МИНОБРНАУКИ РОССИИ

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«САРАТОВСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ИМЕНИ Н.Г. ЧЕРНЫШЕВСКОГО»

Кафедра математического анализа

Линейно инвариантные расширения семейств аналитических функций

АВТОРЕФЕРАТ МАГИСТЕРСКОЙ РАБОТЫ

студента(ки) 2 курса 227 группы

направление **02.04.01 – Математика и компьютерные науки**

механико-математического факультета

Бурденковой Елены Юрьевны

Научный руководитель

профессор, д.ф.-м.н., профессор _______________ Д.В.Прохоров

Заведующий кафедрой

И.о.зав.кафедрой, д.ф.-м.н._______________ П.А.Терехин

Саратов 2024

ВВЕДЕНИЕ. Актуальность работы обусловлена интересом к линейно инвариантным семействам, вызванным тем, что многие известные классы конформных отображений являются линейно-инвариантными семействами и обладают рядом свойств, общих для всех таких семейств. В данной работе **объектом исследования** являются линейно-инвариантные семейства звездообразных и выпуклых функций, п**редметом исследования** являются их свойства и оценки. **Целью работы** является рассмотрение методов решения экстремальных задач в некоторых классах однолистных функций, изучение их применения при исследовании функций. Для достижения цели выполняется комплекс взаимосвязанных **задач**:

1. Определение линейно инвариантных преобразований и их свойств.
2. Рассмотрение линейно инвариантных расширений и связанных с ними задач.
3. Проведение численного описания множеств значений некоторых семейств линейно инвариантных семейств конформных отображений и образов функции Кебе при линейно инвариантном преобразовании.

Практическая значимость работы состоит в том, что, пользуясь теми же приемами, что и при доказательстве теоремы об оценке главного значения многозначной функции, можно решать аналогичные экстремальные задачи в классе почти выпуклых мероморфных функций, сводя их к задачам на классе слабо звездообразных мероморфных функций.

ЛИНЕЙНО ИНВАРИАНТНЫЕ РАСШИРЕНИЯ СЕМЕЙСТВ АНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ. Определение 1. Линейно инвариантное семейство $L(H)$ является линейно инвариантным расширением семейства H, если $H \subset L(H)$ и любое линейно инвариантное множество, содержащее H, содержит и $L(H)$.

Теорема 1. Справедливо соотношение

$L(S^*) = \left\{f^*(z): f^*(z) = M_\xi\big(f(z)\big), f(z) \in S^*, |\xi| < 1\right\}$.

Как ближайшее приложение теоремы 1, выводится следующая оценка соотношения между коэффициентами звездообразных функций.

Теорема 2. Пусть $f(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n \in S^*$. Тогда для любого $\xi \in D$ и $n = 2, 3, \ldots$ справедливо неравенство:

$\left|\xi a_{n+1} + (1 + |\xi|^2) a_n + \bar{\xi} a_{n-1}\right| \le n|1 + |\xi|^2 + a_2\xi|$.

Определение 2. Функция $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ принадлежит классу S_1^*, если она регулярна в D, существует $\rho > 0$ такое, что выполняются следующие условия:$Re\frac{zf'(z)}{f(z)} > 0, \rho < |z| < 1; \int_0^{2\pi} Re\frac{zf'(z)}{f(z)} d\theta = 2\pi, z = re^{i\theta}, \rho < r < 1.$

Определение 3. Функция $f(z)$ принадлежит классу W_1, если:

$f(z) = h(z)\psi(z,\xi)$, где $h(z) \in S^*, \psi(z,\xi) = \frac{(z-\xi)(1-\bar{\xi}z)}{z}, \xi \in D.$

Профессор Прохоров Д.В. дополнил этот результат, используя теорему 1, и, кроме того, указал метод получения экстремальных оценок в классе W_1, отличный от употреблявшегося в предыдущих работах.

Теорема 3. $W_1(\xi) = \left\{f(z): f(z) = h\left(\frac{z-\xi}{1-\bar{\xi}z}\right), h(z) \in S^*\right\}.$

Теорема 3 дает возможность сводить решение экстремальных задач в кассе $W_1(\xi)$ к решению соответствующих экстремальных задач в классе S^* с той разницей, что вместо круга $|z| \le r, 0 < r < 1$, придется рассматривать неевклидов круг с центром в неевклидовой точке ξ и неевклидовым радиусом R, $thR = r$, то есть круг $\left|\frac{z-\xi}{1-\bar{\xi}z}\right| \le r$.

Лемма 1. Пусть $|\xi| < \sqrt{2} - 1$. Тогда существует $\rho, 0 < \rho < 1$, такое, что всякая неевклидова окружность c_r с центром в неевклидовой точке ξ и неевклидовым радиусом R, $thR = r$, $\rho < r < 1$, отображается всякой функцией $f(z) \in S^*$ на звездообразную кривую. Если $\sqrt{2} - 1 < |\xi| < 1$, то для всякого $\rho \in (0, 1)$ найдется $r \in (\rho, 1)$ и функция $f(z) \in S^*$, отображающая неевклидову окружность c_r на незвездообразную кривую.

И.А. Александровым была решена задача о звездообразности образа неевклидовой окружности c_r с неевклидовым центром в точке ξ относительно точки $f(\xi)$ при отображении произвольной функции $f(z) \in S$.

Теорема 4. Если $|\xi| < \sqrt{2} - 1$, то $W_1(\xi) \subset S_1^*$. Если $|\xi| > \sqrt{2} - 1$, то класс $W_1(\xi)$ не является частью S_1^*.

Теорема 4 дополняет упоминавшийся выше результат Хаммеля. Случай $|\xi| = \sqrt{2} - 1$ по соображениям непрерывности должен быть отнесен ко второму утверждению теоремы 4.

Теорема 5. Пусть $\xi \in D$. Тогда для заданного $z \in D$ аргумент $\arg f'(z)$ достигает своего максимума и минимума в классе $W_1(\xi)$ только в случае функций $f(z) = \frac{(z-\xi)(1-\bar{\xi}z)}{(1-e^{i\alpha}z)^2}, \alpha \in [0, 2\pi)$. Здесь и в дальнейшем под $\arg f'(z)$ понимается главное значение многозначной функции.

Следствие 1. Для функций $f(z) \in W_1$ имеем оценку $|\arg f'(z)| < (5/2)\pi$. Величину $(5/2)\pi$ уменьшить нельзя.

Определение 4. Пусть функция $f(z)$ регулярна в D за исключением простого полюса в точке $\xi \in D$. Функция $f(z)$ принадлежит классу Σ_1^*, если существует $\rho, |\xi| < \rho < 1$, такое, что выполняются следующие условия:

$$Re \frac{zf'(z)}{f(z)} < 0, \rho < |\xi| < 1\,; \int_0^{2\pi} Re \frac{zf'(z)}{f(z)} d\theta = -2\pi, z = re^{i\theta}, \rho < r < 1\,.$$

Определение 5. Будем говорить, что функция $f(z)$ принадлежит классу $W^1(\xi), \xi \in D$, если $f(z) = \frac{h(z)}{\psi(z,\xi)}$, где $h(1/z) \in S^*, \psi(z, \xi) = (z - \xi)(1 - \bar{\xi}z)/z$.

Известна теорема: если $|\xi| < \sqrt{2} - 1$, то $W^1(\xi) \subset \Sigma_1^*$; если $|\xi| > \frac{1}{2}$, то $W^1(\xi)$ не является подклассом класса Σ_1^*. Случай $\sqrt{2} - 1 \leq |\xi| \leq 1/2$ оставался открытым.

Теорема 6. Если $|\xi| < \sqrt{2} - 1$, то $W^1(\xi) \subset \Sigma_1^*$. Если $|\xi| > \sqrt{2} - 1$, то класс $W^1(\xi)$ не является частью Σ_1^*.

НЕКОТОРЫЕ ПРОБЛЕМЫ ДЛЯ ЛИНЕЙНО-ИНВАРИАНТНЫХ СЕМЕЙСТВ. **Лемма 1.** Функция φ принадлежит V_kтогда и только тогда, когда существуют две нормализованные звездообразные функции s_1, s_2, такие, что:

$$\varphi'(z) = \left[\frac{s_1(z)}{z}\right]^{\frac{k+2}{4}} \Big/ \left[\frac{s_2(z)}{z}\right]^{\frac{k-2}{4}}, z \in K \text{ или } \varphi'(z) = [g_1(z)]^{\frac{k+2}{4}} [g_2(z)]^{\frac{k-2}{4}}, z \in K.$$

где $g_1(z)$, $g_2(z)$ - две нормализованные выпуклые функции.

Определение 1. Мы говорим, что $F \in \mathcal{F}$, если F аналитична в K, и ее производная F' имеет вид:$F'(z) = \prod_{j=1}^{n} \left[f_j'(z)\right]^{a_j}$, a_j является вещественной, $\sum_{j=1}^{n} a_j = 1, z\epsilon K$,где $f_j \in \mathfrak{M}_j$, j=1, 2, …, n, и $\mathfrak{M}_j$ линейно-инвариантное семейство в смысле Поммеренке.

Теорема 1. Если $F \in \mathcal{F}$, то:

$D(z, a) = \bigoplus_{j=1}^{n} D_j(\xi) \cup \{\log \eta\}$, где $\oplus$ обозначает геометрическую сумму множеств.

Из Теоремы 1 следует, что для нахождения множества $D(z, a)$ достаточно определить множества $D_j(\xi)$. Множество $D(z)$ известно в случае классов S, L и S^c.

Теорема 2. Множество $D(s) = \{w: W = \log f'(z)\,, f \in LV(\beta, k)\}$ представляет собой замкнутое и выпуклое множество, граница которого имеет уравнение:$w(i) = \log\frac{(1-re^{i\theta_2})^{\gamma-1}}{(1-re^{i\theta_1})^{\gamma+1}} t\epsilon[0; 2\pi], r = |z| < 1$,где $\gamma = \beta + \frac{k}{2}$ и

$\theta_1 = \theta_1(t) = t - \arcsin(r \sin t)$,$\theta_2 = \theta_2(t) = \pi + t + \arcsin(r \sin t)$.

Положим $\beta = 0$ в теореме 2, тогда:

Теорема $2'$. Множество $D(z) = \{w: W = \log \varphi'(z)\,, \varphi \in V_k\}$ является замкнутым и выпуклым множеством, граница которого имеет уравнение:

$w(t) = \log\frac{(1-re^{i\theta_2})^{k/2-1}}{(1-re^{i\theta_1})^{k/2+1}}, t\epsilon[0; 2\pi], r = |z| < 1.$

Теорема 3. Еслиf $\in LV(\beta, k)$, то при $|z| = r < 1$:

$\arg|f'(z)| \le (2\beta + k)\arcsin r$ [3],$\frac{(1-r)^{r-1}}{(1+r)^{r+1}} \le |f'(z)| \le \frac{(1+r)^{r-1}}{(1-r)^{r+1}}$.

Теорема 4. Пусть:$\mathcal{F}_{LV} = \left\{F: F'(z) = \prod_{j=1}^{n}[f_j'(z)]^{a_j}, f_j \in LV(\beta_j, k_j)\right\}$.

Тогда $D(z, a)$ — замкнутое и выпуклое множество, граница которого имеет уравнение:$w(t) = \log\eta\prod_{j=1}^{n}\frac{(1-|\xi|e^{i\theta_2})^{(\gamma_j-1)a_j}}{(1-|\xi|e^{i\theta_1})^{(\gamma_j+1)a_j}}, t \in [0,2\pi]$,где $\gamma_j = \beta_j + \frac{k_j}{2}$ и:

$\theta_1 = \theta_1(t) = t - \arcsin(|\xi|\sin t), \theta_2 = \theta_2(t) = \pi + t + \arcsin(|\xi|\sin t)$.

Функции F, соответствующие границе $D(z, a)$ задаются формулой:

$\frac{F\prime(z)}{F\prime(a)} = \eta\prod_{j=1}^{n}\frac{(1-\xi e^{i\theta_2})^{(\gamma_j-1)a_j}}{(1-\xi e^{i\theta_1})^{(\gamma_j+1)a_j}}$. Подставляя в теореме 4 $n = 1$ и $k = 2$ или $\beta = 0$ получаем:

Следствие 1. Граница:$D(z, a) = \left\{w: w = \log\frac{\varphi'(z)}{\varphi'(a)}, \varphi \in V_k\right\}$ имеет уравнение:$w(t) = \log\eta\prod_{j=1}^{n}\frac{(1-|\xi|e^{i\theta_2})^{\beta}}{(1-|\xi|e^{i\theta_1})^{\beta+2}}, t \in [0,2\pi]$.

Следствие 2. Граница:$D(z, a) = \left\{w: w = \log\frac{\varphi'(z)}{\varphi'(a)}, \varphi \in V_k\right\}$ имеет уравнение:$w(t) = \log\eta\prod_{j=1}^{n}\frac{(1-|\xi|e^{i\theta_2})^{k/2-1}}{(1-|\xi|e^{i\theta_1})^{k/2+1}}, t \in [0,2\pi]$.

Следствие 3. Если $F \in \mathcal{F}_{LV}$ тогда:$\left|\arg\frac{F\prime(z)}{F\prime(a)}\eta^{-1}\right| \le \left(2\sum_{j=1}^{n}\gamma_j\right)\arcsin|\xi|$,

$|\eta|\frac{(1-|\xi|)^{\sum_1^n(\gamma_j-1)a_j}}{(1+|\xi|)^{\sum_1^n(\gamma_j+1)a_j}} \le \left|\frac{F\prime(z)}{F\prime(a)}\right| \le |\eta|\frac{(1+|\xi|)^{\sum_1^n(\gamma_j-1)a_j}}{(1-|\xi|)^{\sum_1^n(\gamma_j-1)a_j}}$.

Теорема 5. Радиус однолистности $LV(\beta, k)$ равен $\tan\frac{\pi}{2\beta+k}$.

Следствие 4. Радиус однолистности $\mathcal{F}_{LV}$, равен $\tan\frac{\pi}{\sum 2\beta_j+k_j}$.

Теорема 6. Радиус $\varkappa -$ почти-выпуклое $LV(\beta, k)$ является единственным корнем уравнения:$2\operatorname{arc\,cot} w - (2\beta + k)\operatorname{arc\,cot}\left[\left(\beta + \frac{k}{2}\right)w\right] = -\varkappa\pi$,где $w = (1 - r^2)[(2\beta + k)^2 r^2 - (1 - r^2)^2]^{-1/2}$.

Следствие 5. $LV(\beta, k) \subset L_{\beta+k/2-1}$, в частности $V_k \subset L_{k/2-1}$ [19].

Замечание 1. Если$2\beta + k \leq 4$, то $LV(\beta, k)$ состоит только из однолистных почти-выпуклых функций.

Интересным примером класса $\mathcal{F}$ является следующий:

$\mathcal{F}_s = \{F: F(z) = \int_0^z [f'(\xi)]^a [g'(\xi)]^{1-a} d\xi, f, g \in S\}$.

Теорема 7. Если $a \in [0, 1]$, то каждая функция $F \in \mathcal{F}_s$ однолистна по крайней мере в круге $|z| < r_u$ где:$r_u = \frac{e^{\frac{\pi}{2}}}{1+\sqrt{1+e^{\pi}}}$, $(r_u > 0{,}81)$.

Замечание 2. Интеграл $\int_0^z (f'(\xi))^a d\xi$, $f \in S$, $a \in [0, 1]$ однолистен по крайней мере при $|z| < r_u$.

Лемма 1′. Функция $f \in LV(\beta, k)$тогда и только тогда, когда существуют функция $p \in P$и функции$g_1, g_2 \in S^c$такие, что:

$f'(z) = e^{-ia} p^{\beta}(z) [g_1'(z)]^{\frac{2+k}{4}} [g_2'(z)]^{\frac{2-k}{4}}, z \in K$.

Лемма 2. Для любых $\beta \geq 0$ и $k \geq 2$ класс $LV(\beta, k)$ является линейно-инвариантным семейством порядка $\gamma = \beta + \frac{k}{2}$.

Лемма 3. Класс $\mathcal{F}$ является линейно-инвариантным семейством.

Замечание 3. Легко заметить, что, если $f_j \in \mathfrak{M}_j$, тогда $e^{-i\theta} f_j(e^{i\theta} z) \in \mathfrak{M}_j$ для произвольного вещественного θ. Отсюда следует, что если γ_j - порядок $\mathfrak{M}_j$, то порядок $\mathcal{F}$ равен $\gamma = \sum_{j=1}^n a_j \gamma_j$.

Замечание 4. Из результата Поммеренке [12] следует, что радиус выпуклости семейства $\mathcal{F}$ равен:$r_c = (\sum_{j=1}^n |a_j| \gamma_j + \sqrt{(\sum_{j=1}^n |a_j| \gamma_j)^2})^{-1}$.

3 ОБЛАСТЬ ИЗМЕНЕНИЙ $\log f'(z)$ В НЕКОТОРЫХ ПОДКЛАССАХ ФУНКЦИЙ, БЛИЗКИХ К ВЫПУКЛЫМ. Теорема 1. Множество $D(r, k, m), 0 < r < 1$, является замкнутой и выпуклой областью.

Теорема 2. Граница $D(r, k, m)$ состоит из дуги Γ с уравнением:

$w = \log \frac{1 - r^m e^{i\theta_{2,m}(\beta)}}{(1 - r^m e^{i\theta_{2,m}(\beta)})[1 - r^k e^{i\theta_{1,k}(\beta)}]^{2/k}}, 0 \leq \beta \leq \pi$,где:

$\theta_{1,s}(\beta) = \beta - \arcsin(r^s \sin\beta)$, $\theta_{2,s}(\beta) = \pi + \beta + \arcsin(r^s \sin\beta)$

и его отражение Γ^* на действительной оси.

Теорема 3. Если $f \epsilon L_{km}$, то:

$$\frac{1-r^m}{(1+r^m)(1-r^k)^{2/k}} \le |f'(z)| \le \frac{1+r^m}{(1-r^m)(1-r^k)^{\frac{2}{k}}}, |\arg f'(z)| \le 2 \arcsin r^m + \frac{2}{k} \arcsin r^k,$$ где $|z| = r$.

Теорема 4. Область $D(r, k)$ изменчивости $\log f'(z)$ при фиксированных z, $z \epsilon K_1$, f, пробегающих класс L_kk-симметричных, близких к выпуклым функций, есть замкнутая, выпуклая область, симметричная относительно вещественной оси Ou и прямой $u =— \left(\frac{1}{k}\right) \log(l — r^{2k})$. Его граница состоит из дуги F с уравнением:$w = \log\left(1 - r^k e^{i\theta_{2,k}(\beta)}\right) \left[1 - r^k e^{i\theta_{1,k}(\beta)}\right]^{-(k+2)/k} 0 < \beta < n.$

Теорема 5. Если $f \epsilon L_k$, то:$\frac{1-r^k}{(1-r^k)^{(k+2)/k}} \le |f'(z)| \le \frac{1+r^k}{(1-r^k)^{(k+2)/k}}$,

$$|\arg f'(z)| \le \left(2 + \frac{2}{k}\right) \arcsin r^k.$$

4 ОБРАЗЫ ФУНКЦИИ КЁБЕ ПРИ ЛИНЕЙНО ИНВАРИАНТНОМ ПРЕОБРАЗОВАНИИ. **Функцией Кёбе** называется функция вида $k_\theta(z) = \frac{z}{(1-e^{i\theta}z)^2}$. Функция Кёбе является экстремальной во многих задачах теории однолистных функций.Функция Кебе отображает единичный круг на всю плоскость с разрезом по лучу, начало луча на расстоянии $\frac{1}{4}$ от начала координат.

Теорема Гренвалла. Предположим, что$g(z) = z + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2} + \cdots$ однолистна в $|z| > 1$. Тогда $\sum_{n \ge 1} n|b_n|^2 \le 1$.

Гипотеза Бибербаха: Пусть $g(z) = z + a_2 z^2 + a_3 z^3 + \cdots$однолистна в $|z| < 1$. Тогда$|a_2| \le 2$.

Теорема Кёбе об 1/4

Если $f(z)$ — однолистная функция в $\Delta = \{z: |z| < 1\}$, то имеет место включение $\Delta_{\frac{1}{4}} \subset f(\Delta)$, где $\Delta_{\frac{1}{4}} = \left\{z: |z| < \frac{1}{4}\right\}$.

Теорема Кёбе об искажении дает ряд оценок для однолистной функции и ее производной. Это прямое следствие неравенства Бибербаха для второго коэффициента и теоремы Кебе о четверти.

Пусть $f(z)$ - однолистная функция на $|z| < 1$ нормализована так, что $f(0) = 0$ и $f'(0) = 1$, и пусть $r = |z|$. Тогда$\frac{r}{(1+r)^2} \leq |f(z)| \leq \frac{r}{(1-r)^2}$; $\frac{1-r}{(1+r)^3} \leq |f'(z)| \leq \frac{1+r}{(1-r)^3}$; $\frac{1-r}{1+r} \leq \left|z\frac{f'(z)}{f(z)}\right| \leq \frac{1+r}{1-r}$тогда и только тогда, когда f является функцией Кёбе[29].

5 ПРАКТИЧЕСКАЯ ЧАСТЬ. Исходные данные: дана функция $f(z) = z + \frac{1}{2}z^2$. Построить ее график и исследовать свойства. График строится в координатах u и v:

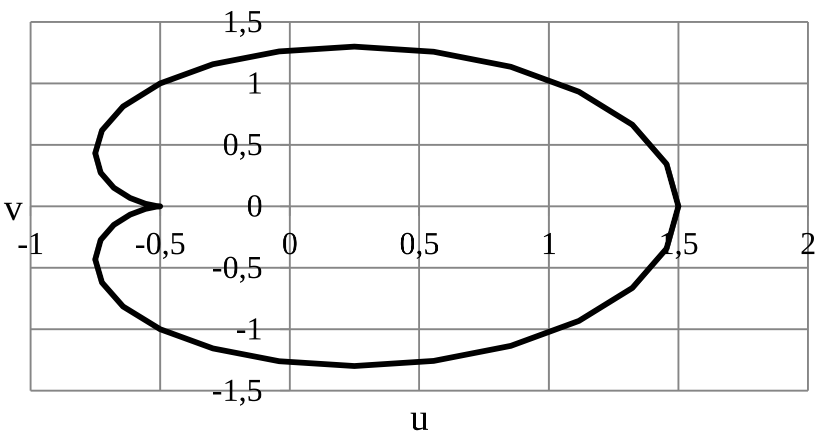

График представляет собой кардиоиду. Из графика видно, что функция является многозначной, следовательно в общем случае не является аналитической; не отображает единичный круг на выпуклую область, так как не любую пару точек можно соединить отрезком, целиком лежащим в той области, на которую она отображает единичный круг, поэтому не является выпуклой. Тригонометрические функции, из которых составлена действительная и мнимая части функции являются периодическими с периодом 2π, поэтому она является периодической с периодом 2π.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ. В ходе работы были рассмотрены следующие условия:

1) условия того, что линейно инвариантное семейство $L(H)$ является линейно инвариантным расширением семейства H, если $H \subset L(H)$ и любое

линейно инвариантное множество, содержащее H, содержит и $L(H)$; 2) условия принадлежности функции к классу звездообразных функцийS_1^*, когда она регулярна в D и существует $\rho > 0$ такое, что выполняются следующие условия:$Re\frac{zf'(z)}{f(z)} > 0, \rho < |z| < 1; \int_0^{2\pi} Re\frac{zf'(z)}{f(z)} d\theta = 2\pi, z = re^{i\theta}, \rho < r < 1$; 3) условия принадлежности функции к классу W_1, когда$f(z) = h(z)\psi(z,\xi)$, где $h(z) \in S^*, \psi(z,\xi) = \frac{(z-\xi)(1-\bar{\xi}z)}{z}, \xi \in D$.

1. Рассмотрены следующие теоремы с доказательствами: 1) теорема о справедливости соотношения:$L(S^*) = \left\{J^*(z): J^*(z) = M_\xi\big(f(z)\big), f(z) \in S^*, |\xi| < 1\right\}$,где $M_\xi\big(f(z)\big) = \frac{f(z)\cdot\psi(z,\xi)+\xi}{1+|\xi|^2-a_2\xi}$, где $f(z) = z + a_2z^2 + \cdots, \psi(z,\xi) = \frac{(z-\xi)(1-\bar{\xi}_z)}{z}$, $|\xi| < 1$; 2) теорема об оценке соотношения между коэффициентами звездообразных функций при условии: $f(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n \in S^* \forall\xi \in D$ и $n = 2, 3, \ldots$,когда справедливо неравенство: $\left|\xi a_{n+1} + (1+|\xi|^2)a_n + \bar{\xi}a_{n-1}\right| \le n|1 + |\xi|^2 + a_2\xi|$; 3) теорема о справедливости соотношения:$W_1(\xi) = \left\{f(z): f(z) = h\left(\frac{z-\xi}{1-\bar{\xi}z}\right), h(z) \in S^*\right\}$,где$W_1(\xi)$ - класс функций $f(z) \in W_1$, имеющих представление $f(z) = h(z)\psi(z,\xi)$ с фиксированным ξ; 3) теорема о том, что если $\xi \in D$, то для заданного $z \in D$ аргумент $\arg f'(z)$ достигает своего максимума и минимума в классе $W_1(\xi)$ только в случае функций$f(z) = \frac{(z-\xi)(1-\bar{\xi}z)}{\left(1-e^{i\alpha}z\right)^2}, \alpha \in [0, 2\pi)$.

2. Рассмотрено следствие теоремы с доказательством об оценке функций $f(z) \in W_1$, которая имеет представление$|\arg f'(z)| < (5/2)\pi$,причем величину $(5/2)\pi$ уменьшить нельзя.

3. Рассмотрена теорема без доказательства о том, что если $|\xi| < \sqrt{2} - 1$, то $W_1(\xi) \subset S_1^*$, аесли $|\xi| > \sqrt{2} - 1$, то класс $W_1(\xi)$ не является частью S_1^*.

4. Рассмотрена лемма с доказательством о том, что если $|\xi| < \sqrt{2} - 1$, то существует $\rho, 0 < \rho < 1$, такое, что всякая неевклидова окружность c_r с центром в неевклидовой точке ξ и неевклидовым радиусом R, $thR = r, \rho < r <$

1, отображается всякой функцией $f(z) \in S^*$ на звездообразную кривую. Если $\sqrt{2} - 1 < |\xi| < 1$, то для всякого $\rho \in (0, 1)$ найдется $r \in (\rho, 1)$ и функция $f(z) \in S^*$, отображающая неевклидову окружность c_r на незвездообразную кривую.

5. Был проведен анализ некоторых проблем для линейно-инвариантных семейств. Через F обозначается класс голоморфных функций в кругу $\mathrm{K} = \{\mathrm{z}: |\mathrm{z}| < 1\}$ данных формулой:$\mathrm{F}'(\mathrm{z}) = \prod_{\mathrm{j}=1}^{\mathrm{n}} [\mathrm{f}'(\mathrm{z})]^{\mathrm{a_j}}, \mathrm{z} \in \mathrm{K}$,где a_j вещественное число, $\sum a_j = 1$ и функция $\mathrm{f_j}$ принадлежит к фиксированному семейству$\mathfrak{R}_\mathrm{j}$ которое есть линейно-инвариантное в смысле Поммеренке. Кроме того, определены радиусы однолистности и почти-выпуклости некоторых семейств $\mathcal{F}$. В следствии получен результат, что для однолистной функции f интеграл$\mathrm{F}(\mathrm{z}) = \int_0^{\mathrm{z}} (\mathrm{f}'(\mathrm{t}))^{\mathrm{a}}\, \mathrm{dt}, \mathrm{a} \in [0,1]$однолистный по крайней мере в круге $|z| < 0{,}81$.

6. Был проведен анализ теорем о том, что множество всех возможных значений $log f'(z) D(r, k, m)$ является замкнутой и выпуклой областью, граница $D(r, k, m)$ состоит из дуги Г, заданной приведенным уравнением и ее отражением Г* на действительной оси, модуль производной функции $f(z)$ лежит в пределах, являющихся зависимостью от r, где $|z| = r$, рассматриваются частные случаи, для которых также задается граница с помощью уравнения и определяется диапазон, в котором лежат значения модуль производной функции $f(z)$.