный руководитель
доцент, к.п.н., доцент ____________________ А.В. Букушева
подпись, дата

И.о. зав. кафедрой
к.п.н., доцент ____________________ А.В. Букушева
подпись, дата

Саратов 2024

Введение. Дифференциальная геометрия изучает гладкие структуры на гладких многообразиях. Среди самых распространённых структур особенно выделяются риманова метрика и контактная форма.

На римановом многообразии определена каноническая связность – связность Леви-Чивиты, которая, в свою очередь, определяет тензор кривизны Римана. Пространство алгебраических тензоров кривизны, т.е. пространство тех тензоров, алгебраические свойства которых совпадают со свойствами тензора кривизны Римана, раскладывается под действием ортогональной группы в прямую сумму трёх неприводимых представлений. Обращение в нуль компонент в этом разложении определяет геометрию риманова многообразия.

Контактные многообразия представляют собой гладкое многообразие вместе с распределением $\mathcal{D}$ коразмерности 1. Если на $\mathcal{D}$ задана риманова метрика, то многообразие называется контактным метрическим многообразием.

На контактном метрическом многообразии канонически определяется частичная связность, а по аналогии с тензором кривизны Римана строится тензор кривизны Схоутена.

Тензор кривизны Схоутена был впервые введён в работе В.В. Вагнера[1].

В контексте почти контактных метрических многообразий тензор кривизны Схоутена был введён и изучался в работах[2] [3].

В данной работе рассматривается K-контактное многообразие с введённым на нём тензором кривизны Схоутена, названным в работе[4] кривизной распределения.

Предполагается показать, что тензор кривизны Схоутена K-контактного многообразия распадается на три части, соответсвующие аналогам скалярной кривизны, бесследовой части тензора Риччи и тензора кривизны Вейля

[1]Вагнер В.В. Геометрия $(n-1)$-мерного неголономного многообразия в n-мерном пространстве // Тр. Семинара по векторному и тензорному анализу. – М.: Изд-во Моск. ун-та. 1941. – Вып.5. – С. 173-255.

[2]Галаев С. В. Геометрическая интерпретация тензора кривизны Вагнера для случая многообразия с контактной метрической структурой //Сибирский математический журнал. – 2016. – Т. 57. – №. 3. – С. 632.

[3]Галаев С. В. Обобщенный тензор кривизны Вагнера почти контактных метрических пространств //Чебышевский сборник. – 2016. – Т. 17. – №. 3 (59). – С. 53-63.

[4]Галаев С. В. Внутренняя геометрия метрических почти контактных многообразий //Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия Математика. Механика. Информатика. – 2012. – Т. 12. – №. 1. – С. 16-22.

риманова многообразия. На основе полученного разложения исследуется геометрическая интерпретация вейлевой части тензора кривизны Схоутена.

Полученный результат позволит исследовать роль внутренней скалярной кривизны и внутренней кривизны Риччи в геометрии K-контактных многообразий.

Структура работы:

- в первом разделе приводятся основные сведения из дифференциальной геометрии;

- в разделах 2 и 3 даны определения ключевых понятий работы: K-контактного многообразия, частичной связности, тензора кривизны Схоутена, а также приводится каноническое разложение тензора кривизны Схоутена;

- в заключительном разделе работы даётся геометрическая интерпретация компоненты Вейля тензора кривизны Схоутена.

Основное содержание работы.

Определение 2.1. Пусть M – гладкое многообразие, $\mathcal{D} \subset TM$ – подрасслоение, $g \in \Gamma(S^2\mathcal{D}^*)$ и $\forall p \in M$ g_p – положительно-определённая форма. Тогда тройка $(M, \mathcal{D}, g)$ называется *субримановым многообразием.* Тензорное поле g называется, в свою очередь, *субримановой метрикой.*

Иными словами, субримановым многообразием называется гладкое многообразие с указанным подрасслоением его касательного расслоения и заданным в каждом его слое скалярным произведением. Риманово многообразие является, тем самым, частным случаем субриманова многообразия.

В дифференциальной геометрии любое подрасслоение $\mathcal{D} \subset TM$ принято называть распределением.

Определение 2.5. Гладкое многообразие M нечётной размерности называется *почти контактным многообразием*, если существуют такие тензорные поля $\varphi \in \Gamma(TM \otimes T^*M), \xi \in \Gamma(TM), \eta \in \Gamma(T^*M)$, что

$$\varphi^2 = -I + \eta \otimes \xi, \quad \eta(\xi) = 1.$$

Тройка (φ, ξ, η) называется *почти контактной структурой* на многообразии M.

Определение 2.9. Пусть (M, η) – контактное многообразие и (φ, ξ, η, g) – ассоциированная с M почти контактная метрическая структура. Тогда тройку (M, η, g) будем называть *контактным метрическим многообразием.*

Определение 2.10. Контактное метрическое многообразие (M, η, g) называется K-контактным многообразием, если ассоциированная с ним почти контактная метрическая структура (φ, ξ, η, g) такова, что векторное поле ξ киллингово, т.е. $\mathcal{L}_\xi g = 0$.

Рассматриваются координаты специального вида.

Определение 2.12. Пусть M – контактное метрическое многообразие размерности $2n + 1$, $p \in M$ и $U \subset M$ – окрестность точки p. Локальные координаты $x^1, \ldots, x^{2n}, x^{2n+1}$ в U назовём *адаптированными координатами*, если $\forall x \in U$ $\frac{\partial}{\partial x^{2n+1}}|_x = \xi_x$.

Определение 2.13. Пусть M – контактное метрическое многообразие размерности $2n+1$. Репер $(X_1, \ldots, X_{2n}, X_{2n+1})$ в касательном расслоении TM назовём *адаптированным*, если $\langle X_1, \ldots, X_{2n} \rangle = \mathcal{D}$ и $X_{2n+1} = \xi$.

Предложение 2.4. Пусть $(M, \mathcal{D}, g)$ – контактное метрическое многообразие. Тогда для любой точки многообразия M найдётся окрестность $U \subset M$, что существует адаптированный репер.

Предложение 2.5. Пусть M – контактное метрическое многообразие, $(X_1, \ldots, X_{2n}, \xi)$ – адаптированный репер на M. Тогда верно равенство

$$[X_i, X_j] = \mathrm{d}\eta(X_j, X_i)\xi, \quad i, j = 1, \ldots, 2n.$$

Введение адаптированных координат приводит к упрощённой записи многих формул.

В третьем разделе вводится аналог связности Леви-Чивиты для контактного метрического многообразия.

Определение 3.1. Пусть $(M, \mathcal{D}, g)$ – контактное метрическое многообразие. Отображение

$$\nabla : \Gamma(\mathcal{D}) \times \Gamma(\mathcal{D}) \to \Gamma(\mathcal{D})$$

называется *частичной связностью*, если

1. $\forall X, Y, Z \in \Gamma(\mathcal{D})$ $\forall f, g \in C^\infty(M)$ $\nabla_{fX+gY} Z = f\nabla_X Z + g\nabla_Y Z$,
2. $\forall X, Y, Z \in \Gamma(\mathcal{D})$ $\nabla_X(Y + Z) = \nabla_X Y + \nabla_X Z$,

3. $\forall X, Y \in \Gamma(\mathcal{D})\ \forall f \in C^\infty(M)\ \nabla_X(fY) = f\nabla_X Y + X(f)Y$.

Определить понятие кривизны для произвольного субриманова многообразия с распределением контактного типа представляется нетривиальной задачей. Этот вопрос изучался многими авторами. В статье[5] исследуется подход через, так называемую, внутреннюю геометрию многообразия, что означает изучение геометрических объектов, заданных на контактном распределении, т.е. допустимых тензорных полей.

Поскольку в данной работе изучается именно внутренняя геометрия многообразия, т.е. геометрия контактного распределения, то вводимый в данном разделе тензор кривизны Схоутена будет также именоваться кривизной распределения.

Пусть M – субриманово многообразие, $\mathcal{D}$ – распределение коранга 1 на M. И пусть задано оснащение $D^\perp$. Обозначим через P и Q проекции касательного расслоения TM на распределение и на оснащение, соответсвенно.

Определение 3.2. *Тензором кривизны Схоутена* частичной связности ∇ субриманова многообразия с оснащением называется отображение $S : \Gamma(\mathcal{D}) \times \Gamma(\mathcal{D}) \times \Gamma(\mathcal{D}) \to \Gamma(\mathcal{D})$, определённое следующим образом:

$$S(X,Y)Z := \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{P[X,Y]} Z - P[Q[X,Y], Z],\ \ X, Y, Z \in \Gamma(\mathcal{D}).$$

Теорема 3.2. Пусть $(M, \mathcal{D}, g)$ – контактное метрическое многообразие, ∇ – частичная связность, $h = g|_{\mathcal{D}}$. Тогда для любых $X, Y, Z \in \Gamma(\mathcal{D})$ верна формула

$$\begin{aligned} 2h(\nabla_X Y, Z) = X(h(Y,Z)) + Y(h(X,Z)) - Z(h(X,Y)) - h(X, P[Y,Z]) - \\ -h(Y, P[X,Z]) + h(Z, P[X,Y]). \end{aligned}$$

В следующей теореме приводятся алгебраические свойства тензора кривизны Схоутена.

Теорема 3.3. Пусть M – K-контактное многообразие, $X, Y, Z, W \in \Gamma(\mathcal{D})$. Тогда

[5] Галаев С. В. Почти контактные метрические пространства с N-связностью //Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия Математика. Механика. Информатика. – 2015. – Т. 15. – №. 3. – С. 258-264.

1. $S(X,Y) = -S(Y,X)$,
2. $g(S(X,Y)Z,W) = -g(S(X,Y)W,Z)$,
3. $S(X,Y)Z + S(Z,X)Y + S(Y,Z)X = 0$,
4. $g(S(X,Y)Z,W) = g(S(Z,W)X,Y)$.

Далее приводится разложение пространства алгебраических тензоров кривизны под действием ортогональной группы. Этот классический результат можно найти в книге[6].

Теорема 3.5. Если $m > 4$, то $O(V,g)$-модуль $\mathcal{C}(V)$ раскладывается в прямую сумму однозначно определённых неприводимых представлений:

$$\mathcal{C}(V) = \mathcal{U} \oplus \mathcal{Z} \oplus \mathcal{W}.$$

Тем самым, имеем разложение тензора кривизны Схоутена

$$K = \frac{\mathrm{Scal}}{2m(m-1)} g \owedge g + \frac{1}{m-2}(\mathrm{Ric} - \frac{\mathrm{Scal}}{m} g) \owedge g + W,$$

где $W \in \mathcal{W}$ и носит название тензора Вейля в римановой геометрии. Геометрическую интерпретация этого тензора для K-контактных многообразий составляет основной результат работы.

В римановой геометрии тензор Вейля играет важнейшую роль. Он служит инвариантом конформной структуры риманова многообразия. Изучение геометрических свойств тензора Вейля риманова многообразия приводит к глубоким результатам о их строении. Приведём один из главных таких результатов.

Теорема 4.1. Пусть (M,g) – риманово многообразие размерности $n \geq 4$, W – тензор Вейля, полученный из разложения на неприводимые компоненты тензора кривизны Римана. Тогда $W = 0 \Leftrightarrow (M,g)$ конформно плоское.

В работе рассматривается выражение тензора кривизны Схоутена и его свёрток при конформной замене метрики на многообразии.

Приводятся формулы, показывающие, как меняются контактная форма и оснащение при конформной замене метрики.

[6]Besse A. L. Einstein manifolds. – Springer, 2007

Предложение 4.2. Пусть M – контактное метрическое многообразие, g – риманова метрика на M, $f \in C^\infty(M), \tilde{g} = e^{2f}g$, $\widetilde{\eta}, \widetilde{\xi}$ – контактная форма и оснащение, ассоциированные с $\tilde{g}$. Тогда верны следующие формулы

$$\widetilde{\eta} = e^f \eta, \widetilde{\xi} = e^{-f}\xi.$$

Следующей теоремой устанавливается факт того, что при конформной замене метрики не происходит выхода за рамки класса K-контактных многообразий.

Теорема 4.2. Пусть M – K-контактное многообразие, $f \in C^\infty(M)$, $\xi f = 0$, $\widetilde{g} = e^{2f}g$ – конформная замена римановой метрики на M. Тогда $(M, \widetilde{\eta}, \widetilde{\xi}, \widetilde{g})$ – K-контактное многообразие.

Конформная замена частичной связности.

Предложение 4.3. Пусть M – K-контактное многообразие, $\mathcal{D}$ – контактное распределение, g – субриманова метрика и ∇ – частичная связность на $\mathcal{D}$. Обозначим также за $\tilde{\nabla}$ частичную связность на $\mathcal{D}$, согласованную с $\tilde{g} = e^{2f}g$, где f – некоторая гладкая функция. Тогда для любых $X, Y \in \Gamma(\mathcal{D})$ выполнено следующее равенство

$$\tilde{\nabla}_X Y = \nabla_X Y + Xf \cdot Y - Yf \cdot X - g(X, Y) \cdot \operatorname{grad} f.$$

Пусть g – субриманова метрика на K-контактном многообразии M, функция $f \in C^\infty(M)$, $\xi f = 0$ и $\tilde{g} = e^{2f}g$. Обозначим за K тензор кривизны Схоутена многообразия M, через Ric – его свёртку, тензор Риччи, через Scal – скалярную кривизну Схоутена; и, соответсвенно, обозначим тензор кривизны Схоутена и его свёртки для новой метрики $\tilde{g}$ теми же буквами, но с тильдой, т.е. $\widetilde{K}$, $\widetilde{\mathrm{Ric}}$ и $\widetilde{\mathrm{Scal}}$.

В следующем предложении указаны формулы, которые связывают K, Ric и Scal с $\widetilde{K}$, $\widetilde{\mathrm{Ric}}$ и $\widetilde{\mathrm{Scal}}$.

Предложение 4.4. Пусть M – K-контактное многообразие, положим размерность M равную $m+1$. Тогда верны следующие формулы

$$\widetilde{K} = e^{2f}(K - (\nabla^2 f) \owedge g + (\mathrm{d}f \otimes \mathrm{d}f) \owedge g - \frac{1}{2} g(\operatorname{grad} f, \operatorname{grad} f)^2 (g \owedge g)),$$

$$\widetilde{\mathrm{Ric}} = \mathrm{Ric} - (m-2)(\mathrm{d}f \otimes \mathrm{d}f) - (\Delta f + (m-2)g(\operatorname{grad} f, \operatorname{grad} f)^2)g,$$

$$\widetilde{\mathrm{Scal}} = e^{-2f}(\mathrm{Scal} - 2(m-1)\Delta f - (m-1)(m-2)g(\operatorname{grad} f, \operatorname{grad} f)^2),$$

$$\widetilde{W} = e^{2f}W.$$

Доказывается техническая лемма, на утверждение которой опирается затем доказательство основного результата работы.

Лемма 4.1. Пусть M – K-контактное многообразие размерности $2n+1$. Тогда на M существует риманова метрика $\overline{g}$, и такие локальные координаты, что

$$R_{ijkl} = S_{ijkl}, \quad i, j, k, l = 1, \ldots, 2n,$$

где R – тензор кривизны Римана связности Леви-Чивиты римановой метрики $\overline{g}$, S – тензор кривизны Схоутена.

Наконец, формулируется и доказывается главный результат работы, связывающий внутреннюю геометрию контактного распределения с геометрией K-контактного многообразия.

Теорема 4.3. Пусть M – K-контактное многообразие размерности $2n+1$. Тогда на M существует риманова метрика $\overline{g}$, и такие локальные координаты, что

$$R_{ijkl} = S_{ijkl}, \quad i, j, k, l = 1, \ldots, 2n,$$

где R – тензор кривизны Римана связности Леви-Чивиты римановой метрики $\overline{g}$, S – тензор кривизны Схоутена.

Заключение. В ходе работы было показано, что для случая K-контактного многообразия разложение тензора кривизны Схоутена под действием ортогональной группы совпадает с разложением тензора кривизны Римана.

Была рассмотрена компонента Вейля тензора кривизны Схоутена. Получен результат, сообщающий необходимое и достаточное условия для обращения в нуль компоненты Вейля.

Полученный результат нельзя назвать окончательным, поскольку не было рассмотрено разложение пространства тензоров кривизны под действием других групп, не изучена связь топологии контактного метрического многообразия с кривизной распределения.

Перечисленные выше вопросы в наши дни представляют собой активную сферу исследований. Вероятно, в дальнейшем они будут освещены в последующих работах.