МИНОБРНАУКИ РОССИИ
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«САРАТОВСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ Н.Г. ЧЕРНЫШЕВСКОГО»

Кафедра геометрии

О геометрии с тернарным отношением для точек плоскости «быть между»

АВТОРЕФЕРАТ БАКАЛАВРСКОЙ РАБОТЫ

студентки 4 курса 421 группы
направления 02.03.01 Математика и компьютерные науки
механико-математического факультета

Алешкиной Оксаны Ярославовны

Научный руководитель профессор, д.ф.-м.н., доцент	____________________ подпись, дата	В.Б. Поплавский
И.о. зав. кафедрой к.п.н., доцент	____________________ подпись, дата	А.В. Букушева

Саратов 2024

ВВЕДЕНИЕ

1. Актуальность темы исследования. Все началось с «Начал» Евклида. В тринадцати книгах он изложил все накопленные к тому времени геометрические знания. В первой из них Евклид привел список из пяти постулатов, являющихся основой евклидовой геометрии:

1. От всякой точки до всякой точки можно провести прямую.
2. Ограниченную прямую можно непрерывно продолжить до прямой.
3. Из всякого цента всяким радиусом может быть описан круг.
4. Все прямые углы равны между собой.
5. Если прямая, падающая на две прямые, образует внутренние односторонние углы, меньшие двух прямых, то, продолженные неограниченно, эти две прямые встретятся с той стороны, где углы меньше двух прямых.

Пятый постулат эквивалентен аксиоме параллельности Евклида: через точку, не лежащую на данной прямой линии, проходит в точности одна прямая линия, параллельная данной.

Евклид черпал материал для своих книг из разных источников, поэтому нет ничего удивительного в том, что из его «Начал» смогли развиться две самостоятельные геометрии, которые различаются как своей логической основой, так и своими первоначальными понятиями и аксиомами. Они известны как абсолютная и аффинная геометрии.

Абсолютная геометрия, которую впервые выделил Бойяи - это часть евклидовой геометрии, которая опирается на четыре постулата и не зависит от пятого. Она не опирается на единственность прямой, параллельной данной прямой и проходящей через данную точку.

Зато в аффинной геометрии, которую впервые выделил Эйлер, эта единственность параллельной играет ведущую роль. Третий и четвертые постулаты теряют в ней смысл, так как в этой геометрии окружности не рассматриваются, а углы не измеряются. Поэтому единственными допустимыми движениями являются параллельный перенос и центральная симметрия. Аффинные предположения Евклида - это такие предположения, которые сохраняют силу при параллельном проектировании с одной плоскости на другую [1].

Поскольку каждое предположение Евклида принадлежит либо аффинной, либо абсолютной геометрии, либо не принадлежит ни одной из них, то может показаться, что эти две геометрии не имеют ничего общего, кроме первого и второго постулатов. Однако существует группа весьма важных предположений, принадлежащих обеим геометриям. Основной идеей в этих предположениях является идея о *расположении «между»* (или «промежуточности»), которую Евклид использовал в своем определении *«концы линии - точки»*, где линия, под которой имеется в виду прямолинейный отрезок, определяется как то, что находится между ее концами. Однако линия и точка разные по своей структуре элементы, отчего их с трудом можно приписать к одному множеству. Это наводит на мысль о возможности принять понятие *«лежать между»* в качестве первоначального и определять прямолинейный отрезок как *множество всех точек*, лежащих между двумя данными точками.

Простая геометрия, о которой идет речь в этой работе и которая легла в основу аффинной и абсолютной, достаточно важна, чтобы иметь свое название. Название «дескриптивная геометрия», которое применяет Бертран Рассел [2], кажется неудачным, так как употребляется в смысле начертательной геометрии. Артин [3] назвал эту геометрию геометрией порядка, которая так и вошла в русскую математическую терминологию. Согласно Хашимото [4] эту геометрию в зарубежной литературе можно встретить под названием «betweenness geometry», что можно перевести как «геометрия промежуточности». Придерживаясь русской математической терминологии, мы будем называть эту геометрию *геометрией порядка*.

2. Цели и задачи работы.

Цель работы состоит в том, чтобы изучить геометрию порядка, историю ее появления и самую распространенную аксиоматику, предложенную Пашем и упрощенную Вебленом. Для достижения данной цели были сформулированы и решены следующие задачи.

1. Найти материал по данной теме, перевести его и проанализировать.
2. Изучить историю геометрии порядка.
3. Структурировать полученный материал и представить в готовой работе.

4. С помощью языка программирования Python и библиотеки matplotlib выполнить иллюстрации к работе.

3. Содержание работы. Работа состоит из введения, пяти разделов, заключения, списка использованных источников, состоящего из 22 наименований, и трех приложений, в которых находится код всех представленных в дипломе изображений. Объем работы составляет 63 страницы вместе с приложениями.

В первом разделе рассмотрена история геометрии порядка. Второй раздел посвящен изучению отношению "быть между"для прямых, а в третьем - для плоскости. В четвертом разделе были рассмотрены аксиома о разбиении и одноименная теорема. Пятый раздел посвящен изучению параллельности.

4. Методы работы. При выполнении работы изучен, переведен на русский и систематизирован имеющийся материал по геометрии порядка. При написании работы были использованы методы анализа литературы, дедукции, индукции и формализации.

5. Апробация работы. По результатам исследования сделан доклад на заседании кафедры геометрии.

Основные аксиомы быть между

В геометрии порядка, рассматриваемой нами, за основу берут точки и отношение промежуточности, которое определяется тем, что некоторая точка *B лежит между A* и *C* и записывается как $[ABC]$. Если же *B не лежит между A* и *C*, то запись выглядит как «*не* $[ABC]$». Геометрия порядка опирается на десять аксиом, однако мы рассмотрим только девять, которые будут представлены в работе последовательно, формируя основные понятия и теоремы.

Аксиома 2.1. Существуют по крайней мере две точки.

Аксиома 2.2. A и B - различные точки. Тогда $\exists C$ такая, что $[ABC]$

Аксиома 2.3. Если $[ABC]$, то $A \neq C$

Аксиома 2.4. Если $[ABC]$, то $[CBA]$, но не $[BCA]$

С помощью первых четырех аксиом мы уже можем сформулировать несколько теорем и дать определения, которые в итоге приведут нас к определению прямой, которая в других геометриях уже считается первоначальным понятием.

Теорема 2.1. Если $[ABC]$, то не $[CAB]$

Теорема 2.2. Если $[ABC]$, то $A \neq B \neq C$.

Определение 2.1. A и B - две различные точки. Тогда множество точек P, таких что $[APB]$, называется *интервалом* AB. Если $[APB]$, то говорят, что точка P *принадлежит* интервалу AB ($P \in AB$).

Это определение первый шаг к тому, чтобы определить понятие прямой.

Теорема 2.3. $A, B \notin AB$, где AB - интервал.

Определение 2.2. Отрезком называется $\overline{AB} = A + AB + B$, где AB - интервал, а A и B - его концы.

Определение 2.3. Лучом A/B («исходит из точки A в сторону, противоположную точке B») называется множество точек P, таких что $[PAB]$.

Определив отрезок и луч через множество точек, мы теперь можем определить прямую через эти понятия.

Определение 2.4. Прямой называется $AB = A/B + \overline{AB} + B/A$, где $\overline{AB}$ - отрезок, а $A/B, B/A$ - лучи.

Аксиома 2.5. AB - прямая, $C, D \in AB$ - различные точки. Тогда $A \in CD$ - прямая.

Теорема 2.5. AB - прямая, $C, D \in AB$ - различные точки. Тогда $AB = CD$.

Следствие 2.5.1. A, B - различные точки, тогда $\exists! AB$ - прямая.

Следствие 2.5.2. AB, CD - две прямые, тогда $\exists! F$ - их общая точка. F называется *точкой пересечения*, и говорят, что прямые пересекаются в точке F.

Аксиома 2.6. $\forall AB$ - прямой $\exists C \notin AB$.

Определение 2.6. $[ABC]$ и $[ACD]$, тогда $[ABCD]$.

Для четырех точек сохраняются «наглядные» свойства. Например: если $[ABCD]$, то $[DCBA]$ и никак иначе.

Пусть n различных коллинеарных точек, где $n > 1$ и $n \in \mathbb{N}$ - $P_1, P_2, ..., P_n$, разбивают прямую, которой принадлежат, на два луча P_1/P_n и P_n/P_1 и $n-1$ интервалов

$$P_1P_2, P_2P_3, ..., P_{n-1}P_n,$$

в каждом из которых не содержится ни одной из наших точек. Тогда эти точки расположены *в порядке* $P_1P_2...P_n$ и записываются $[P_1P_2...P_n]$. Следовательно

$$[P_1P_2...P_n] \Leftrightarrow [P_1P_2P_3], [P_2P_3P_4], ..., [P_{n-2}P_{n-1}P_n].$$

Теорема 2.16. Если ABC - треугольник и точки F и D такие, что $[AFB]$ и $[BCD]$. Тогда DF - прямая и $\exists E \in DF$ - такая, что $[CEA]$.

Плоскости

Настало время перевести геометрию порядка, о которой мы ранее рассуждали в пространстве размерности один, то есть говорили только о прямых, в пространство размерности два и определить понятие плоскости.

Определение 3.1. A, B, C - неколлинеарные точки. Тогда *плоскость* ABC - это множество точек, которые коллинеарны парам точек, принадлежащих одной или двум сторонам треугольника ABC. Отрезок, интервал, луч или прямая *лежат в плоскости*, если все их точки принадлежат ей.

Дальнейшие рассуждения будем проводить для плоскости, поэтому введем соответсвующую аксиому:

Аксиома 3.1. Все точки лежат в одной плоскости.

Аксиомы, определенные нами ранее, позволят вывести известные свойства инцидентности в плоскости.

Предложение 3.1. α - плоскость, A, B, C - неколлинеарные точки. Тогда $A, B, C \in \alpha$ полностью определяют эту плоскость.

Предложение 3.2. α - плоскость, a - прямая, $A, B \in a$ - различные точки прямой. Если $A, B \in \alpha$, то и все остальные точки прямой также принадлежат этой плоскости.

Определение 3.2. *Угол* - это фигура, которая состоит из точки O и двух неколлинеарных лучей, выходящих из нее, OA и OB. O называется *вершиной*, а OA и OB - *сторонами* угла.

Угол обозначается $\angle AOB$ или $\angle BOA$. Стороны можно обозначить как a_1 и b_1, тогда угол можно записать как a_1b_1 или b_1a_1. Произвольная пара точек A и B на соответсвующих сторонах определяет один и тот же угол a_1b_1.

Если точка C такая, что $[ACB]$, то луч OC лежит *внутри* угла (или между лучами OA и OB).

Определение 3.3. Выпуклая область - это множество точек, где любые две можно соединить отрезком, который так же состоит из точек множества, и каждая точка принадлежит по крайней мере двум таким некколинеарным отрезкам.

Определение 3.4. Угловая область - это множество точек лучек, которые лежат внутри угла.

Определение 3.5. Треугольная область - это множество точек, которые лежат между парами точек, принадлежащим различным сторонам треугольника, то есть внутри треугольника.

Предложение 3.3. Угол/треугольник *ограничивает* угловую/треугольную область.

Определение 3.6. α - плоскость, $a \in \alpha$ - прямая. Тогда эта прямая разбивает эту плоскость на две выпуклые области - *полуплоскости.*

Две точки находятся *по одну сторону* от прямой a, если они принадлежат одной плоскости. Если же точки принадлежат дополнительным полуплоскостям, то они находятся *по разные стороны* от прямой a, то есть прямая a *разделяет* эти точки.

Общая точка F из следствия 2.5.2 разбивает две прямые на 4 луча: AB на a_1, a_2, CD на b_1, b_2 по одному в каждой из полуплоскостей, которые определяются прямой AB и которые также разбиваются этими лучами на две угловые области. Таким образом, две пересекающиеся прямые AB и CD разбивают плоскость на четыре угловые области, которые ограничены углами

$$b_1a_1, a_1b_2, b_2a_2, a_2b_1.$$

.

В этом случае противоположные лучи a_1 и a_2 *разделяют* лучи b_1 и b_2. Эти лучи также разделяют все лучи, лежащие внутри одного из углов a_1b_1, b_1a_2, и все лучи, лежащие внутри одного из углов a_2b_2, b_2a_1, соответственно. Лучи a_1 и b_1 так же отделяют лучи, лежащие между ними, от лучей в остальных угловых областях: b_1a_2, a_2, b_2 или b_2a_1.

Вспомним определение 2.4, которое говорит о том, что две различные точки A и B разбивают прямую, которой они принадлежат, на три части: отрезок $\overline{AB}$ и лучи A/B и B/A. Из этого можно вывести, что две компланарные прямые a и b разбивают плоскость λ, такую что $a, b \in \alpha$, на три области: α, γ и β. Область γ *лежит между* двумя другими, то есть состоит из точек отрезков $\overline{AB}$, где $A \in a, B \in b$.

Тогда прямая *c лежит между a* и b, если она пересекает такие отрезки $\overline{AB}$, но не пересекает прямые a и b. Обозначается $[acb]$.

Стоит так же отметить, что геометрия порядка допускает существование пространства, а так же гиперпространства, для чего вводятся соответсвующие аксиомы, но в данной работе они рассматриваться не будут.

Непрерывность и теорема о разбиении

Нам известно, что между двумя рациональными числами найдется еще одно рациональное число и, следовательно, бесконечно много рациональных чисел, что, однако, не означает, что любое действительное число рационально. Точно так же между любыми двумя точками по теореме **??** найдется еще одна точка и, следовательно, бесконечно много таких точек, что, однако, не означает, что прямая «непрерывна». Для этого необходимо ввести еще одну аксиому.

Аксиома 4.1. Пусть $P_1, P_2 \neq \varnothing$ - множества точек, образующихся при любом разбиении всех точек некоторой прямой. Причем $\forall A_1 \in P_1, A_2, B_2 \in P_2$ справедливо *не* $[A_2 A_1 B_2]$, аналогично с точками из множества P_2. Тогда $\exists F$ - такая точка, что

$$[A_1 B_1 ... F A_2 B_2 ..],$$

где $A_1, B_1, ... \in P_1$ и $A_2, B_2, ... \in P_2$, а $F \in P_1$ или P_2.

Вместо «прямой» в данной аксиоме можно использовать «луч», или «интервал», или «отрезок», получая аналогичные утверждения. Так же из этой аксиомы, рассматривая множество лучей внутри угла, можно получить следующую теорему:

Теорема 4.1. Пусть $P_1 \cap P_2 = \varnothing$ - множества лучей, образующихся при любом разбиении множества всех лежащих внутри угла AOB лучей. Причем $\forall a_1 \in P_1, a_2, b_2 \in P_2$ справедливо *не* $[a_2 a_1 b_2]$, аналогично с лучами из множества P_2. Тогда $\exists f$ - луч, такой, что

$$[a_1 b_1 ... f a_2 b_2 ..],$$

где $a_1, b_1, ... \in P_1$ и $a_2, b_2, ... \in P_2$, а $f \in P_1$ или P_2.

Параллельность

Параллельность, которая в Евклидовой геометрии считается аксиомой, в геометрии порядка представляет собой отдельную теорему, для доказательства которой необходимы все изученное нами ранее.

Теорема 5.1. $\forall r$ - прямой и $\forall A \notin r$ - точки, $\exists q, p \in Ar$ - лучи, которые выходят из точки A, не пересекают прямую r и отделяют лучи, которые выходят из A и пересекают r, от лучей, которые выходят из A и не пересекают r.

Лучи p и q, выходящими из точки A, называют *параллельными* прямой r в двух направлениях: луч p параллелен лучу C/B, а луч q параллелен лучу B/C. Так же говорят, что два луча имеют одинаковое направление, если они лежат по одну сторону от прямой, соединяющей их начальные точки.

Определим лучи, параллельные прямой r, выходящие из принадлежащей этой прямой точки A, как лучи, на которые точка A разбивает прямую r. Зададим вопрос, будут ли для других положений точки $A \notin r$ лучи p и q принадлежать одной прямой.

Если мы рассматриваем аффиную геометрию, то ответ положительный, и прямая, состоящая из лучей p и q, разбивает плоскость на две полуплоскости, в одной из которых полностью лежит прямая r.

Если же мы рассматриваем гиперболическую геометрию, то ответ будет отрицательным, и прямые a и b, в которых содержатся лучи p и q, разбивают плоскость на 4 угловые области. В этом случае, согласно предыдущей теореме 5.1, прямая r целиком лежит в одной из 4 угловых областей, определяемой лучами p и q.

Следствие 5.1.1. Пусть точка $A \notin r$ - прямая. Тогда через точку A проходит по крайней мере одна прямая, которая лежит в плоскости Ar и не пересекает прямую r.

Еще одним известным свойством параллельности является «независимость от выбора начала луча», о чем следующая теорема:

Теорема 5.2. Пусть r - прямая, p_1 - параллельный ей луч. Тогда, если перенести начало луча в другую точку той же прямой, они останутся параллельными.

Эта теорема позволяет говорить, что прямая $p = AA'$ параллельна прямой $r = BC$. Но нужно помнить, что понятие «параллелизма» связано с выбором определенного «направления» на каждой из рассматриваемых прямых. Было даже доказано, что невозможно средствами одной только двумерной геометрии порядка установить «симметричность» этого понятия, то есть доказать, что если прямая p параллельна прямой r, то из этого следует, что прямая r параллельна прямой p. Чтобы сделать это необходимо ввести аксиому о непринадлежности точки к плоскости и перейти к пространствам.

Также мы не можем установить «транзитивность» понятия «параллелизма», то есть доказать, что если прямые p и q параллельны прямой r в одном направлении, то они параллельны между собой. Однако был сделан шаг на пути к этому в виде следующей теоремы:

Теорема 5.3. p и r - две прямые параллельны третьей прямой s в одном направлении. Тогда $\exists t$ - прямая, которая пересекает эти три прямые.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В данной работе мы подробно изучили, что геометрия порядка представляет из себя геометрию, где основным элементом являются точки, а основным отношением - «быть между». Всего геометрия порядка включает в себя десять аксиом, с помощью которых в дальнейшем формируются теоремы, определения, следствия и т.д. В данной работе было подробно рассмотрено отношение «быть между» и следующие из него понятия отрезка, интервала, луча, с помощью которых мы получили понятие прямой. Из одномерного пространства позже мы перешли в двумерное и определили понятие плоскостей, угла, угловых областей, полуплоскостей. Мы изучили важную аксиому о разбиении, которая позволила нам вывести теорему о параллельности в геометри порядка.

Таким образом, мы смогли подробно изучить геометрию порядка, которая является основой аффиной и абсолютной геометрий, что в дальнейшем может помочь в их изучении, а так же за счет этого расширили свои математические знания.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. Яглом, И. М. Геометрические преобразования т.2 / И. М. Яглом. — Москва: Государственное издательство технико-теоретической литературы, 1956 — 612 с.

2. Russell, B. The principles of mathematics / Russell B. — Cambridge: University press, 1903 — 534 с.

3. Artin, E. Geometric Algebra / Artin E. — New York: Interscience Publishers Inc., 1957 — 214 с.

4. Hashimoto, J. Betweenness geometry / Hashimoto J. — Osaka: Departments of Mathematics Osaka University, 1958 — 158 с.

5. Pasch, M. Vorlesungen ?ber neuere geometrie / Pasch M. — Leipzig: B. G. Teubner, 1926 — 227 с.

6. Veblen, O. The foundations of geometry / Young J. W. A., Veblen, O., Thomas, F., Frederick, S. [и др.] // Monographs on topics of modern mathematics, relevant to the elementary field. — New York:Longmans, Green, and co., 1911. — С. 3-55.

7. Кокстер, Г. С. Введение в геометрию / Г. С. Кокстер — Москва: Издательство «Наука», 1966 — 648 с.

8. Forder, H.G. The Foundations of Euclidean Geometry / Forder H.G. — Cambridge: University press, 1927 — 349 с.

9. Gauss, C.F. Grundlagen der Geometrie. In: Werke / Gauss C.F. — G?ttingen: K?niglichen Gesellschaft der Wissenschaften, 1900 — 500 с.

10. Hilbert, D. Grundlagen der Geometrie / Hilbert, D. — Leipzig: Verlag von B.G. Teubner, 1899 — 92 с.

11. Печенкин, А.А. Лекция 4. Евклидова геометрия и аксиоматика Давида Гильберта [Электронный ресурс] : [сайт]. — URL: `https://teach-in.ru/lecture/2021-03-09-Pechenkin` (дата обращения: 11.04.2024). - Загл. с экрана. - Яз.рус.

12. Moore, E. H. On the projective axioms of geometry / Moore, E. H. // On Certain Crinkly Curves. — 1900. — № 1. — C. 72-90.

13. McPhee, J. A. Axioms for betweenness / McPhee, J. A. // J. London Math. Soc.. — 1962. — № 1. — C. 112-116.

14. Schur, F. Grundlagen der Geometrie / Schur, F. — Leipzig: Verlag von B.G. Teubner, 1909 — 192 c.

15. Huntington, E. V., Kline, J. R. Sets of independent postulates for betweenness / Huntington, E. V., Kline, J. R. // Transactions of the American Mathematical Society. — 1917. — № 3. — C. 301-325.

16. Nuut, J. Topologische Grundlagen des Zahlbegriffs / Nuut, J. — Tartu: Acta et Commentationes Universitatis Tartuensis(Dorpatensis), 1929 — 58 c.

17. Sarv, J. Geomeetria alused / Sarv, J. — Tartu: Acta et Commentationes Universitatis Tartuensis(Dorpatensis), 1931 — 87 c.

18. Nuut, J. Einige Bemerkungen Uber Vierpunktaxiome / Nuut, J. — Tartu: Acta et Commentationes Universitatis Tartuensis(Dorpatensis), 1932 — 10 c.

19. Tudeberg, A. Uber die Beweisbarkeit einiger Anordnungsaussagen in geometrischen Axiomensystemen / Tudeberg, A. — Tartu: Acta et Commentationes Universitatis Tartuensis(Dorpatensis), 1934 — 24 c.

20. Lumiste, U. Tarski's system of geometry and betweenness geometry with the group of movements / Lumiste, U. // Proc. Estonian Acad. Sci. Phys. Math.. — 2007. — № 3. — C. 252-263.

21. Tarski, A. The Completeness of Elementary Algebra and Geometry / Tarski, A. — Paris: Institut Blaise Pascal, 1931 — 302 c.

22. Tarski, A. What is elementary geometry? / Tarski, A. // In The Axiomatic Method, with Special Reference to Geometry and Physics. — 2959. — C. 16-29.