

МИНОБРНАУКИ РОССИИ  
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение  
высшего образования  
«САРАТОВСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ  
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ Н.Г. ЧЕРНЫШЕВСКОГО»

Кафедра радиофизики и нелинейной  
динамики

**МУЛЬТИСТАБИЛЬНОСТЬ В ГЕНЕРАТОРЕ РЭЛЕЯ С ДВУМЯ  
ДОПОЛНИТЕЛЬНЫМИ КОНТУРАМИ**

**АВТОРЕФЕРАТ БАКАЛАВРСКОЙ РАБОТЫ**

студента 4 курса 4032 группы  
направления 27.03.02 «Радиофизика»  
института физики

Тимченко Олега Павловича

Научный руководитель,  
профессор, д.ф.-м.н., профессор

\_\_\_\_\_  
должность, уч. степень, уч. звание

\_\_\_\_\_  
подпись, дата

В.В. Астахов

\_\_\_\_\_  
инициалы, фамилия

Зав. кафедрой,  
д.ф.-м.н., доцент

\_\_\_\_\_  
должность, уч. степень, уч. звание

\_\_\_\_\_  
подпись, дата

Г.И. Стрелкова

\_\_\_\_\_  
инициалы, фамилия

Саратов 2024

## **Введение.**

Термины «автоколебания» и «автоколебательные системы» впервые были введены Андроновым А.А. в конце двадцатых годов прошлого столетия. Под автоколебаниями понимают незатухающие, самоподдерживающиеся колебания в нелинейных, открытых, диссипативных системах различной природы.

В основе радиофизических автоколебательных систем лежит генератор Ван дер Поля и соответствующее уравнение. Осциллятор Ван дер Поля является базовой моделью теории колебаний и нелинейной динамики, которая универсальным образом описывает мягкое возбуждение автоколебаний, обусловленное суперкритической бифуркацией Андронова-Хопфа в системах различной природы. Уравнение Ван дер Поля связано с уравнением Рэля. При определенной замене переменных и параметров одно переходит в другое. Генератор Ван дер Поля является простейшей автоколебательной системой с одной степенью свободы. На фазовой плоскости имеется состояние равновесия и предельный цикл. Устойчивый предельный цикл рождается из неустойчивого фокуса в результате суперкритической бифуркации Андронова-Хопфа.

Мультистабильность – универсальное нелинейное явление, наблюдаемое в системах различной природы. Под мультистабильностью понимают сосуществование нескольких аттракторов в фазовом пространстве системы, реализация каждого из которых зависит от выбора начальных условий или истории движения по параметрам. Мультистабильность имеет большое фундаментальное и прикладное значение, определяет свойства динамических систем, в одних случаях повышая, а в других понижая их функциональные возможности.

В выпускной квалификационной работе в разделе 1 изучается генератор на активном элементе с отрицательной дифференциальной проводимостью, для которого выведено уравнение Рэля. Во втором разделе изучается появление мультистабильности в генераторе Рэля с дополнительным контуром, а в третьем – в генераторе Рэля с двумя дополнительными контурами. Численные

исследования режимов и бифуркационный анализ проводился с помощью пакета программ ХРРАУТО.

Целью выпускной квалификационной работы является изучение автоколебательных систем с различным числом степеней свободы. Освоение методов построения математических моделей радиофизических генераторов, использование аналитических и численных методов исследования типичных моделей в виде обыкновенных дифференциальных уравнений. Исследование явления мультистабильности в генераторах с двумя и тремя степенями свободы. Выявление бифуркационных механизмов формирования мультистабильности в генераторе Рэлея с дополнительными контурами.

Для достижения данной цели были поставлены следующие задачи:

- 1 Рассмотреть генератор на активном нелинейном элементе с отрицательной дифференциальной проводимостью.
- 2 Провести анализ устойчивости состояний равновесия осциллятора Рэлея.
- 3 Вывести укороченные уравнения Рэлея для амплитуд и фаз.
- 4 Вычислить Ляпуновский характеристический показатель для анализа устойчивости предельного цикла.
- 5 Рассмотреть схему и уравнения генератора с двумя степенями свободы.
- 6 Изучить динамику осциллятора Рэлея, взаимодействующего с линейным диссипативным осциллятором.
- 7 Провести бифуркационный анализ состояний равновесия и предельных циклов в осцилляторе Рэлея, связанным с линейным осциллятором.
- 8 Вывести укороченные уравнения амплитуд и фаз генератора Рэлея с дополнительным колебательным контуром.
- 9 Провести бифуркационный анализ укороченной системы для амплитуд и фаз в осцилляторе Рэлея, связанным с линейным осциллятором.
- 10 Рассмотреть схему и уравнения генератора с двумя дополнительными колебательными контурами.

11 Изучить динамику осциллятора Рэля, взаимодействующего с двумя линейными диссипативными осцилляторами.

### Основное содержание работы

**Генератор на активном нелинейном элементе с отрицательной дифференциальной проводимостью.** Схема генератора представлена на рисунке 1.

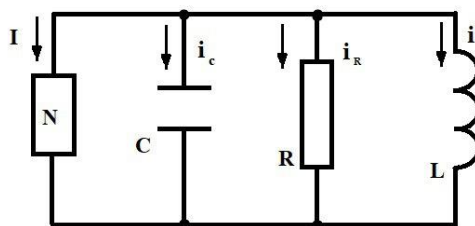


Рисунок 1 – Схема генератора

Он состоит из нелинейного элемента N и колебательного контура, из параллельно соединённых емкости C, сопротивления R и индуктивности L.

Получаем уравнение Рэля (формула 1)

$$\ddot{x} - (\varepsilon - \dot{x}^2)\dot{x} + \omega_0^2 x = 0 \quad (1)$$

где  $\dot{x} = \frac{dx}{dt}$ .

**Анализ устойчивости состояний равновесия осциллятора Рэля.**

Исследована устойчивость состояния равновесия в зависимости от параметра возбуждения  $\varepsilon$ , получено квадратное уравнение (формула 2).

$$\mu^2 - \varepsilon\mu + \omega_0^2 = 0 \quad (2)$$

Корни которого имеют вид (формула 3).

$$\mu_{1,2} = \frac{\varepsilon}{2} \pm \sqrt{\frac{\varepsilon^2}{4} - \omega_0^2} \quad (3)$$

В осцилляторе Рэля имеется единственное состояние равновесия в начале координат, которое является устойчивым при  $\varepsilon < 0$  и неустойчивым при  $\varepsilon > 0$ . При переходе через значение  $\varepsilon = 0$  устойчивый фокус становится неустойчивым. Пара собственных значений при  $\varepsilon = 0$  являются мнимыми.

Здесь происходит бифуркация Андронова-Хопфа, рождается предельный цикл.

**Укороченные уравнения Рэля для амплитуд и фаз.** Получили систему уравнений для амплитуды и фазы (формула 4).

$$\begin{cases} \dot{\rho} = \frac{\varepsilon}{2}\rho - \frac{3}{8}\omega_0^2\rho^3 \\ \dot{\varphi} = 0 \end{cases} \quad (4)$$

Из формулы 4 следует, что

$$\varphi(t) = \varphi_0 = const$$

$\varphi_0$  определяется из начальных условий.

Таким образом, для уравнения Рэля получили в случае  $\varepsilon$  получаем приближенное периодическое решение (формула 5).

$$x(t) = \frac{2}{\omega_0\sqrt{3}}\sqrt{\varepsilon}\cos(\omega_0 t + \varphi_0) \quad (5)$$

Оно появляется при положительных значениях параметра возбуждения, амплитуда его растет пропорционально  $\sqrt{\varepsilon}$ .

Устойчивость состояния равновесия, бифуркацию рождения предельного цикла и устойчивость предельного цикла в полной системе можно изучать, анализируя укороченные уравнения для амплитуды и фаз (формула 4).

Бифуркационная диаграмма представлена на рисунке 2. Для полной системы это соответствует.

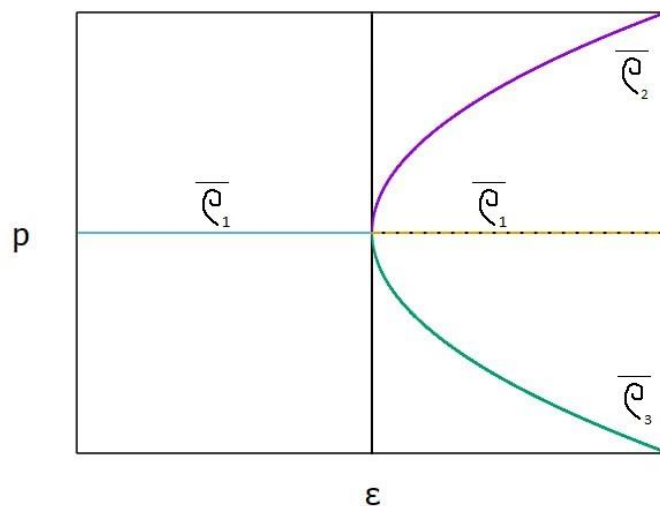


Рисунок 2 – Бифуркационная диаграмма

Суперкритическая бифуркация Андронова-Хопфа. При переходе через бифуркационные значения  $\varepsilon = 0$  устойчивый фокус становится неустойчивым,

в его окрестности рождается устойчивый предельный цикл, радиус которого увеличивается пропорционально  $\sqrt{\varepsilon}$ .

**Ляпуновский характеристический показатель.** Для полной системы анализ устойчивости предельного цикла можно провести, вычисляя Ляпуновский характеристический показатель. Для динамических систем на фазовой плоскости он определяется следующим образом (формула б).

$$h = \frac{1}{T} \int_0^T \left\{ \frac{dP(\bar{x}, \bar{y})}{dx} + \frac{dQ(\bar{x}, \bar{y})}{dy} \right\} dt \quad (6)$$

где  $P(x, y)$  и  $Q(x, y)$  – первые части системы двух обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка.

$\bar{x}(t)$ ,  $\bar{y}(t)$  – периодическое решение, которое исследуется на устойчивость.

Ляпуновский характеристический показатель предельного цикла в осцилляторе Рэля  $h = -\varepsilon$  является отрицательным при  $\varepsilon > 0$ , в генераторе рождается устойчивый предельный цикл, когда параметр возбуждения  $\varepsilon$  переходит от отрицательных значений к положительным.

**Схема и уравнения генератора с двумя степенями свободы.** Схема генератора с двумя колебательными контурами показана на рисунке 3.

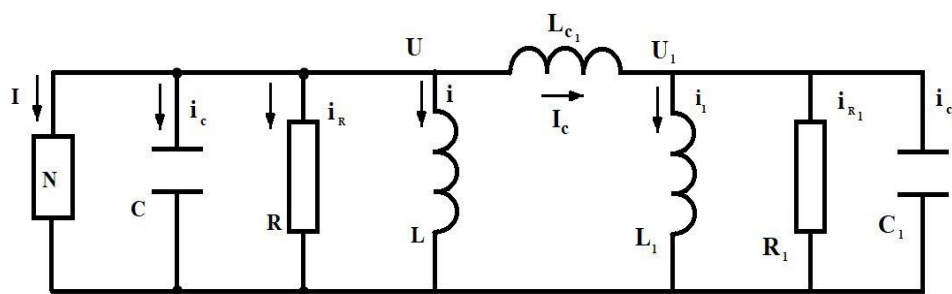


Рисунок 3 – Схема генератора на активном нелинейном элементе с двумя колебательными контурами

Уравнение генератора представим в виде системы уравнений (формула 7)

$$\begin{aligned} \ddot{x} - (\varepsilon - \dot{x}^2)\dot{x} + \omega_0^2 x &= \gamma(x_1 - x) \\ \ddot{x}_1 &= a_1 \dot{x}_1 + \omega_1^2 x_1 = \gamma_1(x - x_1) \end{aligned} \quad (7)$$

где  $x(t)$ ,  $x_1(t)$  – динамические переменные,

$\varepsilon$  – параметр возбуждения осциллятора Рэля,  
 $a_1$  – параметр диссипации линейного осциллятора,  
 $\omega_0$  и  $\omega_1$  – собственные частоты,  
 $\gamma$  и  $\gamma_1$  – коэффициенты связи, характеризующие воздействие дополнительного контура на генератор и генератора на дополнительный осциллятор, соответственно.

**Динамика осциллятора Рэля, взаимодействующего с линейным диссипативным осциллятором.** В генераторе с дополнительным контуром в зависимости от расстройки по собственным частотам при плавном увеличении параметра  $\varepsilon$  возбуждается либо синфазный, либо противофазный режим автоколебаний. Когда собственная частота основного контура  $\omega_0$  немного меньше собственной частоты дополнительного контура  $\omega_1$ , в системе мягко возбуждается синфазный режим автоколебаний. Если  $\omega_0$  немного больше  $\omega_1$ , то мягко возбуждается противофазный режим автоколебаний. В обоих случаях, выше по параметру возбуждения обнаруживается еще один устойчивый предельный цикл (или  $C_2$  при  $\omega_0 < \omega_1$  или  $C_1$  при  $\omega_0 > \omega_1$ ). Система становится бистабильной. Чтобы исследовать бифуркации рождения предельных циклов, механизм формирования бистабильности, проведем с помощью пакета ХРРАУТО однопараметрический бифуркационный анализ состояний равновесия и предельных циклов.

**Бифуркационный анализ состояний равновесия и предельных циклов в осцилляторе Рэля, связанным с линейным осциллятором.** В автоколебательной системе с двумя степенями свободы, состоящей из осциллятора Рэля, взаимодействующего с линейным диссипативным осциллятором, мультистабильность формируется в результате двух последовательных суперкритических бифуркаций Андронова-Хопфа и одной субкритической бифуркации Неймарка-Сакера.

Исследование седловых торов свели к исследованию состояний равновесия и седловых циклов в укороченной системе для амплитуд и фаз осциллятора Рэля, связанного с линейным осциллятором (рисунок 4).

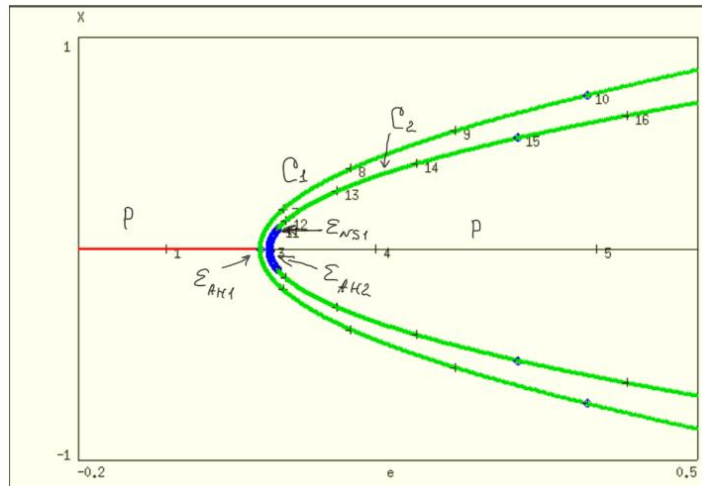


Рисунок 4 – Бифуркационная диаграмма состояния равновесия P и седловых циклов  $C_1, C_2$ .  $\varepsilon_{АН1} = 0,0062$  – значение первой суперкритической бифуркации Андронова-Хопфа,  $\varepsilon_{АН2} = 0,0162$  – значение второй суперкритической бифуркации Андронова-Хопфа,  $\varepsilon_{НС1} = 0,0263$  – значение суперкритической бифуркации Неймарка-Сакера

**Вывод укороченных уравнений амплитуд и фаз генератора Рэлея с дополнительным колебательным контуром.** Получена следующая система уравнений для амплитуд и фаз.

$$\begin{cases} \dot{\rho} = \frac{\varepsilon}{2}\rho - \frac{3\omega^2}{8}\rho^3 - \frac{\gamma}{2\omega}\rho_1 \sin\psi \\ \dot{\rho}_1 = -\frac{a_1}{2}\rho_1 + \frac{\gamma}{2\omega}\rho \sin\psi \\ \dot{\psi} = \frac{\omega_0^2 - \omega_1^2}{2\omega} + \frac{\gamma}{2\omega} \left\{ \frac{\rho}{\rho_1} - \frac{\rho_1}{\rho} \right\} \cos\psi \end{cases}$$

Определим частоту  $\omega$ . Будем полагать, что собственные частоты  $\omega_0$  и  $\omega_1$  близки, т.е.  $\omega_0 \approx \omega_1$ . Тогда:

$$\frac{\omega_0^2 - \omega_1^2}{2\omega} = \frac{(\omega_0 - \omega_1)(\omega_0 + \omega_1)}{2\omega}, \quad \frac{\omega_0 + \omega_1}{2\omega} \approx 1, \quad \omega = \frac{\omega_0 + \omega_1}{2}.$$

Система уравнений принимает вид (формула 8).

$$\begin{cases} \dot{\rho} = \frac{\varepsilon}{2}\rho - \frac{3(\omega_0 + \omega_1)^2}{32}\rho^3 - \frac{\gamma}{\omega_0 + \omega_1}\rho_1 \sin\psi \\ \dot{\rho}_1 = -\frac{a_1}{2}\rho_1 + \frac{\gamma}{\omega_0 + \omega_1}\rho \sin\psi \\ \dot{\psi} = (\omega_0 - \omega_1) + \frac{\gamma}{\omega_0 + \omega_1} \left\{ \frac{\rho}{\rho_1} - \frac{\rho_1}{\rho} \right\} \cos\psi \end{cases} \quad (8)$$



## Бифуркационный анализ укороченной системы для амплитуд и фаз.

Проведем бифуркационный анализ укороченной системы (8). Отметим, что состоянию равновесия в полной системе (отсутствие автоколебаний) соответствует неподвижная точка с нулевыми координатами в укороченной системе, предельному циклу соответствует неподвижная точка с ненулевыми координатами, квазипериодическим автоколебаниям (двумерному тору) соответствует предельный цикл.

На рисунках 5, 6 показаны бифуркационные диаграммы состояний равновесия и предельных циклов в зависимости от параметра возбуждения  $\varepsilon$  в интервале значений от  $-0,2$  до  $0,5$  при фиксированных значениях других параметров  $\omega_0 = 0,95$ ,  $\omega_1 = 1,0$ ,  $\gamma = \gamma_1 = 0,2$ ,  $a_1 = 0,01$ .

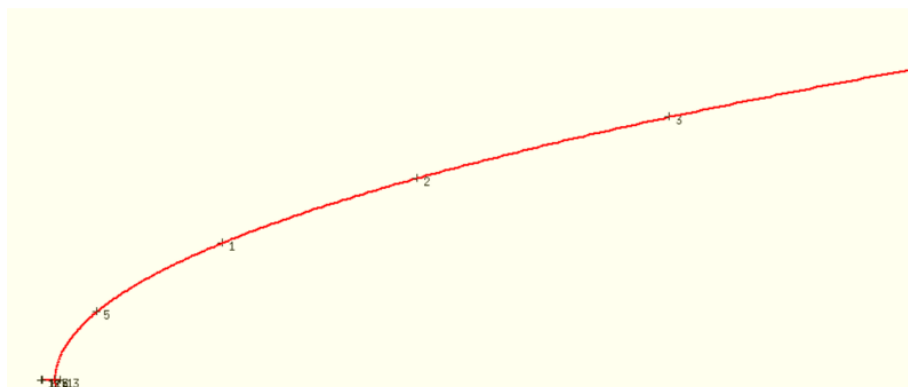


Рисунок 5 – Бифуркационная диаграмма неподвижной точки P1 укороченной системы уравнений (8).

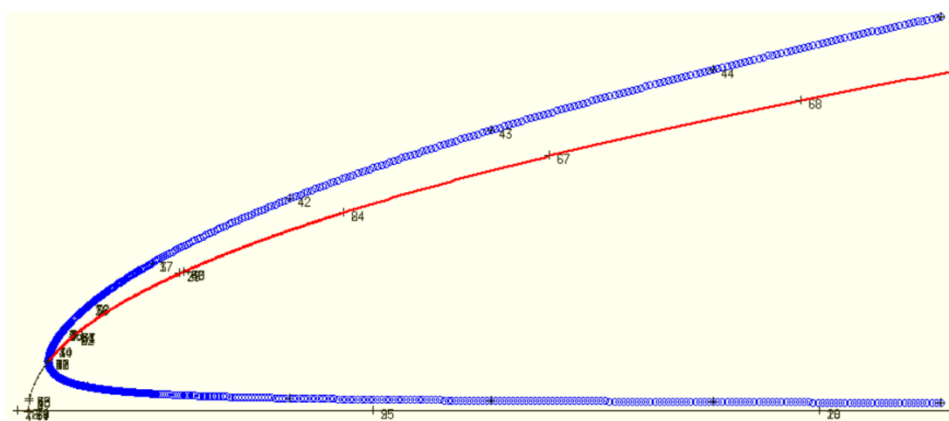


Рисунок 6 – Бифуркационная диаграмма неподвижной точки P2 и седлового цикла

**Схема и уравнения генератора с двумя дополнительными колебательными контурами.** Схема генератора с двумя дополнительными колебательными контурами показана на рисунке 7.

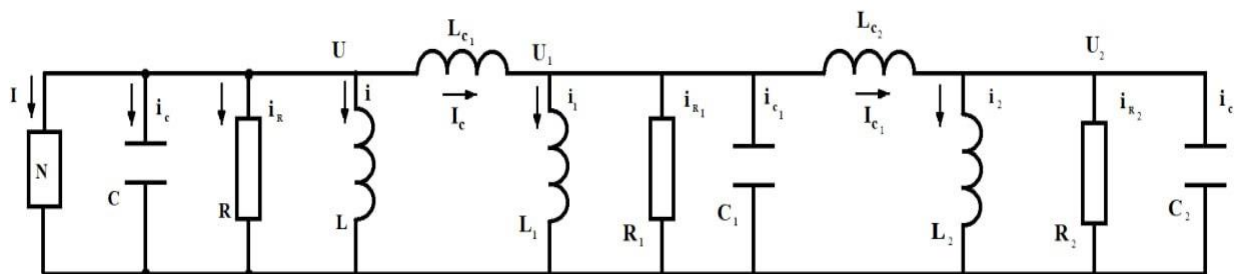


Рисунок 7 – Схема генератора с двумя дополнительными колебательными контурами

В результате получаем систему уравнений (формула 9).

$$\begin{cases} \ddot{x} - (\varepsilon - \dot{x}^2)\dot{x} + p^2x + p^2\gamma(x - x_1) = 0 \\ \ddot{x}_1 + a_1\dot{x}_1 + p_1^2x_1 + p_1^2\gamma_1(x_1 - x) + p_1^2\gamma_2(x_1 - x_2) = 0 \\ \ddot{x}_2 + a_2\dot{x}_2 + p_2^2x_2 + p_2^2\gamma_2(x_2 - x_1) = 0 \end{cases} \quad (9)$$

**Динамика осциллятора Рэля, взаимодействующего с двумя линейными диссипативными осцилляторами.** При  $p = 1,05$  происходит переход из синфазного режима в противофазный. Это означает что при данном значении параметра  $p$  происходит важный переход в динамике системы, что может указывать на наличие мультистабильности. Для подтверждения мультистабильности необходимо проверить наличие двух и более устойчивых режимов при фиксированном значении  $p$ . Далее проведем более детальный анализ для значений  $p$  вблизи  $p = 1,05$ .

При  $p = 1,06$  наблюдаем несколько устойчивых режимов при изменении начальных условий и фиксированном значении  $p$  и параметров  $\varepsilon = 0,15$ ,  $\gamma_1 = \gamma_2 = 0,2$ ,  $a_1 = a_2 = 0,01$ ,  $p_1 = 1$  (рисунок 8, 9 и 10).

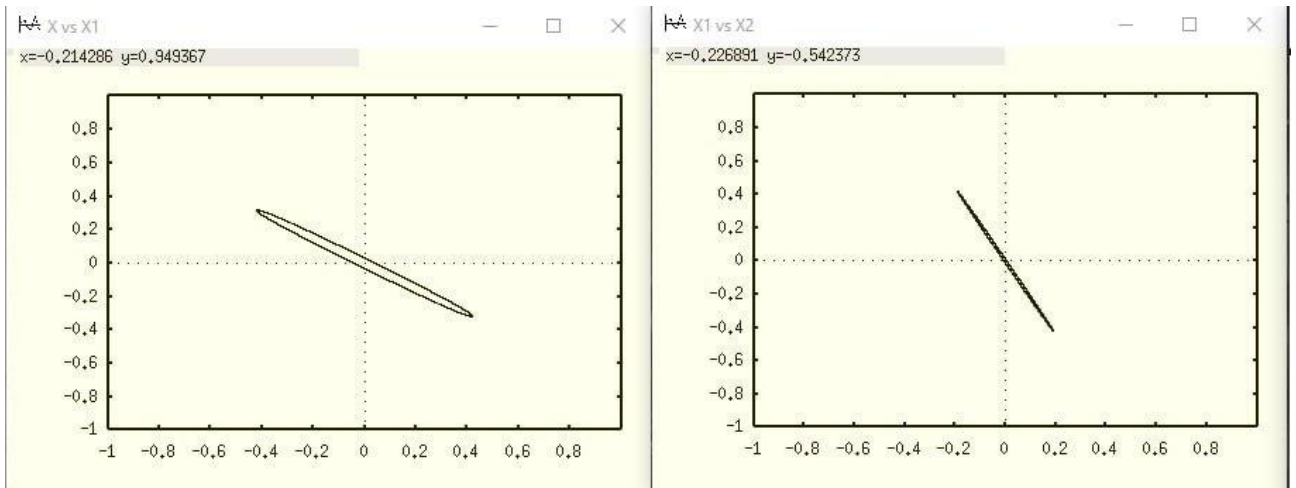


Рисунок 8 – Фазовые портреты  $x(x_1)$ ,  $x_1(x_2)$  соответствующие противофазному режиму автоколебаний  $C_2$  при  $p = 1,06$ ,  $\varepsilon = 0,15$ ,  $\gamma_1 = \gamma_2 = 0,2$ ,  $a_1 = a_2 = 0,01$ ,  $p_1 = 1$

При изменении начальных условий наблюдаем следующее.

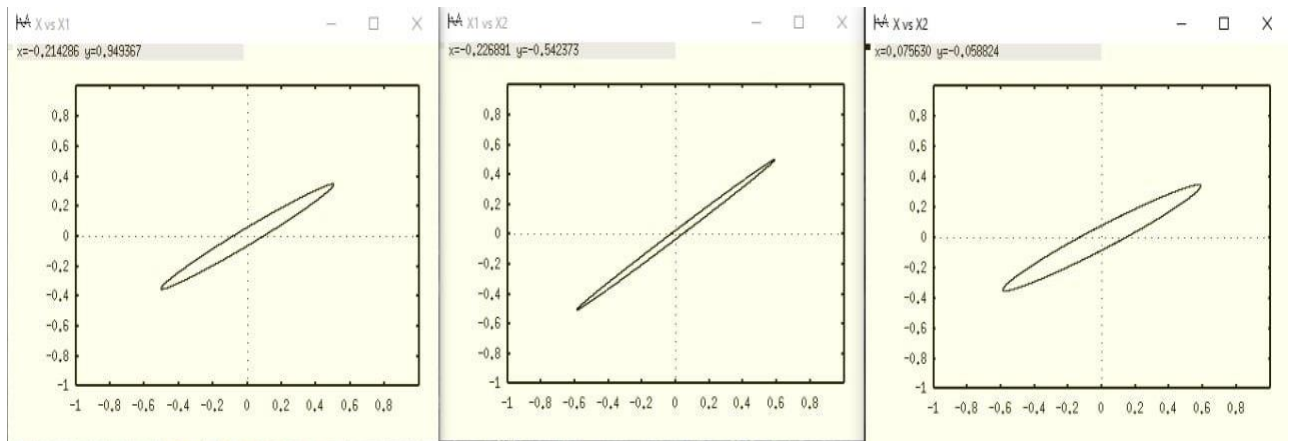


Рисунок 9 – Фазовые портреты  $x(x_1)$ ,  $x(x_2)$ ,  $x_1(x_2)$  соответствующие синфазному режиму автоколебаний  $C_1$  при  $p = 1,06$ ,  $\varepsilon = 0,15$ ,  $\gamma_1 = \gamma_2 = 0,2$ ,  $a_1 = a_2 = 0,01$ ,  $p_1 = 1$

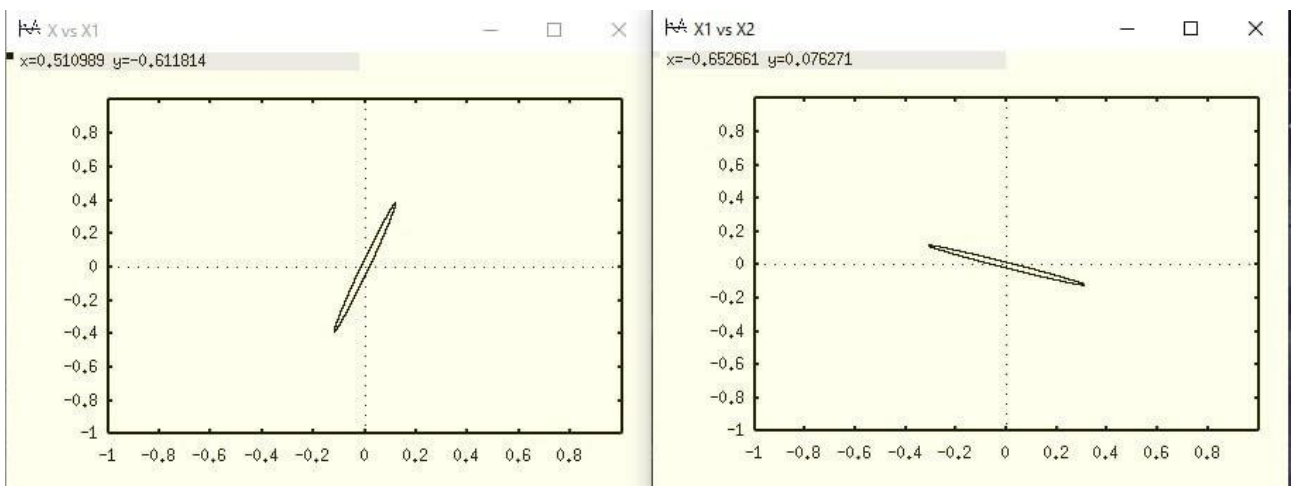


Рисунок 10 – Фазовые портреты  $x(x_1)$ ,  $x_1(x_2)$  соответствующие режиму автоколебаний  $C_3$  при  $p = 1,06$ ,  $\varepsilon = 0,15$ ,  $\gamma_1 = \gamma_2 = 0,2$ ,  $a_1 = a_2 = 0,01$ ,  $p_1 = 1$

Это подтверждает наличие трех различных устойчивых состояний (или аттракторов) при одном и том же значении параметра  $p$ , так при  $p = 1,06$  была обнаружена мультистабильность, так как система демонстрирует разные поведения ( $C_1, C_2, C_3$ ) в зависимости от начальных условий.

**Заключение.** В данной выпускной работе были исследованы автоколебательные системы с различным числом степеней свободы, в частности, генератор Рэлея с двумя дополнительными колебательными контурами.

Рассмотрены теоретические основы мультистабильности, а также методы построения математических моделей радиофизических генераторов. Проведен анализ устойчивости состояний равновесия осциллятора Рэлея и условия возникновения автоколебаний.

Исследован генератор Рэлея с дополнительным колебательным контуром. Показано, что добавление контуров приводит к качественным изменениям в поведении системы и возникновению бистабильности. Были проведены численные исследования режимов работы системы и бифуркационный анализ, что позволило выявить механизмы формирования мультистабильных состояний.

Заключительная часть работы была направлена на исследование генератора Рэлея с двумя дополнительными контурами. Были рассмотрены схема и уравнения генератора, а также проведен анализ динамики системы. Выявлено, что система демонстрирует сложное поведение, связанное с мультистабильностью, когда несколько устойчивых состояний могут сосуществовать при одних и тех же параметрах системы.

Численные эксперименты и аналитические расчеты, проведенные с помощью пакета программ ХРРАУТО, подтвердили теоретические выводы и позволили получить более глубокое понимание механизмов формирования мультистабильности в рассматриваемых системах.