МИНОБРНАУКИ РОССИИ
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«САРАТОВСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ Н.Г. ЧЕРНЫШЕВСКОГО»

Кафедра геометрии

Спектральная последовательность Серра - Хохшильда

АВТОРЕФЕРАТ БАКАЛАВРСКОЙ РАБОТЫ

студента 4 курса 421 группы

направления 02.03.01 Математика и компьютерные науки

механико-математического факультета

Туляганова Даниила Бахадировича

Научный руководитель
профессор, д.ф.-м.н., доцент ____________________ А.Н. Сергеев
подпись, дата

И.о. зав. кафедрой
к.п.н., доцент ____________________ А.В. Букушева
подпись, дата

Введение. Спектральные последовательности нашли свое приложение во многих математических дисциплинах, таких как алгебраическая топология, гомологическая алгебра и алгебраическая топология.

Основной объект исследования бакалаврской работы – это спектральная последовательность Серра - Хохшильда, позволяющая вычислять гомологии группы через ее расширение.

В первой главе «Сведения из алгебры и теории категорий» вводятся основные для работы понятия, такие как: модули, гомоморфизмы модулей и тензорные произведения. Был введен функтор тензорного произведения $\_ \otimes_R M$, необходимый для введения гомологий групп.

Во второй главе «Гомологии групп» описываются действия группы на модуле, которые приводят к точному справа функтору, ковариантам действия группы, для которого левые производные функторы являются группами гомологий группы.

В третьей главе «Спектральные последовательности» вводится основной инструмент для вычисления гомологий групп: если $1 \to H \to G \to Q \to 1$ – расширение группы G, то $H_p(Q, H_q(H, M) \to H_{p+q}(G)$.

В четвертой главе рассматриваются приложения спектральных последовательностей в анализе данных, в частности, получение персистентных гомологий цифрового изображения. Вычисления получены с помощью системы компьютерной алгебры Kenzo.

Основное содержание работы. Введём необходимые определения и теоремы.

Определение 1.1. Пусть A — некоторое коммутативное кольцо с единицей; A-*модулем* называется абелева группа M (записываемая аддитивно), на которой A действует линейно. Точнее говоря, модуль есть пара (M, μ), где M — абелева группа, а μ — отображение $A \times M \to M$, причем выполняются следующие аксиомы, в которых мы вместо $\mu(a, x)$ $(a \in A, x \in M)$ пишем ax:

– $a(x + y) = ax + ay$

– $(a + b)x = ax + bx$

– $(ab)x = a(bx)$

– $1x = x$

Определение 1.8. *Свободный* A-модуль по определению изоморфен A-модулю вида $\bigoplus\limits_{i \in I} M_i$, где все M_i изоморфны A (как A-модулю).

Определение 1.33. Тензорным произведение двух модулей M и N называется новый A-модуль $M \otimes_A N$ вместе с A-билинейным отображением

$$\otimes : M \times N \to M \otimes_A N,$$

таким, что следующая диаграмма *коммутативна*

$$\begin{tikzcd} M \times N \arrow[r, "\phi"] \arrow[d, "\otimes"'] & P \\ M \otimes_A N \arrow[ur, dashed, "!\overline{\phi}"'] & \end{tikzcd}$$

и каждое отображение $\overline{\phi}$ является гомоморфизмом A-модулей. Данная диаграмма есть ничто иное, как *универсальное свойство тензорного произведения.*

Определение 2.5. Модуль P *проективен* в том и только в том случае, если для любого эпиморфизма $\pi : M \to \overline{M}$ и любого отображения $\phi : P \to \overline{M}$ существует такое отображение $\psi : P \to M$, что $\phi = \pi\psi$. Иными словами, следующая диаграмма коммутативна.

$$\begin{tikzcd} & P \arrow[dl, dashed, "\psi"'] \arrow[d, "\phi"] \\ M \arrow[r, two heads, "\pi"'] & \overline{M} \end{tikzcd}$$

Определение 2.1. Пусть R — кольцо и M — левый R-модуль. *Резольвентой* модуля M называется точная последовательность M-модулей вида

$$\ldots \longrightarrow F_2 \xrightarrow{\partial_2} F_1 \xrightarrow{\partial_1} F_0 \xrightarrow{\epsilon} M \longrightarrow 0.$$

Если все модули F_i свободны, то говорят о *свободной резольвенте*, а если все F_i проективны, то говорят о *проективной резольвенте.*

Определение 2.3. Пусть G — группа, записанная мультипликативно. Обозначим через $\mathbb{Z}[G]$ свободный $\mathbb{Z}$-модуль, порожденный элементами группы G. Таким образом, всякий элемент $\mathbb{Z}[G]$ единственным образом представляется в виде

$$\sum_{g\in G} a(g)g,$$

где $a(g) \in \mathbb{Z}$ и $a(g) = 0$ почти для всех g. Умножение в G единственным образом продолжается до $\mathbb{Z}$-билинейного умножения $\mathbb{Z}[G] \times \mathbb{Z}[G] \to \mathbb{Z}[G]$, что делает $\mathbb{Z}[G]$ кольцом, называемым *целочисленным групповым кольцом* группы G.

Определение 2.4. Определим для произвольной группы G *аугментацию* как кольцевой гомоморфизм $\epsilon : \mathbb{Z}[G] \to \mathbb{Z}$, такой что $\epsilon(g) = 1$ для всех $g \in G$. Ядро гомоморфизма ϵ называется *аугментационным идеалом* $\mathbb{Z}[G]$ и обозначается через $\Delta(G)$.

Определение 2.5. Левый $\mathbb{Z}[G]$-модуль, называемый также G-модулем, состоит из абелевой группы A и гомоморфизма кольца $\mathbb{Z}[G]$ в кольцо эндоморфизмов группы A. Кольцевые гомоморфизмы указанного вида в точности соответствуют групповым гомоморфизмам из G в группу автоморфизмов группы A. Таким образом, G-модуль — это просто абелева группа A, наделенная действием группы G.

Если G есть группа и M есть G-модуль, то группа *коинвариантов* модуля M, обозначаемая через M_G, определяется как фактормодуль модуля M по аддитивной подгруппе, порожденной разностями вида $gm - m$ $(g \in G, m \in M)$. Таким образом, M_G получается из M посредством "деления"на действие группы G.

Название "коинварианты"объясняется тем, что M_G есть наибольший *фактормодуль* модуля M, на котором G действует тривиально, в то время как M^G, группа инвариантов, определяется как наибольший *подмодуль* модуля M, на котором G действует тривиально.

Лемма 2.1. Пусть $\mathbb{Z}$ обозначает кольцо целых чисел, рассматриваемое как тривиальный правый G-модуль. Если M — G-модуль, то

$$M_G \cong \mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}[G]} M.$$

Определение 2.7. Пусть F – проективная резольвента $\mathbb{Z}$ над $\mathbb{Z}[G]$, и пусть M есть произвольный G-модуль. Мы определим *гомологии группы* G *с коэффициентами* в M формулой

$$H_i(G, M) = H_i(F \otimes_{\mathbb{Z}[G]} M). \tag{2.4}$$

Здесь $F \otimes_G M$ обозначает комплекс, полученный из F применением функтора $\_ \otimes_G M$.

Предложение 2.3. Пусть M – $\mathbb{Z}[G]$-модуль. Тогда существует естественный изоморфизм

$$\eta_A : H_0(G, M) = \mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}[G]} M \to M/\Delta(G)M,$$

задаваемый формулой

$$g \otimes m \mapsto gm + \Delta(G)M.$$

Определение 2.8. *Абелианизацией* группы G называется её факторгруппа по коммутанту:

$$G^{ab} = G/[G, G].$$

Теорема 2.1. Пусть группа G действует тривиально на модуль M. Тогда первые гомологии группы G являются ее абелианизацией, тензорно умноженной на M:

$$H_1(G, M) = G^{ab} \otimes_{\mathbb{Z}} M.$$

Пусть G – группа. Обозначим через $\{\gamma_n(G)\}_{n \geq 1}$ *нижний центральный ряд* в G, определяемый индуктивно как

$$\gamma_1(G) = G,\ \gamma_{n+1} = [\gamma_n(G), G] = \langle [x, y] := x^{-1}y^{-1}xy \mid x \in \gamma_n(G), y \in G \rangle^G,\ n \geq 1$$

Пусть группа G представлена в виде свободного копредставления:

$$1 \to R \to F \to G \to 1. \tag{2.5}$$

Определение 2.9. Для группы G, заданной конрдставлением (2.5), абелева группа

$$M^{(k)}(G) = \frac{R \cap \gamma_{k+1}(F)}{[R,_k F]} \tag{2.6}$$

не зависит от выбора свободного копредставления (2.5) для группы G и называется k-м *инвариантом Бэра.* В случае $k = 1$ $M^{(k)}(G)$ представляет собой *мультипликатор Шура* группы G, т.е. $M^1(G) = H_2(G)$, и именно поэтому инварианты Бэра часто называют обобщенными (или нильпотентными) мультипликаторами. Таким образом,

$$H_2(G) = \frac{R \cap [F, F]}{[R, F]}.$$

Так как $H_2(G) \subset R/[F, R]$, то если вторые гомологии бесконечно порождены (как абелева группа), то про группу G можно сказать, что она не имеет конечного копредставления. Обратное неверно.

Определение 2.10. Клеточный комплекс с фундаментальной группой G и стягиваемым универсальным накрытием называется *классифицирующим пространством* для группы G. Классифицирующее пространство обозначим как $K(G, 1)$ и

$$\pi_i(K(G,1)) = \begin{cases} G, & \text{если } i = 1 \\ 0, & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Теорема 2.2. Пусть G – группа, $K(G, 1)$ – классифицирующее пространство. Тогда

$$H_*(K(G, 1), \mathbb{Z}) \cong H_*(G, \mathbb{Z}).$$

Определение 3.1. *Дифференциальный биградуированный модуль* над кольцом R — это набор R-модулей $\{E^{p,q}\}$, где p и q — целые числа, вместе с R-линейным отображением $d : E^{*,*} \to E^{*,*}$ бистепени $(s, 1 - s)$ или $(-s, s - 1)$ для некоторого s, которое удовлетворяет соотношению $d \circ d = 0$.

Определение 3.2. *Спектральная последовательность* — это набор дифференциальных биградуированных R-модулей $\{E_r^{*,*}, d_r\}$, где $r = 1, 2, \ldots$; все дифференциалы имеют либо бистепень $(-r, r - 1)$ (для спектральной последовательности *гомологического типа*), либо бистепень $(r, 1-r)$ (для спектральной последовательности *когомологического типа*), и $E_{r+1}^{p,q}$ изоморфно $H^{p,q}(E^{*,*}, d)$ для всех p, q, r.

Определение 3.3. *Фильтрация* F^* на R-модуле A – это такое семейство подмодулей $\{F^p A\}$, $p \in \mathbb{Z}$, что

$$\cdots \subset F^{p+1}A \subset F^p A \subset F^{p-1}A \subset \cdots \subset A \quad \text{(убывающая фильтрация)}$$

или

$$\cdots \subset F^{p-1}A \subset F^p A \subset F^{p+1}A \subset \cdots \subset A \quad \text{(возрастающая фильтрация).}$$

Определение 3.4. Говорят, что спектральная последовательность $\{E_r^{*,*}, d_r\}$ *сходится* к градуированному R-модулю H^*, если существует фильтрация F на H^*, для которой

$$E_\infty^{p,q} \cong E_0^{p,q}(H^*, F),$$

где $E_\infty^{*,*}$ — предельный член спектральной последовательности. Цель вычислений обычно состоит в нахождении градуированного модуля H^*.

Рассмотрим расширение группы G

$$1 \to H \to G \to Q \to 1,$$

где H – нормальная подгруппа в G, а $Q \cong G/H$. Существует спектральная последовательность, связывающая гомологии группы с нормальной подгруппой и фактором по ней.

Теорема 3.1. Пусть $1 \to H \to G \to Q \to 1$ – *расширение группы.* Предположим, что M – модуль над G. Тогда существует спектральная последовательность в первом квадранте с членом

$$E_{p,q}^2 \cong H_p(Q, H_q(H, M)),$$

сходящаяся к $H_*(G, M)$ и $H_p(Q, H_q(H, M) \to H_{p+q}(G)$.

Определение 3.5. Группой Гейзенберга – называется группа квадратных матриц следующего вида:

$$G = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & a & c \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} : a, b, c \in \mathbb{Z} \right\}.$$

Теорема 3.2.

$$H_n(G) \cong \begin{cases} \mathbb{Z}, & n = 0, 3 \\ \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}, & n = 1, 2 \\ 0, & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Третий лист спектральной последовательности Серра - Хохшильда для данной группы:

$$\begin{array}{|ccc}
0 & 0 & 0 \\
0 & \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} & \mathbb{Z} \\
\mathbb{Z} & \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} & 0 \\
\hline
\end{array}$$

Далее рассмотрим приложения спектральных последовательностей в анализе данных.

Персистентные гомологии — один из основных инструментов топологического анализа данных — молодой дисциплины, которая исследует возможности выделения внутренней структуры в экспериментальных данных различной природы и введения топологических инвариантов на этой структуре. Это позволяет применять методы из алгебраической топологии для анализа данных и решения связанных с ними прикладных задач. Они широко начинают использоваться в разных областях: обработка изображений, сигналов, анализ ДНК, кластерный анализ, анализ текста. Суть метода заключается в том, чтобы выявить такие структуры, которые будут устойчиво сохраняться при топологических деформациях и искажениях.

Определение 4.4. Пусть K — симплициальный комплекс. Конечной *фильтрацией* комплекса K называется вложенная последовательность подкомплексов $K^i \subseteq K$, такая, что $\varnothing = K^0 \subseteq K^1 \subseteq K^2 \subseteq \cdots \subseteq K^m = K$.

Для каждого $i \leq j$ у нас есть вложение ассоциированных цепных комплексов $\mathrm{inc}^{i,j} : C(K^i) \to C(K^j)$, и поэтому мы можем рассматривать индуцированные гомоморфизмы $f_n^{i,j} : H_n(K^i) \to H_n(K^j)$. Для каждой размерности n фильтрация создает последовательность гомологий, которые связаны гомоморфизмами:

$$0 = H_n(K^0) \to H_n(K^1) \to \cdots \to H_n(K^m) = H_n(K).$$

Определение 4.5. n-той персистентной гомологией комплекса K называется образ гомоморфизмов $f_n^{i,j}$:

$$H_n^{i,j} = \mathrm{Im}\, f_n^{i,j},\ 0 \leq i \leq j \leq m.$$

Группа $H_n^{i,j}$ состоит из n-х гомологических классов фильтрации K, причём создание класса происходит в симплициальном комплексе K_i и его существование продолжается до K_j.

Теорема 4.1. Пусть C — цепной комплекс, снабженный фильтрацией. Тогда существует спектральная последовательность $E \equiv E(C) \equiv (E^r, d^r)_{r \geq 1}$, определяемая следующим образом:

$$E^r_{p,q} = \frac{Z^r_{p,q} + C^{p-1}_{p+q}}{d_{p+q+1}(Z^{r-1}_{p+r-1,q-r+2}) + C^{p-1}_{p+q}},$$

где $Z^r_{p,q} = \{a \in C^p_{p+q} \mid d_{p+q}(a) \in C^{p-r}_{p+q-1}\} \subseteq C^p_{p+q}$ и отображение $d^r_{p,q} : E^r_{p,q} \to E^r_{p-r,q+r-1}$ является морфизмом, индуцированным на фактормодулях отображением $d_{p,q} : C_{p+q} \to C_{p+q-1}$. Эта спектральная последовательность сходится к группам гомологий комплекса C, то есть существуют естественные изоморфизмы

$$E^{\infty}_{p,q} \cong \frac{H^p_{p+q}(C)}{H^{p-1}_{p+q}(C)},$$

где $H^p_*(C)$ — фильтрация на группах гомологий $H_*(C)$, индуцированная фильтрацией на C.

Нетрудно показать, что персистентные гомологии описываются следующей формулой:

$$H^{i,j}_n = \frac{\operatorname{Ker} d_n \cap C^i_n}{d_{n+1}(Z^{j-i}_{j,n-j+1})} = \frac{Z^i_{i,n-i}}{d_{n+1}(Z^{j-i}_{j,n-j+1})}.$$

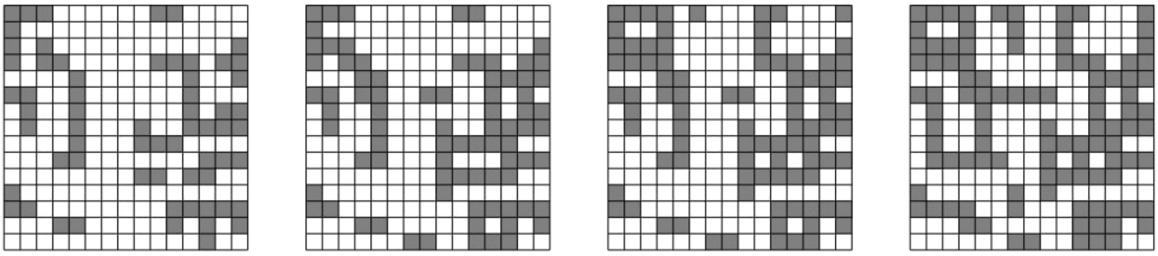

Рисунок 1

Рассмотрим следующее цифровое изображение. Мы можем естественным образом связать с ним симплициальный комплекс K и вычислить его гомологии в размерностях ноль и один. Они, соответственно, показывают количество компонент связности, и дыры, которые содержит изображение.

Пусть изображение 1 имеет фильтрацию. Окончательные группы гомологий будут следующими: $H_0 = \mathbb{Z}^7$ и $H_1 = \mathbb{Z}^4$. Мы можем видеть эволюцию соответствующих классов гомологии вдоль четырех фильтров. Эти шаги получены с помощью Kenzo — системы компьютерной алгебры, которая реализует методы конструктивной алгебраической топологии, в частности, для работы со спектральными последовательностями.

Например, $H^{1,4}_0 = \mathbb{Z}^4$ означает, что в размерности 0 есть 4 класса, которые появляются на первом шаге и выживают на четвертом:

```
> (prst-hmlg-group K 1 4 0)
Persistent Homology H^{1,4}_0
Component Z
Component Z
Component Z
Component Z
```

Аналогично, $H_1^{2,4} = \mathbb{Z}^2$ означает, что есть две дыры на шаге 2, которые выживают на шаге 4:

```
> (prst-hmlg-group K 2 4 1)
Persistent Homology H^{2,4}_1
Component Z
Component Z
```

Заключение. Таким образом, в работе были введены гомологии групп $H_n(G, M)$, дано описание $H_0(G, M)$, $H_1(G, M)$ и $H_2(G, M)$. Была рассмотрена спектральная последовательность Серра - Хохшильда, благодаря который были посчитаны гомологии группы Гейзенберга.

Была изучена система компьютерной алгебры Kenzo. С ее помощью были вычислены персистентные гомологии цифрового изображения.