

МИНОБРНАУКИ РОССИИ

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«САРАТОВСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ИМЕНИ Н.Г.ЧЕРНЫШЕВСКОГО»

Кафедра радиофизики и нелинейной динамики

«Исследование SIRS модели распространения эпидемий»

АВТОРЕФЕРАТ БАКАЛАВРСКОЙ РАБОТЫ

студента 4 курса 4032 группы
направления 03.03.03 Радиофизика
Института физики
Мартынова Олега Юрьевича

Научный руководитель

профессор, д.ф.-м.н., профессор _____ А.В. Шабунин

Зав. кафедрой радиофизики

и нелинейной динамики,

д.ф.-м.н., доцент _____ Г.И. Стрелкова

Саратов 2024 г.

ВВЕДЕНИЕ

Чтобы предсказать охват и длительность эпидемии, используется моделирование передачи вируса в обществе. Модели могут быть в разной степени детальными. Некоторые из них описывают только заражение и выздоровление: если кто-то переносит инфекцию, то определённая доля людей без иммунитета заразится, доля заразившихся — выздоровеет. Другие модели учитывают дополнительные факторы, такие как иммунитет, приобретённый через вакцинацию. Разумеется, эту последнюю корректировку можно включить в модель, только если вакцина от вируса существует. Поэтому детальность модели напрямую зависит от инфекции, распространение которой она призвана отражать.

Для анализа и моделирования развития эпидемической ситуации в широко используется в практическом использовании модель SIR, основанная на разделении населения на три группы: S – восприимчивые (Susceptible), I – инфицированные (Infectious) и R – имеющие иммунитет (Removed): $N = S + I + R$, где N – общая численность населения.

Целью настоящей работы является построение и исследование компьютерной модели распространения инфекционных заболеваний в виде системы обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ).

Исходя из поставленной цели были введены следующие задачи :

1. Рассмотреть модель распространения эпидемий SIRS и построить для нее систему ОДУ;

2. Провести теоретический анализ модели: определить состояния равновесия, их тип и устойчивость в зависимости от параметров;

3. Используя среду программирования matlab/octave, получить численные решения модели для характерных значений параметров;

4. Провести численные исследования модели в зависимости от параметров и начальных условий:

1. Провести численные исследования распространения заболевания в пространстве при для разных значений определить зависимость максимального уровня заболевания (i_{max}) от параметров P_2 , P_3 и C .

2. Определить зависимость максимального уровня заболевания (i_{max}) от начальных условий: i_0 и r_0 .

5. Разработать математическую модель для пространственно распределенной SIRS в виде цепочки осцилляторов с диффузионными связями;

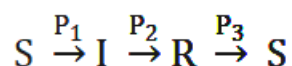
6. Провести численные исследования распространения заболевания в пространстве для разных значений коэффициента связи.

Основное содержание работы. В первой главе будет изложена история появления исследуемой модели. Так же проведём качественный анализ модели.

Во второй главе проведён количественный анализ динамической системы, состоящей из одного осциллятора и аналогичные вычисления для цепочки связанных осцилляторов.

ГЛАВА 1. SIRS МОДЕЛЬ

Для моделирования, анализа и прогнозирования различных эпидемий широко используется модель SIRS. Модель основана на взаимодействии особей в различных состояниях, S - восприимчивые к инфекции особи, I - заражённые особи, R - иммунные особи, через некоторое время утрачивающие иммунитет. Переход особи из одного состояния в другую осуществляется с некоторыми вероятностями. Так здоровая особь S станет заражённой I с некоторой вероятностью P_1 , заражённая особь выздоравливает и становится иммунной с вероятностью P_2 , иммунная особь теряет иммунитет и вновь становится восприимчивой к инфекции с вероятностью P_3 . Ниже приведена схема переходов особей в различные состояния



Общая численность населения N выражается формулой

$$N = S + I + R,$$

где S - здоровые особи, I - инфицированные, R - иммунные особи.

Рассмотрим схему модели подробнее . Первая реакция описывает инфицирование, вторая – выздоровление, третья – потерю иммунитета. Как видно из схемы , все процессы однонаправленны и порядок смены состояний жёстко детерминирован, в то время как сами превращения, а следовательно, и моменты времени, в которые они происходят, являются случайными. Динамика данной модели определяется как параметрами P_i , так и численностью популяции, которая является для системы интегралом движения. График SIRS модели имеет следующий вид . Приведём график модели для одного уравнения.

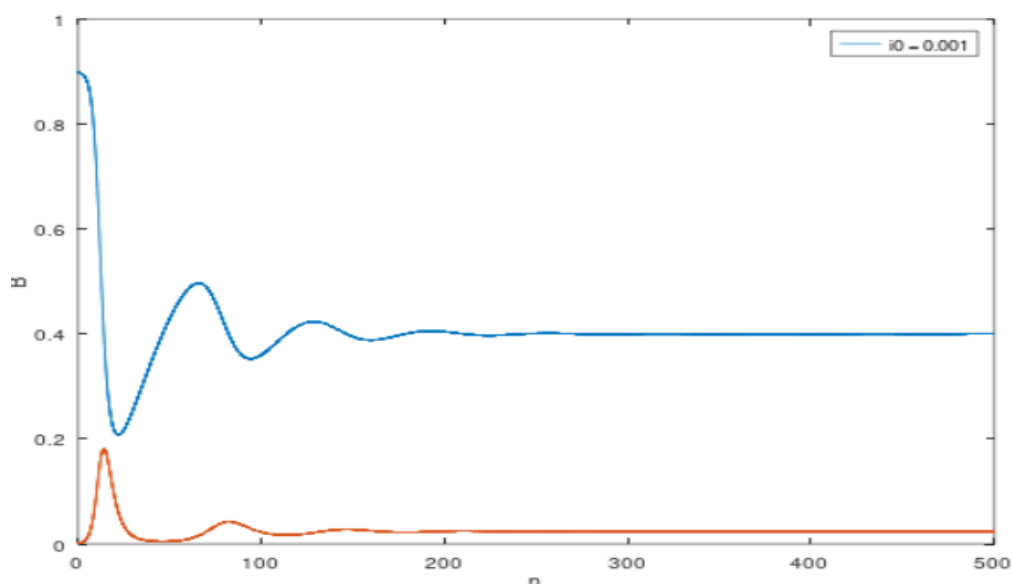


Рисунок 1. График SIRS модели распространения эпидемий. По графику видно, что в системе присутствует сильное затухание. А так же за основной волной заражения следует вторичная

1.3 КАЧЕСТВЕННЫЙ АНАЛИЗ SIRS МОДЕЛИ

Обозначим производную S как A, производную I как B и производную R как C. Получим следующую систему

$$\begin{cases} \dot{S} = -P_1 \cdot S \cdot I + P_3 \cdot R \\ \dot{I} = P_1 \cdot S \cdot I - P_2 \cdot I \\ \dot{R} = -P_3 \cdot R + P_2 \cdot I \end{cases} \quad (1)$$

Так как количество особей в системе не меняется $A + B + C = 0$. Выразим R через переменные I и S и концентрацию особей C. $R = C - I - S$. Получим следующую систему

$$\begin{cases} -P_1 \cdot S \cdot I + P_3 \cdot (C - S - I) = 0 \\ P_1 \cdot S \cdot I - P_2 \cdot I = 0 \end{cases} \quad (2)$$

Данная система имеет следующие положения равновесия

$$E_0(C; 0) \text{ и } E_1\left(\frac{P_2}{P_3}; \frac{P_3 \left(C + \frac{P_2}{P_1}\right)}{P_2 + P_3}\right)$$

Проверим, являются ли они устойчивыми с помощью якобиана

$$\begin{bmatrix} -P_1 \cdot I + P_3 & -P_1 \cdot S + P_3 \\ P_1 \cdot I & P_1 \cdot S - P_2 \end{bmatrix} \quad (3)$$

Получим следующие значения собственных чисел матрицы для E_0 $\lambda_1 = -P_3$, $\lambda_2 = P_1 C - P_2$. В точке E_0 система является устойчивым фокусом.

В точке E_1 $\lambda_{1,2} = \pm \sqrt{\frac{P_2}{C}}$ собственные числа матрицы больше нуля.

КОЛИЧЕСТВЕННЫЙ АНАЛИЗ

С использованием функции численного моделирования ОДУ : *ode45* было

найдено численное решение $S(t)$ и $I(t)$ уравнений при значениях параметров из диапазонов : $P_1 = 1$, $0 < P_2 \leq 0.4$, $0 < P_3 \leq 0.02$, $0 < C < 1$ и с начальных условий $s(0) = C - 0.001$, $i(0) = 0.001$. На основе вычислений были построены графики $i(t)$ и фазовые портреты для значений параметров, удовлетворяющим условиям : (a) $C > P_2$ и (b) $C < P_2$. Во всех графиках на оси y расположена $I(t)$, а на оси x $S(t)$.

В точке E_1 $\lambda_{1,2} = \pm \sqrt{\frac{P_2}{C}}$ собственные числа матрицы больше нуля. В 1 точке (9.0:32.5) получим $\lambda_1 = -1.875 - 1.0170422803404i$, $\lambda_2 = -1.875 + 1.0170422803404i$, во второй точке (100.0:0.0) $\lambda_1 = -0.5$, $\lambda_2 = 9.1$.

Фазовые портреты для случая (а) :

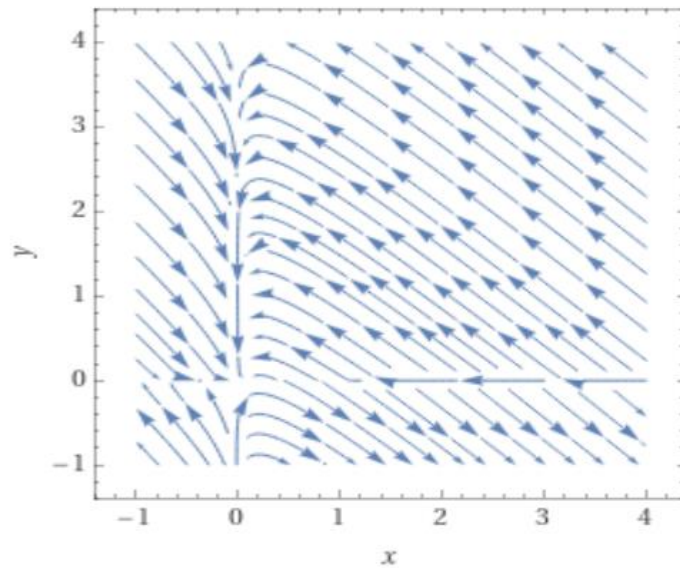


Рис.2 Фазовый портрет системы при значениях параметров $C = 0.5, P_3 = 0.01, P_2 = 0.3$.

Случай (б) :

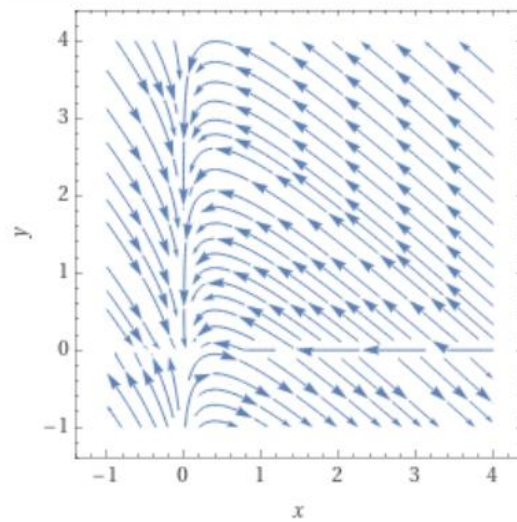


Рис.5 Фазовый портрет системы при значениях параметров $C = 0.1, P_3 = 0.01, P_2 = 0.3$.

ВЫВОД

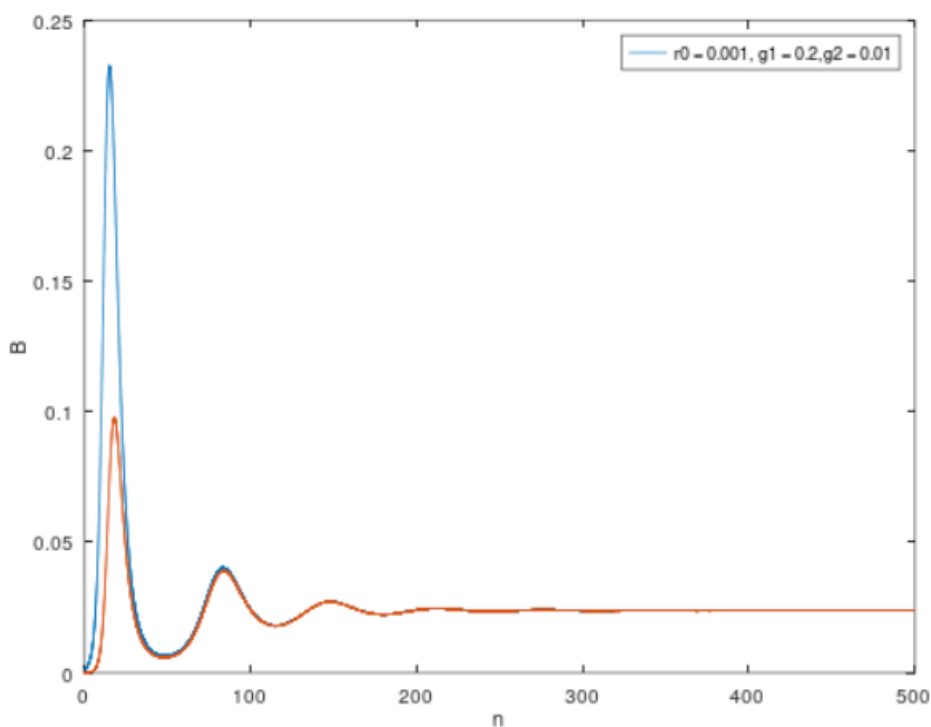
Анализ показал, что система имеет только одно устойчивое положение в точке с координатами (9.0 : 32.5). Фазовым портретом устойчивого положения является устойчивый фокус. В случае неустойчивого положения в 2 точке (100.0:0.0) появляется неустойчивый фокус. На общем фазовом портрете видно, что система имеет только одно устойчивое состояние. Если состояние системы

попадает в бассейн притяжения точки равновесия, то инфицирование особей затухает. В противном случае инфицирование повышается и начинается эпидемия.

График на рисунке 5 построен при следующих значениях параметров : $s_0 = 0.01$, $i_0 = 0.01$, $P_1 = 1$, $P_2 = 0.4$, $P_3 = 0.01$, $C = 0.9$. $L_2 \max = 0.123$, $L_1 \max = -0.073$.

ГЛАВА 2. ПОВЕДЕНИЕ СИСТЕМЫ ПРИ РАЗЛИЧНЫХ ПАРАМЕТРАХ И НА МЕСТНОСТИ

В этой главе будет рассмотрено поведение исследуемой системы при различных параметрах i_0 , C и P_3 случае одного и двух связанных осцилляторов. Будут приведены зависимости максимального уровня заражения при изменении параметров i_0 , c , p_2 , p_3 , r_0 , g_1 и g_2 . При построении всех графиков параметр $P_1 = 1$.



ОДИНОЧНЫЙ ОСЦИЛЛЯТОР ЗАВИСИМОСТИ ВЕЛИЧИН m И m/c ОТ РАЗЛИЧНЫХ ПАРАМЕТРОВ

Приведём зависимость максимального уровня заражения от параметров p_3 , p_3 , c , i_0 и r_0 . Все зависимости построенные при минимальном значении выбранного параметра 0.001.

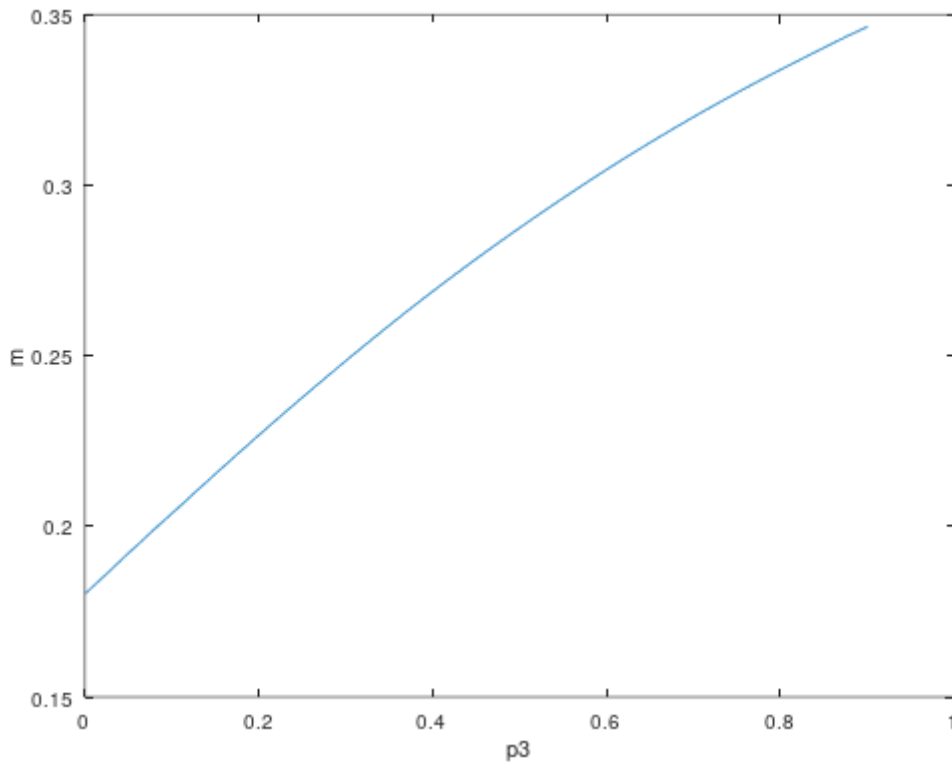


Рис. 37. На графике представлена зависимость максимального уровня заражения от параметра P_3 .

Зависимость, представленная на графике 6 имеет близкий к линейному рост, который замедляется начиная со значения $p_3 = 0.6$. Начальное значение $p_3 = 0.001$, шаг увеличения значения - 0.001.

Второй график сделан при параметре c , изменяющемся в пределах $[0.01; 0.9]$ с шагом 0.01.

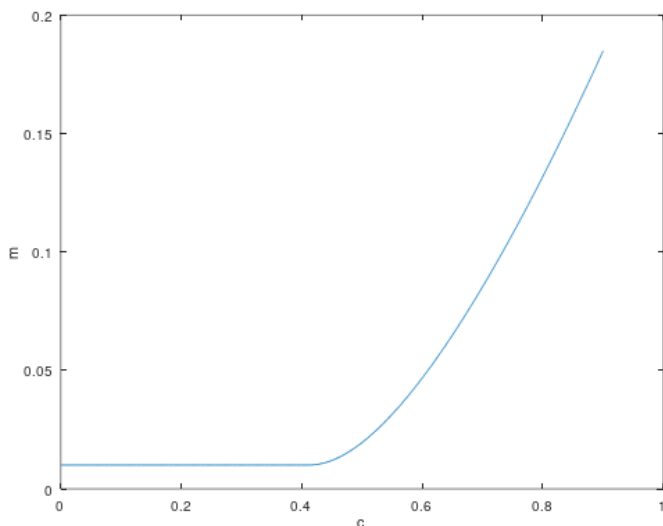


Рис. 38. На графике представлена зависимость максимального уровня заражения от параметра C .

Представленная выше зависимость не проявляет роста до значения $c = 0.45$. После преодоления этого значения максимальный уровень заражения в системе увеличивается нелинейно.

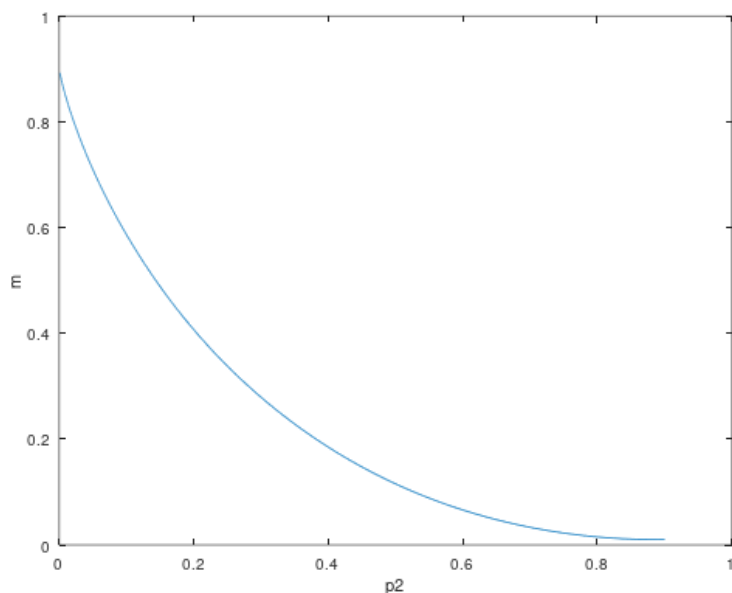


Рис. 39. На графике представлена зависимость максимального уровня заражения от параметра p_2 .

Представленная на функции имеет как минимум вторую производную и стремится к линейному убыванию после значения $p_2 = 0.3$. Так функция убывает нелинейно с увеличением параметра p_2 .

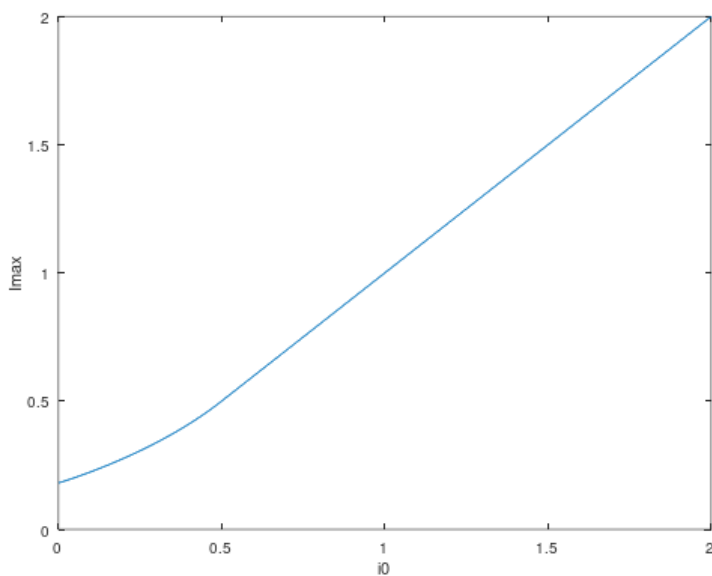


Рис. 40. На графике представлена зависимость максимального уровня заражения от параметра i_0 .

Данный график показывает, что до достижения значения параметра $i_0 = 0.5$ значения функции возрастают близким к линейному образом. После преодоления этого значения значения функции возрастают полностью линейно. Минимальное значение $i_0 = 0.001$.

СВЯЗАННЫЕ ОСЦИЛЛЯТОРЫ

Графики зависимостей для связанных осцилляторов не имеют выраженных отличий от тех же зависимостей, полученных в случае одиночного осциллятора.

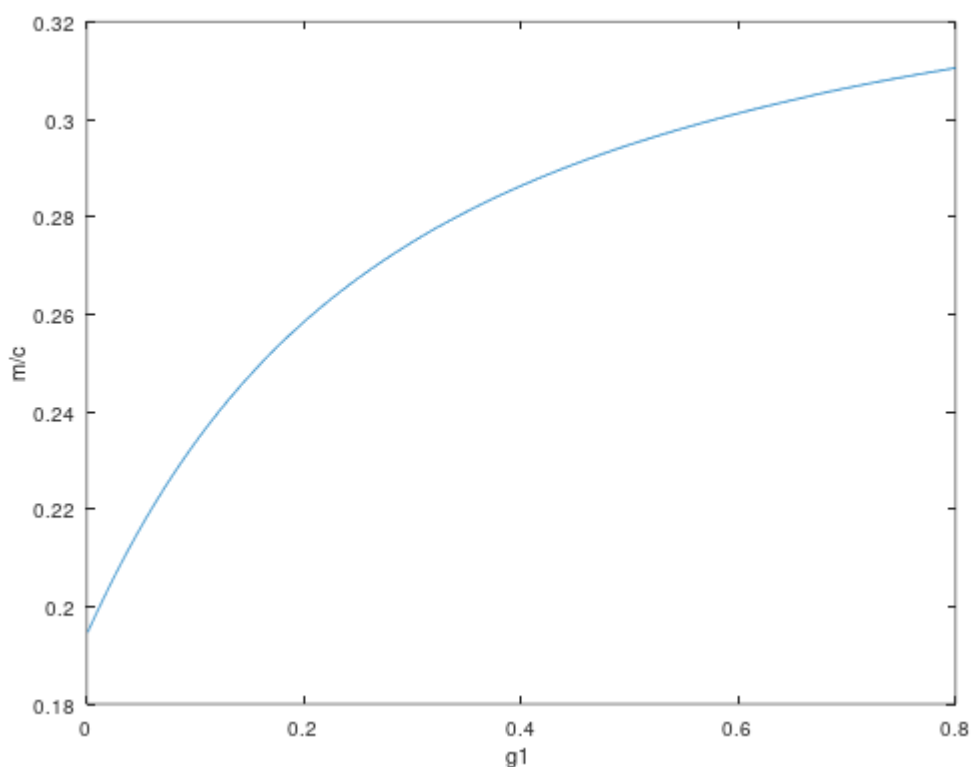


Рис. 82. Зависимость отношения максимального уровня заражения к концентрации восприимчивых особей от параметра g_1 .

На графике представлена зависимость отношения максимального уровня заражения к концентрации восприимчивых особей от параметра g_1 перемещений между осцилляторами уровень заражения начинает замедлять рост при приближении значения g к 0.5. Это замедление роста обусловлено резким сокращением концентрации восприимчивых особей и медленным пополнением их количества за счёт убыли концентрации иммунных особей.

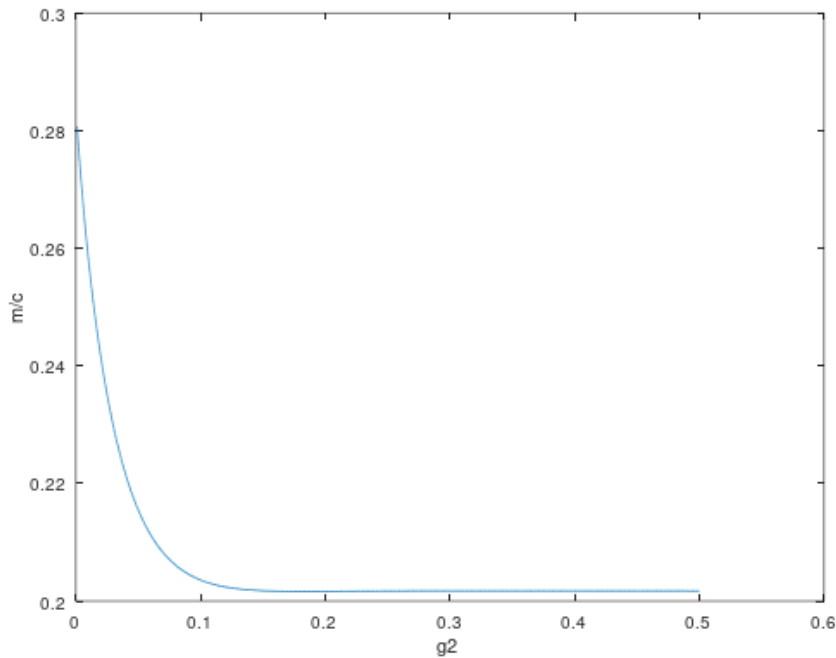


Рис. 83. На графике представлена зависимость отношения максимального уровня заражения к концентрации восприимчивых особей от параметра g^2 .

На графике рисунка 83 видно, что при увеличении количества перемещений между осцилляторами здоровых особей количество заражённых снижается подобно значениям гиперболической функции. Следовательно, будет иметь увеличение коэффициента перемещения здоровых особей до 0.15. Последующее увеличение не даст видимых результатов.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Анализ показал, что система имеет только одно устойчивое положение в точке с координатами (9.0 : 32.5). Фазовым портретом устойчивого положения является устойчивый фокус. В случае неустойчивого положения в 2 точке (100.0:0.0) появляется неустойчивый фокус.

При увеличении количества перемещений между осцилляторами здоровых особей количество заражённых снижается подобно значениям гиперболической функции. Следовательно, будет иметь увеличение коэффициента перемещения здоровых особей до 0.15. Последующее увеличение не даст видимых результатов.

В ходе исследования было выяснено что SIRS - модель можно использовать для расчёта максимального уровня заражения, амплитуд волн вторичного инфицирования. Обращаясь к выводам, полученным из исследования системы из двух связанных осцилляторов можно сделать следующие выводы. Имеет смысл ограничить миграцию заражённых особей

между областями и напротив увеличить отток восприимчивых и иммунных к инфекции особей в менее инфицированные области. Так же имеет смысл снизить концентрацию заражённых особей в системе. Ввиду простоты данной модели её можно использовать для разработки более сложных моделей инфекционных заболеваний.