МИНОБРНАУКИ РОССИИ
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«САРАТОВСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ Н.Г. ЧЕРНЫШЕВСКОГО»

Кафедра геометрии

Частичная полугруппа булевых матриц

АВТОРЕФЕРАТ МАГИСТЕРСКОЙ РАБОТЫ

студентки 2 курса 227 группы
направления 02.04.01 Математика и компьютерные науки
механико-математического факультета

Черкасовой Екатерины Сергеевны

Научный руководитель
профессор, д.ф.-м.н., доцент ____________________ В.Б. Поплавский
подпись, дата

И.о. зав. кафедрой
к.п.н., доцент ____________________ А.В. Букушева
подпись, дата

Саратов 2024

Введение. Развитие теории булевых алгебр и булевых матриц тесно связано с приложениями в различных областях научного познания. Булевы матрицы применяются при решении проблем диагностики, в генетике, социальных науках, экономике, кибернетике, теории автоматов и т.д.. Очевидна также и связь теории матриц над решётками с такими математическими теориями как логика, комбинаторика. Многие модели, возникающие в технике, физике, химии и геологии, построены с помощью матриц над булевыми алгебрами. Булевы матрицы над двухэлементной булевой алгеброй можно рассматривать как матрицы инцидентности графов. Очевидна также связь булевых матриц с программированием. Все это подтверждает актуальность темы данной квалификационной работы.

В данной работе рассматривается алгебра булевых матриц. Булевы матрицы опять образуют булеву алгебру, операции которой определяются поэлементно. С другой стороны, кроме булевых операций вводится операция умножения булевых матриц, относительно которой квадратные булевы матрицы образуют полугруппу. В данной квалификационной работе изучаются свойства этих операций, изучается проблема обратимости булевых матриц, разрешимости линейных матричных уравнений и неравенств. На множестве булевых матриц всевозможных размеров с операцией умножения вводятся понятия некоторых классов эквивалентностей Грина, и изучаются ранговые функции в терминах этих эквивалентностей.

Работа состоит из двух глав, содержащих 5 и 3 параграфа соответственно, приложения и списка литературы.

Аналогично с обычной матричной теорией в 1 главе для булевых матриц определяются понятия симметрии и косой симметрии. Доказывается однозначность представления булевой квадратной матрицы в виде суммы симметричной и кососимметричной частей этой матрицы. Даются определения строчно- и столбцово-совместимых матриц и изучаются их свойства, которые применяются для описания обратных булевых матриц матриц. Показано, что обратные булевы матрицы являются аналогами числовых ортогональных матриц. Критерии совместности и решения уравнений $XA = B$, $AX = B$ и неравенств вида $XA \subseteq B$, $AX \subseteq B$.- основной результат этой главы. В конце главы указывается характеристики делителей нуля в полугруппе булевых матриц.

Вторая глава посвящена частичной полугруппе булевых матриц всевозможных размеров над произвольной булевой алгеброй, на которой определена частичная, т.е. определенная не для всех элементов, операция произведения булевых матриц. На этой полугруппе, аналогично классам Грина в теории полугрупп $\mathbf{H}, \mathbf{L}, \mathbf{R}, \mathbf{D}, \mathbf{J}$, определяются классы эквивалентностей $\varepsilon_H, \varepsilon_R, \varepsilon_C, \varepsilon_D, \varepsilon_J$ с помощью понятия односторонних и двусторонних идеалов частичной полугруппы булевых матриц всевозможных размеров. Изучение этих идеалов и указанных в связи с ними классов эквивалентностей составляет основную цель магистерской работы. Главной задачей работы является определение ранговых функций и изучение их свойств.

Основное содержание работы.

Определение 1.1 Алгебра $\langle \mathbf{B}, \cup, \cap, ', 0, 1 \rangle$ называется булевой алгеброй, если на множестве $\mathbf{B}$ определены бинарные операции (объединение и пересечение) $\cup : \mathbf{B} \times \mathbf{B} \longrightarrow \mathbf{B}$, $\cap : \mathbf{B} \times \mathbf{B} \longrightarrow \mathbf{B}$, унарная операция (дополнение) $' : \mathbf{B} \longrightarrow \mathbf{B}$, и 0, 1 - различные элементы из множества $\mathbf{B}$. При этом выполняются следующие тождества для любых $x, y, z \in \mathbf{B}$:

1.1. $x \cup y = y \cup x$,

1.2. $x \cap y = y \cap x$,

2.1. $(x \cup y) \cup z = x \cup (y \cup z)$,

2.2. $(x \cap y) \cap z = x \cap (y \cap z)$,

3.1. $x \cup (x \cap y) = x$,

3.2. $x \cap (x \cup y) = x$,

4.1. $x \cup (y \cap z) = (x \cup y) \cap (x \cup z)$,

4.2. $x \cap (y \cup z) = (x \cap y) \cup (x \cap z)$,

5.1. $x \cap 0 = 0$,

5.2. $x \cup 1 = 1$,

6.1. $x \cup x' = 1$,

6.2. $x \cap x' = 0$.

Из этого определения следует, что $\langle \mathbf{B}, \cup, \cap \rangle$ - это решетка. Эта решетка дистрибутивна ((4.1) и (4.2)), обладает нулем (5.1) и единицей (5.2). Более того, эта решетка является решеткой с дополнением ((6.1) и (6.2)).

Определение 1.2 Произведением $m \times n$- матрицы $A = (A^i_j) \in \mathbf{B_{m\times n}}$ на $n \times k$-матрицу $B = (B^t_s) \in \mathbf{B_{n\times k}}$ назовем матрицу $C = AB$ размера $m \times k$, элементы которой C^i_s вычисляются по формуле

$$C^i_s = (AB)^i_s = \bigcup_{t=1}^{n} (A^i_t \cap B^t_s).$$

Введенное произведение обладает следующими свойствами.Оно выполняется для любых матриц A,B,C соответствующих размеров и произвольных булевых скаляров $\lambda \in \mathbf{B}$.

1. $A(BC) = (AB)C$,
2. $A(B \cup C) = (AB) \cup (AC), (A \cup B)C = (AC) \cup (BC)$,
3. $AE = A, EA = A$,
4. $AO = O, OA = O$,
5. $(AB)^T = B^T A^T$,
6. $A(B \cap C) \subseteq (AB) \cap (AC), (A \cap B)C \subseteq (AC) \cap (BC)$,
7. $\lambda \cap (AB) = (\lambda \cap A)B = A(\lambda \cap B) = (\lambda \cap A)(\lambda \cap B)$,
8. $\lambda \cup (AB) = (\lambda \cup A)(\lambda \cup B)$.

Инвариантность симметричности и кососимметричности матриц

Предложение 2.1 Симметричность инвариантна относительно объединения.

Пусть матрицы A и B – симметричные, то есть $A^T \cap A' = 0$ и $B^T \cap B' = O$. Тогда $A \cap B$ – симметрична, то есть

$$(A \cap B)^T \cap (A \cap B)' = O.$$

Предложение 2.2 Симметричность инвариантна относительно дополнения. Пусть A – симметричная матрица, то есть $A^T \cap A' = O$. Тогда A' тоже симметричная матрица.

Предложение 2.3 Кососимметричность инвариантна относительно пересечения. Пусть матрицы A и B – кососимметричные, то есть $A^T \cap A = O$ и $B^T \cap B = O$.
Тогда $A \cap B$ - кососимметрична,то есть $(A \cap B)^T \cap (A \cap B) = O$.

Замечание 2.4 Кососимметричность однако, не инвариантна относительно объединения. Предположим, матрицы A и B - кососимметричные, то есть $A^T \cap A = O$ и $B^T \cap B = O$. Тогда не обязательно выполнение равенства: $(A \cup B)^T \cap (A \cup B) = O$.

Действительно, $(A \cup B)^T \cap (A \cup B) = (A^T \cup B^T) \cap (A \cap B) = (A^T \cap A) \cup (A^T \cap B) \cup (B^T \cap A) \cup (B^T \cap B) = (A^T \cap B) \cup (B^T \cap A) \neq O$

Следующий пример дает этому подтверждение.

Пример 2.1.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & e \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.\ B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ e & 0 \end{pmatrix}.$$

Проверим, что A и B – кососимметрические матрицы, то есть

$A^т \cap A = O$ и $B^т \cap B = O$.

$$A^т = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ e & 0 \end{pmatrix}.\ B^т = \begin{pmatrix} 0 & e \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$A^т \cap A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ e & 0 \end{pmatrix} \cap \begin{pmatrix} 0 & e \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = O.$$

$$B^т \cap B = \begin{pmatrix} 0 & e \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cap \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ e & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = O.$$

Покажем, что кососимметричность не инвариантна относительно объединения, то есть $(A \cup B)^T \cap (A \cup B) \neq O$.

$$(A \cup B) = \begin{pmatrix} 0 & e \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cup \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ e & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & e \\ e & 0 \end{pmatrix}.$$

$$(A \cup B)^{т} = \begin{pmatrix} 0 & e \\ e & 0 \end{pmatrix}^{т} = \begin{pmatrix} 0 & e \\ e & 0 \end{pmatrix}.$$

$$(A \cup B)^{т} \cap (A \cup B) = \begin{pmatrix} 0 & e \\ e & 0 \end{pmatrix} \cap \begin{pmatrix} 0 & e \\ e & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & e \\ e & 0 \end{pmatrix} \neq O.$$

Простейшие матричные уравнения и неравенства

Рассмотрим задачу нахождения множества матриц X, таких что $XA = B (AX = B)$, где A и B булевы матрицы. Очевидно, что это равносильно поиску пересечения двух множеств матриц X, удовлетворяющих неравенствам $XA \subseteq B$ и $XA \supseteq B$. Далее мы покажем, что неравенство первого типа решается достаточно просто. Решение неравенства второго типа является более сложной задачей.

Заметим, если A является ортогональной, то $X = BA^T$ является единственным решением $XA = B$. Однако в общем случае решение может быть не единственным.

Теорема 3.1 В алгебре булевых матриц $XA \subseteq B$ тогда и только тогда, когда $X \subseteq (B'A^T)'$, и $AX \subseteq B$ тогда и только тогда, когда $X \subseteq (A^TB')'$.

Теорема 3.2 $XA = B$ имеет решение тогда и только тогда, когда $B \subset (B'A^T)'A$.

Учитывая теорему 3.2, нетрудно доказать следующее утверждение, описывающее множество решений в виде однопараметрического множества булевых мвтриц.

Идеалы частичной полугруппы булевых матриц и их инварианты.

Определение 4.1 Назовем *линейной комбинацией* $m \times n$-матриц $B_1, B_2, \ldots$ $\ldots, B_k$ с коэффициентами $\lambda^1, \lambda^2, \ldots, \lambda^k$ выражение $(\lambda^1 \cap B_1) \cup (\lambda^2 \cap B_2) \cup \ldots \cup (\lambda^k \cap B_k)$.

Линейной оболочкой $m \times n$-матриц $B_1, B_2, \ldots, B_k$ назовем множество всевозможных линейных комбинаций этих булевых матриц, которое обозначим через $S(\{B_1, B_2, \ldots, B_k\})$.

Будем говорить, что матрица B *зависит* от матриц $B_1, B_2, \ldots, B_k$, если $B \in S(\{B_1, B_2, \ldots, B_k\})$. Множество матриц $B_1, B_2, \ldots, B_k$ назовем множеством *независимых* матриц, если каждая матрица $B_j, j = 1, 2 \ldots, k$, не принадлежит линейной оболочке $S(\{B_1, \ldots, B_{j-1}, B_{j+1}, \ldots, B_k\})$ других матриц этого множества.

Рассмотрим свойства линейных оболочек матриц одного размера.

Теорема 4.1 Матрицы $B_1, B_2, \ldots, B_k$ принадлежат линейной оболочке $S(\{C_1, C_2, \ldots, C_p\})$, тогда и только тогда, когда

$$S(\{B_1, B_2, \ldots, B_k\}) \subseteq S(\{C_1, C_2, \ldots, C_p\}).$$

Определение 4.2 Через $C(A)$ обозначим линейную оболочку всех столбцов $A_1, A_2, \ldots, A_n$ некоторой булевой $m \times n$-матрицы A и назовем ее *столбцовым пространством.* Линейная оболочка всех строк $A^1, A^2, \ldots, A^m$ данной матрицы A определяет *строчное пространство* $R(A)$ булевой $m \times n$-матрицы A.

Множество таких независимых столбцов $A_1, A_2, \ldots, A_k$ некоторой матрицы A, что

$$C(A) = S(\{A_1, A_2, \ldots, A_n\}), \ (k \leq n),$$

назовем *столбцовым базисом* матрицы A. *Строчный базис* определяется аналогично $A^1, A^2, \ldots, A^p$, $(p \leq m)$.

Множество всех столбцовых базисов (или всех строчных базисов) матрицы A могут содержать базисы, состоящие из различного количества столбцов (или строк). Следующие примеры демонстрируют данное утверждение.

Пример 1 Элементы булевой матрицы

$$A = \begin{pmatrix} [1;3] & [2;3] & \emptyset \\ [3;5] & [3;4] & \{5\} \\ [1;2] & \{2\} & \emptyset \\ [2;4] & [2;4] & \emptyset \\ (4;5] & \emptyset & \{5\} \end{pmatrix}$$

являются подмножествами действительной числовой прямой. Нетрудно проверить, что первые две и оставшиеся три строчки образуют базисы ее строчного пространства. Столбцовый базис один и состоит из двух первых столбцов этой матрицы.

Определение 4.3 *Размерностью пространства столбцов* $C(A)$ или *столбцовым рангом* матрицы A назовем число, обозначаемое либо $dimC(A)$, либо $rank_C A$, и равное наименьшему возможному числу столбцов всех таких матриц B, для которых $C(A) = C(B)$. Соответственно, *размерностью пространства строк* $R(A)$ или *строчным рангом* матрицы A назовем число, обозначаемое либо $dimR(A)$, либо $rank_R A$, и равное наименьшему возможному числу строк всех таких матриц B, для которых $R(A) = R(B)$.

Заметим, что в общем случае $rank_C A \neq rank_R A$.

Из определения 4.3 получается, что для любой булевой матрицы A обязательно существует матрица B с тем же самым столбцовым или строчным пространством, для которой выполняется

$$rank_C B = rank_C A \text{ или } rank_R B = rank_R A.$$

Вычисление рангов булевых матриц

Вычисление рангов матриц, таких как столбцовый, строчный и факторизационный ранг, является непростой задачей и относится к классу NP-сложных проблем, то есть их решение требует экспоненциального времени по размеру матрицы. Алгоритмы вычисления рангов Для вычисления столбцового и строчного рангов существуют известные алгоритмы. Эти алгоритмы используют различные техники, такие как редукция матрицы к эшелонной форме или разложение на сингулярные значения. Использование систем компьютерной математики Системы компьютерной математики (СКМ), такие как Maple, Mathematica, MatLab и Derive, широко применяются в различных научных областях. Они предоставляют пользователям мощные средства для проведения численных и аналитических расчетов, программирования и визуализации данных. Булевы матрицы, состоящие из нулей и единиц, обладают особыми свойствами. Их столбцовый ранг равен количеству линейно независимых столбцов, а строчный ранг равен количеству линейно независимых строк. Приложение в теории кодирования Вычисление рангов матриц имеет практическое применение в теории кодирования. Столбцовый ранг матрицы инцидентности кода может быть использован для определения минимального расстояния кода.

Нами рассмотрена задача нахождения строчного и столбцового базисов булевой матрицы в программе Wolfram Mathematica применительно к матрице из примера 2.1.2:

$$A = \begin{pmatrix} (11100) & (01100) & (00000) \\ (00111) & (00110) & (00001) \\ (11111) & (01110) & (00001) \end{pmatrix}$$

построенной из элементов булевой алгебры $\mathbf{B}_2^5$, являющейся пятой степенью двухэлементной булевой алгебры $\mathbf{B}_2 = \{0, 1\}$.

Найдены два строчных базиса $b^1 = \{A^1, A^2\}$ и $b^2 = \{A^3\} : A^3 = A^1 \cup A^2$, $A^1 = (11100) \cap A^3$ и $A^2 = (00111) \cap A^3$.

Столбцовый базис единственен и состоит из $b_1 = \{A_1\} : A_2 = (01110) \cap A_1$ и $A_3 = (00001) \cap A_1$.

Примеры вычисления рангов.

Пример 1.

Рассмотрим матрицу

$$
A = \begin{pmatrix} [0;1] & [0;2] & [0;3] \\ [-1;0] & \emptyset & [0;2] \\ [0;1] & [0;3] & [-1;2] \end{pmatrix}
$$

с элементами из булевой алгебры всех подмножеств действительной числовой прямой. Легко вычислить перманенты:

$$
PerA = \overset{+}{\nabla} A = \overset{-}{\nabla} A = [0;1].
$$

Тогда $DetA = \emptyset$. При этом

$$
Det \begin{pmatrix} [0;1] & [0;2] \\ [-1;0] & \emptyset \end{pmatrix} \neq \emptyset
$$

Следовательно, $rank_{Per}A = 3 \geqslant rankA = 2$. Тогда по теореме 2.6.3 получаем то $rank_f A = rankA = 2$. Действительно, матрицу A можно представить в виде

$$
A = \begin{pmatrix} [0;1] & [0;2] & [0;3] \\ [-1;0] & \emptyset & [0;2] \\ [0;1] & [0;3] & [-1;2] \end{pmatrix} =
$$

$$
= \begin{pmatrix} [0;2] & [0;3] \\ \emptyset & [-1;2] \\ [-1;3] & [0;1] \end{pmatrix} \begin{pmatrix} [0;1] & [0;3] & [-1;2] \\ [-1;0] & \emptyset & [0;3] \end{pmatrix}.
$$

Заключение. В данной выпускной магистерской работе даны определения и изучены свойства различных ранговых функций, определенных на множествах булевых матриц произвольного размера, элементами любой булевой алгебры. Определены классы эквивалентности ϵ_H, ϵ_R, ϵ_C, ϵ_D, ϵ_J Грина над множествами булевых матриц с операциями умножения, на них используя понятия одностороннего и двустороннего идеалов. Определение и построение инвариантов. Были даны определения столбцовых, строчных и факторизационных рангов. Изучены проблемы обратимости матриц, разрешимости линейных матричных уравнений и неравенств. Доказали однозначность булевой квадратной матрицы.

В данной выпускной магистерской работе представлен обширный обзор ранговых функций, определённых на множестве булевых матриц. Изучены свойства этих функций и их связь со структурой матриц, а также показаны их практические применения в задачах совместности булевых уравнений и неравенств.