

МИНОБРНАУКИ РОССИИ  
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение  
высшего образования  
«САРАТОВСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ  
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ Н.Г. ЧЕРНЫШЕВСКОГО»

Кафедра геометрии

**Идеалы проективных модулей**

АВТОРЕФЕРАТ БАКАЛАВРСКОЙ РАБОТЫ

студента 4 курса 421 группы

направления 02.03.01 Математика и компьютерные науки

механико-математического факультета

Ушакова Ивана Владимировича

Научный руководитель  
профессор, д.ф.-м.н., доцент

\_\_\_\_\_

подпись, дата

А.Н. Сергеев

И.о. зав. кафедрой  
к.п.н., доцент

\_\_\_\_\_

подпись, дата

А.В. Букушева

Саратов 2024

**Введение.** Супергруппы используются в естественных науках как точное или математическое описание феномена суперсимметрии.

Основной объект исследования бакалаврской работы – это кольцо  $\Lambda_{m,n}^{\pm}$ , а также некоторые специальные идеалы в нём. Кольцо  $\Lambda_{m,n}^{\pm}$  тесно связано с представлением супергруппы  $GL(m, n)$ . Во второй половине двадцатого века были доказаны содержательные теоремы о связи между представлениями супералгебры  $\mathfrak{gl}(m, n)$  и структурой супергруппы  $GL(m, n)$ .

В первой главе «Суперсимметрические многочлены» в параграфе «Кольца  $\Lambda_{m,n}^{\pm}$  и  $U_{m,n}^{\pm}$ » вводятся основные для работы понятия, связанные с суперсимметрическими многочленами – кольцо суперсимметрических многочленов  $\Lambda_{m,n}^{\pm}$ , выделенные многочлены  $h_k, h_k^*, H_k$  ( $k \in \mathbb{Z}$ ), специальное формальное кольцо  $U_{m,n}^{\pm}$  и, наконец, ключевые базисные многочлены  $K_{\lambda,\mu}$ . Вводится необходимый комбинаторный язык, связанный с разбиениями: разбиение, диаграммы Юнга, сопряженное разбиение. В конце устанавливается изоморфизм колец  $\Lambda_{m,n}^{\pm} \cong U_{m,n}^{\pm}$ .

В параграфе «Система компьютерной алгебры SageMath» вводится CAS SageMath и описываются её базовые возможности. Затем она используется для проверки основных для работы теорем и решения некоторого нетривиального уравнения.

Во второй главе «Идеалы проективных модулей» в начале формулируются и доказываются несложные общеизвестные леммы, использующиеся потом для доказательств. Для случаев

- $m = 1, n = 1$ ,
- $m = 2, n = 1$ ,
- $m = 1, n = 2$ ,

формулируется и доказывается общая теорема о том, что идеал, порожденный проективными модулями, совпадает с ядром построенного в каждом параграфе морфизма колец

$$\langle P(\bar{a}, \bar{b}) \rangle = \ker \varphi. \quad (1)$$

В случае  $m = 2, n = 2$  строится отображение на базисных элементах, но доказательство существования продолжающего морфизма и два включения (1) не доказываются.

**Основное содержание работы.** Введём необходимые определения и опишем основной изоморфизм.

**Определение 1.2.** Кольцом лорановских суперсимметрических многочленов  $\Lambda_{m,n}^\pm$  называется кольцо

$$\Lambda_{m,n}^\pm = \left\{ \mathbb{Z}[x_1^\pm, \dots, x_m^\pm, y_1^\pm, \dots, y_n^\pm]^{S_m \times S_n} \mid x_i \frac{\partial f}{\partial x_i} + y_j \frac{\partial f}{\partial y_j} \in (x_i + y_j) \right\}$$

Симметрический по каждому из наборов многочлен  $f$  удовлетворяющие условию  $x_i \frac{\partial f}{\partial x_i} + y_j \frac{\partial f}{\partial y_j} \in (x_i + y_j)$  называется *суперсимметрическим*. В работе сформулировано эквивалентное описание суперсимметричности.

**Утверждение 1.1** Пусть многочлен  $f \in R[x_1, \dots, x_m, y_1, \dots, y_n]$  симметричен по каждому из наборов  $\bar{x}$  и  $\bar{y}$ . Тогда следующие условия эквивалентны:

1. Выражение  $f(t, \dots, x_m, -t, \dots, y_n)$  не зависит от  $t$ .
2.  $x_i \frac{\partial f}{\partial x_i} + y_j \frac{\partial f}{\partial y_j} \in (x_i + y_j)$  для всех  $x_i, y_j$ .

Многочлены  $h_k, h_k^{(\infty)}$  определим как коэффициенты разложения в различных точках следующей рациональной функции

$$\frac{\prod_{j=1}^n (1 + y_j t)}{\prod_{i=1}^m (1 - x_i t)} = \sum_{k=0}^{\infty} h_k t^k = \sum_{k=-\infty}^{n-m} h_k^{(\infty)} t^k. \quad (1.1)$$

Положим  $h_k^* = h_k(x_1^{-1}, \dots, x_m^{-1}, y_1^{-1}, \dots, y_n^{-1})$ . Будем полагать, что  $h_k^* = h_k = 0$  при  $k < 0$ . Определим, наконец, многочлены  $H_k$  как

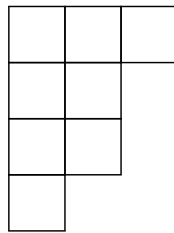
$$H_k = h_k - h_k^{(\infty)} = h_k - (-1)^m \frac{y_1 \cdots y_n}{x_1 \cdots x_m} h_{n-m-k}^* = \begin{cases} h_k, & k > n - m, \\ h_k - h_k^{(\infty)}, & 0 \leq k \leq n - m, \\ -h_k^{(\infty)}, & k < 0. \end{cases}$$

Для дальнейших рассуждений понадобится комбинаторный язык связанный с разбиениями.

**Определение 1.4.** *Разбиением* называется произвольная конечная или бесконечная последовательность  $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_r, \dots)$  неотрицательных чисел в невозрастающем порядке  $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_r \geq \dots$ , которая содержит лишь конечное число  $\lambda_i$  отличных от нуля.

Обычно разбиения изображают диаграммами Юнга.

**Определение 1.5.** Пусть  $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_k)$  – разбиение  $n$ . *Диаграммой Юнга* называется таблица с неравноразмерными строками и столбцами. Количество клеток в  $i$  строке есть  $\lambda_i$ . Например, диаграмма Юнга для разбиения  $(3, 2, 2, 1)$ :



Подобный «геометрический» подход позволяет определить необходимое для дальнейших рассуждений понятие.

**Определение 1.6.** Сопряженным разбиением  $\lambda'$  для подстановки  $\lambda$  называется разбиение, соответствующее транспонированной диаграмме Юнга.

Например, сопряженным разбиением для  $\lambda = (3, 2, 2, 1)$  является  $\lambda' = (4, 3, 1)$ .

В последующих рассуждениях удобна следующая нотация.

**Определение 1.7.** Пусть  $z = (z_i)_{i \in \mathbb{Z}}$  – бесконечная последовательность переменных и  $I = (i_1, \dots, i_p) \in \mathbb{Z}^p$  конечная последовательность целых чисел. Положим

$$R_I(z) = \det (z_{i_\alpha + \beta - 1})_{1 \leq \alpha, \beta \leq p}.$$

Будем называть  $p$  длиной  $I$  и обозначать  $\hat{l}(I)$ .

Кольцо суперсимметрических многочленов  $\Lambda_{m,n}^\pm$  будет фактором следующего формального кольца.

**Определение 1.8.** Пусть  $m, n \in \mathbb{N}_0$ ,  $u_1, u_2, \dots, v_1, v_2, \dots$  два бесконечных набора переменных и  $t$  – дополнительная переменная. Положим  $u_0 = 1, v_0 =$

1 и  $u_i = v_i = 0$  при  $i < 0$ . Определим  $w_i = u_i - tv_{-i-m+n}$  при всех  $i \in \mathbb{Z}$ . Как  $U_{m,n}^\pm$  обозначим свободное кольцо порождённое  $t, u_1, u_2, \dots, v_1, v_2, \dots$ , сфакторизованное по следующим соотношениям

$$R_{i_1, \dots, i_{m+1}}(w) = 0, \quad \text{для всех } (i_1, \dots, i_{m+1}) \in \mathbb{Z}^{m+1}.$$

**Теорема 1.1.** Следующее отображение

$$\varphi(t) = (-1)^m \frac{y_1 \cdots y_n}{x_1 \cdots x_m}, \quad \varphi(u_i) = h_i, \quad \varphi(v_i) = h_i^*, \quad i \geq 1.$$

является изоморфизмом колец  $\Lambda_{m,n}^\pm$  и  $U_{m,n}^\pm$ .

Из изоморфизма выше следует, что существует взаимнооднозначное соответствие  $h_i \leftrightarrow u_i$ ,  $h_i^* \leftrightarrow v_i$ ,  $H_i \leftrightarrow w_i$ .

Формальное кольцо  $U_{m,n}^\pm$  нужно для определения морфизмов на порождающих элементах  $h_i, h_i^*, H_i$ .

**Лемма 2.3.** Пусть дана  $S \xrightarrow{f} R$  функция из множества  $S$  в кольцо  $R$  и известно, что она зануляется на порождающих соотношениях  $f(r_i) = 0$  для всех  $i \in I$ . Тогда коммутативна следующая диаграмма.

$$\begin{array}{ccc} F(S)/\langle r_i \rangle_{i \in I} & \xrightarrow{\exists! \tilde{f}} & R \\ \uparrow \iota & \nearrow f & \\ S & & \end{array}$$

где  $\tilde{f}$  морфизм между кольцами, а  $F(S)$  – свободное кольцо с порождающим множеством  $S$ .

Из леммы 2.3 следует, что для того, чтобы построить морфизм колец, нужно сделать две вещи.

1. Определить отображение на порождающих элементах.
2. Проверить, что все порождающие соотношение переходят в ноль под действием данного отображения.

**Определение 1.9.** Пусть  $(\lambda, \mu)$  две невозрастающие последовательности целых чисел, то есть  $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots$  и  $\mu_1 \geq \mu_2 \geq \dots$ . Запишем последовательность  $\mu$  в виде  $\mu = (\tau_1, \dots, \tau_r, 0, \dots, 0, -\nu_1, \dots, -\nu_s)$ , где  $\tau, \nu$  суть

разбиения. Определим последовательность  $\sigma$  правилом  $(\sigma_1, \dots, \sigma_{l+p+k}) = (\nu'_1, \dots, \nu'_1, \lambda_1, \dots, \lambda_p, \tau'_1, \dots, \tau'_k)$ , где  $p = \hat{l}(\lambda)$ . Определим суперсимметрический многочлен  $E_{\lambda, \mu}$  формулой

$$E_{\lambda, \mu} = \det (a_{ij}), \quad \text{где } a_{ij} = \begin{cases} h_{\sigma_i+i-j}^*, & 1 \leq i \leq l, \\ H_{\sigma_i-i+j}, & l < i \leq l+p, \\ h_{\sigma_i-i+j}, & l+p < i \leq l+p+k, \end{cases}$$

где  $j$  пробегает следующий диапазон  $1 \leq j \leq l+p+k$ .

Описываемые в работе идеалы проективных модулей  $P$  являются суммой некоторого числа определителей  $K_{\lambda, \mu}$ , которые являются частными случаями  $E_{\lambda, \mu}$ .

Сформулируем основные результаты работы.

Случай  $m = n = 1$ . В данном случае изоморфизм  $\Lambda_{1,1}^{\pm} \xrightarrow{f} U_{1,1}^{\pm}$  выглядит следующим образом

$$f(t) = -\frac{y}{x}, \quad f(u_i) = h_i, \quad f(v_i) = h_i^*, \quad i \geq 1$$

Ключевые многочлены  $h_k, h_k^*, H_k$  были подсчитаны ранее и выглядят следующим образом

$$h_k = (x+y)x^{k-1}, \quad h_k^* = (x+y)\frac{1}{x^k y}, \quad H_k = (x+y)x^{k-1}.$$

Проективные модули выглядят здесь следующим образом

$$\begin{aligned} P(a, b) &= K(a, b), \\ P(a, a) &= K(a, a) + K(a+1, a+1). \end{aligned}$$

Отображение, определенное следующим образом

$$\varphi(t) = 1 - \varepsilon,$$

однозначно продолжается до морфизма и выполнены необходимые включения. Здесь и далее все не упомянутые элементы при определении морфизма переходят в ноль.

**Теорема 2.2.** Пусть  $I = \langle P(a | b) \rangle$ . Тогда  $P(a | b) \in \ker \varphi$  и  $I \subset \ker \varphi$ .

Ключевыми для доказательства обратного включения выступают следующие леммы, которые доказаны в дипломной работе.

**Лемма 2.1.** Пусть  $N, M \in {}_R\text{Mod}$ ,  $N = \langle n_i \rangle_{i \in I}$  и  $N \xrightarrow{\varphi} M$  морфизм модулей. Если  $\langle \varphi(n_i) \rangle_{i \in I}$   $R$ -независимы, то  $\varphi$  инъективен.

**Лемма 2.2.** Пусть  $I$  идеал кольца  $R$ , а  $R \xrightarrow{\varphi} S$  такой морфизм колец, что  $I \subset \ker \varphi$ . Из теории известно, что коммутативна следующая диаграмма.

$$\begin{array}{ccc}
 R & \xrightarrow{\varphi} & S \\
 \pi \downarrow & \nearrow \exists! \tilde{\varphi} & \\
 R/I & & 
 \end{array}
 \tag{(2.1)}$$

Если индуцированный морфизм  $\tilde{\varphi}$  инъективен, то  $\ker \varphi \subset I$ .

Лемма 2.1 позволяет сводить вопрос об инъективности (ядре) морфизма к различным свойствам элементов. Так как прямое включение уже доказано  $I \subset \ker \varphi$ , можно пользоваться леммой 2.2, которая гарантирует обратное включение при  $\mathbb{Z}$ -независимости образов.

**Теорема 2.1.** Верно включение  $\ker \varphi \subset I$ .

Доказательство обратного включения сводится к переходу к фактор-кольцу и подсчёту классов соответствующих многочленов. Вычисления облегчаются соотношениями на проективные модули, которые выполняются в факторе по определению.

Случай  $m = 1, n = 2$ . В данном случае изоморфизм  $\Lambda_{1,2}^{\pm} \xrightarrow{f} U_{1,2}^{\pm}$  выглядит следующим образом

$$f(t) = -\frac{y_1 y_2}{x}, \quad f(u_i) = h_i, \quad f(v_i) = h_i^*, \quad i \geq 1$$

Ключевые многочлены  $h_k, h_k^*, H_k$  выглядят так

$$h_0 = 1, \quad h_1 = x + y_1 + y_2, \quad h_k = x^{k-2}(x + y_1)(x + y_2),$$

$$h_0^* = 1, \quad h_1^* = \frac{xy_1 + xy_2 + y_1y_2}{xy_1y_2}, \quad h_k^* = \frac{(x + y_1)(x + y_2)}{x^k y_1 y_2},$$

$$H_k = (x + y_1)(x + y_2)x^{k-2},$$

где в первых двух строках  $k \geq 2$ , а в последней  $k \in \mathbb{Z}$ .

Проективными модули выглядят следующим образом

$$\begin{cases} P(a | a, a + 1) \\ P(a | a + 1, a) \end{cases} = K(a | a, a + 1) + K(a + 2 | a + 1, a + 2),$$

$$P(a | b_1, b_2) = K(a | b_1, b_2),$$

$$P(a | a, b_2) = K(a | a, b_2) + K(a + 1 | a + 1, b_2),$$

$$P(a | b_1, a) = K(a | b_1, a) + K(a + 1 | b_1, a + 1).$$

Для отображения, определенного следующим образом

$$\varphi(t) = y(1 - \varepsilon), \quad \varphi(u_1) = y, \quad \varphi(v_1) = \frac{1}{y}, \quad (2.2)$$

можно доказать, что оно однозначно продолжается до морфизма колец.

**Утверждение 2.1.** Существует и единственный морфизм колец, определенный по правилу (2.2).

И выполнены необходимые включения.

**Теорема 2.2.** Пусть  $I = \langle P(a | b_1, b_2) \rangle_{a, b_1, b_2 \in \mathbb{Z}}$ . Тогда  $P(a | b_1, b_2) \in \ker \varphi$ .

**Теорема 2.3.** Выполнено включение  $\ker \varphi \subset I$ .

Случай  $m = 2, n = 1$ . В данном случае изоморфизм  $\Lambda_{2,1}^\pm \xrightarrow{f} U_{2,1}^\pm$  выглядит следующим образом

$$f(t) = \frac{y}{x_1 x_2}, \quad f(u_i) = h_i, \quad f(v_i) = h_i^*, \quad i \geq 1$$

Ключевые многочлены  $h_k, h_k^*$  выглядят так

$$h_0 = 1, \quad h_k = x_2^k + (x_1 + y) \sum_{s=0}^{k-1} x_1^{k-s-1} x_2^s,$$



$$h_0^* = 1, \quad h_k^* = \sum_{s=0}^k x_1^{k-s-1} x_2^{s+1} \left(1 + \frac{x_1}{x_2} y\right).$$

где  $k > 0$ .

Проективные модули выглядят следующим образом

$$\begin{cases} P(b, b+1 | b) \\ P(b+1, b | b) \end{cases} = K(b, b+1 | b) + K(b+2, b+1 | b+2),$$

$$P(b, a_2 | b) = K(b, a_2 | b) + K(b+1, a_2 | b+1),$$

$$P(a_1, b | b) = K(a_1, b | b) + K(a_1, b+1 | b+1),$$

$$P(a_1, a_2 | b) = K(a_1, a_2 | b).$$

Для отображения, определенного следующим образом

$$\varphi(t) = \varepsilon - \frac{1}{x}, \quad \varphi(u_i) = x^i, \quad \varphi(v_i) = x^{-i} = \frac{1}{x^i}, \quad (2.3)$$

можно доказать, что оно однозначно продолжается до морфизма колец.

**Утверждение 2.3.** Существует и единственный морфизм колец, определенный по правилу (2.3).

И выполнены необходимые включения.

**Теорема 2.4.** Пусть  $I = \langle P(a_1, a_2 | b) \rangle_{a_1, a_2, b \in \mathbb{Z}}$ . Тогда  $P(a_1, a_2 | b) \in \ker \varphi$ .

**Теорема 2.5.** Выполнено включение  $\ker \varphi \subset I$ .

Случай  $m = n = 2$ . Компьютерным перебором было установлено, что для морфизма

$$\varphi(t) = \varepsilon - \frac{y}{x}, \quad \varphi(u_i) = (x+y)x^{i-1}, \quad \varphi(v_i) = (x+y)\frac{1}{x^i y},$$

большое количество как порождающих соотношений, так и проективных модулей переходит в 0. Следовательно, гипотеза о том, что ядро данного морфизма в точности описывает идеал проективных модулей, на первый взгляд имеет положительный ответ.

**Заключение.** Таким образом, в работе было введено кольцо суперсимметрических многочленов  $\Lambda_{m,n}^\pm$ , базовые многочлены  $h_k, h_k^*, H_k$  и базисные  $K_{\lambda,\mu}$ .

Описано особое формальное кольцо  $U_{m,n}^\pm$ . Установлен ключевой изоморфизм  $\Lambda_{m,n}^\pm \xrightarrow{\sim} U_{m,n}^\pm$ , позволяющий определять функции и морфизмы на базисных элементах  $u_i, v_j, w_k$  и  $t$ . Были описаны идеалы проективных модулей  $\langle P(\bar{a}, \bar{b}) \rangle$  в случаях

- $m = 1, n = 1$ ,
- $m = 1, n = 2$ ,
- $m = 2, n = 1$ .

В случае  $m = 2, n = 2$  был указан, по всей видимости, подходящий морфизм, но в связи с вычислительными трудностями, не было проведено доказательство ключевых утверждений.

Была изучена система компьютерной алгебры **SageMath**. Она использовалась при поиске корней многочлена, связанных с идеей построения подходящего морфизма в случае  $m = n = 2$ . Для основных доказанных утверждений был проведён большой компьютерный перебор, который не выявил очевидных ошибок или опечаток в сформулированных определениях и теоремах.