МИНОБРНАУКИ РОССИИ

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«САРАТОВСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ИМЕНИ Н.Г. ЧЕРНЫШЕВСКОГО»

Кафедра радиофизики и нелинейной динамики

ЭФФЕКТЫ В АНСАМБЛЯХ БИСТАБИЛЬНЫХ ОСЦИЛЛЯТОРОВ:ВЛИЯНИЕ ШУМА И ТОПОЛОГИИ

АВТОРЕФЕРАТ МАГИСТЕРСКОЙ РАБОТЫ

студента 2 курса 2232 группы
направления 03.04.03 Радиофизика
Института физики
Кана Вадима Константиновича

Научный руководитель
доцент, к.ф.-м.н., доцент ____________________ В.В. Семенов

Зав. кафедрой радиофизики
и нелинейной динамики,
д.ф.-м.н., доцент ____________________ Г.И. Стрелкова

Саратов 2024 г.

Бистабильность является одним из важных свойств нелинейных динамических систем и заключается в наличии двух устойчивых состояний, между которыми система может переключаться. Классическим примером бистабильной системы является модель случайного (Броуновского) движения частицы в двухъямном потенциальном поле. Соответствующая функция потенциала характеризуется наличием двух локальных минимумов. Каждый из этих минимумов представляет собой устойчивое состояние системы, в котором она может находиться длительное время. В общем случае, нахождению в одной из потенциальных ям может соответствовать любой тип аттрактора (состояние равновесия, предельный цикл или хаотический аттрактор) со своим бассейном притяжения. Переход между сосуществующими аттракторами осуществляется путем преодоления потенциального барьера, что может быть вызвано как внешним воздействием, так и флуктуациями внутри системы.

Одним из простейших и классических примеров стохастических бистабильных осцилляторов является осциллятор Крамерса, описывающий Броуновское движение в двухъямном потенциальном поле. Бистабильный стохастический осциллятор - это нелинейный диссипативный осциллятор, характеризующийся сосуществованием двух устойчивых состояний равновесия. Шум играет важную роль в динамике стохастических бистабильных осцилляторов, т.к. случайные воздействия вызывают переключения между двумя сосуществующими устойчивыми состояниями системы.

Таким образом, **целью** данной выпускной квалификационной работы является изучение возникновения различных эффектов, приводящих к разрушению волновых фронтов, возникающих в ансамбле бистабильных осцилляторов под воздействием шумов, а также роль топологии связи между осцилляторами.

Для достижения установленной цели были поставлены следующие **задачи**:

1. Исследование влияния мультипликативного и аддитивного шумов на ансамбль бистабильных осцилляторов, приводящее к возникновению различных эффектов.

2. Исследование влияния топологии в ансамбле бистабильных осцилляторов с отсутствием и присутствием шумовых воздействий.

3. Провести численное моделирование пространственно-временной динамики ансамбля бистабильных осцилляторов

Для выполнения задач использовалась программа MatLab, с помощью которой производилось численное моделирование исследуемой системы и построение пространственно-временных диаграмм.

Раздел 1. “Известные сведения”. В данном разделе изучаются уже полученные ранее сведения, рассматривается модель бистабильного осциллятора.

Раздел 2. “Методы исследования”. В этом разделе происходит описание метода, с помощью которого производилось численное интегрирование дифференциальных уравнений. Также, продемонстрирован вид рабочей программы.

Раздел 3. “Исследуемая система”. В разделе показано схематические изображение нелокально связанных бистабильных осцилляторов и происходит построение пространственно-временных диаграмм.

Раздел 4. “Влияние шума на распространение волнового фронта”. В данном разделе показано влияние мультипликативного и аддитивного шумов на ансамбль бистабильных осцилляторов, а также рассмотрены эффекты, возникающие в системе.

Раздел 5. “Влияние связи”. В этом разделе изучается сила и радиус связи в ансамбле, в частности, показано влияние радиуса связи в ансамбле нелокально связанных бистабильных осцилляторов, а также влияние силы связи в системе с присутствием аддитивного шума.

Основное содержание работы

В работе изучается ансамбль бистабильных осцилляторов по модифицированной схеме Эйлера (метод Гюна). Каждый отдельный элемент ансамбля описывается выражением $\frac{du}{dt} = -u(u-a)(u+b)$ в общем виде. Выражение для ансамбля имеет вид:

$$\frac{du_i}{dt} = -u_i(u_i - a)(u_i + b) + \frac{\sigma}{2R}\sum_{j=i-R}^{i+R}(u_j - u_i) \quad (1)$$

где u_i-динамическая переменная, i=1, 2, 3,....N - количество элементов в ансамбле, a и b - параметры парциального генератора, σ - сила связи между элементами, R - радиус связи. Ансамбль изучается для периодических граничных условий (кольцо), т.е. индексы рассматриваются по модулю N. Численное моделирование ансамбля (1) осуществляется путем интегрирования изученных дифференциальных уравнений с использованием вышеупомянутого метода.

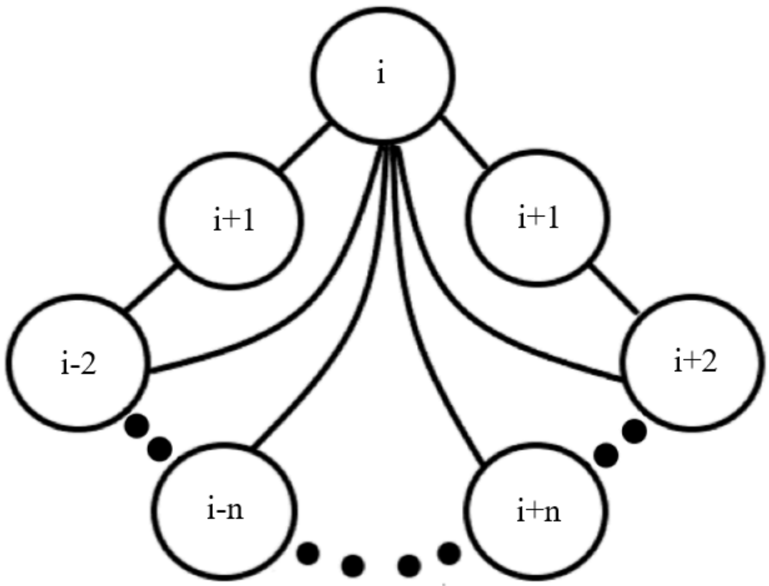

Рисунок 1 - схематическое изображение ансамбля нелокально связанных бистабильных осцилляторов.

Рисунок (1) представляет собой схематическое изображение ансамбля бистабильных осцилляторов. Осцилляторы внутри ансамбля связаны между собой нелокально. Это означает, что каждый элемент взаимодействует не только со своими непосредственными соседями, но и с элементами, которые находятся вдали от него. Нелокальная связь позволяет системе демонстрировать более сложное динамическое поведение. Рисунок (1) демонстрирует важность рассмотрения нелокальной связи для полноты понимания исследуемой системы взаимодействующих осцилляторов.

В первую очередь рассмотрим, как выглядит ансамбль связанных осцилляторов в системе с симметрией и асимметрией без шума при локальном радиусе связи (R=1). Для этого построим пространственно-временную диаграмму. В работе, синим цветом изображается устойчивое состояние $u_i(t) =- b$, а красным цветом изображается устойчивое состояние $u_i(t) = a$.

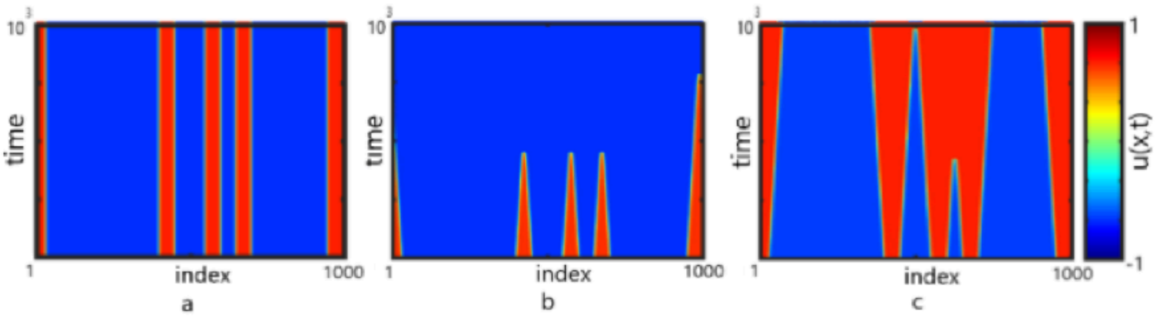

Рисунок 2 - пространственно-временная диаграмма системы (8) с присутствием симметрии (a) и асимметрии (b,c).

В случае, когда система симметрична, т.е. параметры a и b, соответствующие устойчивым состояниям, равны, волновой фронт становится стационарным (рис.2 a).

Поведение уравнения (1) в двумерном пространстве (x;y) зависит от начальной конфигурации и наличии асимметрии. Условие асимметрии играет принципиальную роль. Если система асимметрична, то волновой фронт перемещается в пространстве с постоянной скоростью. Направление распространения фронта зависит от значений параметров. Если a>b, состояние u(x,y)=a, обозначенное красным цветом, заполняет все занимаемое пространство (рис. 2 (c)). Если же a<b, то распространение волнового фронта имеет противоположное направление и состояние u(x,y)=b, обозначенное синим цветом, заполняет все занимаемое пространство. (рис. 2 (b)). При этом, волновые фронты, разграничивающие состояния, с увеличением асимметрии все больше сглаживаются.

Таким образом, начальные условия или симметрия играют важную роль в дальнейших изменениях состояний. Введение асимметрии приводит к нарушению равновесия, что отражается на пространственно-временных диаграммах. Волновые фронты, представляющие границы между устойчивыми состояниями, перестают быть стационарными. Система с асимметрией стремится к новому равновесному состоянию, при этом наблюдается преобладание одного состояния над другим.

Чтобы исследовать влияние мультипликативного шума на распространение волнового фронта, модель уравнения (1) модифицирована для включения параметрических источников мультипликативного шума:

$$\frac{du}{dt} = -u(u - a_0 + \sqrt{2D_a}n_a(t))(u + b_0 + \sqrt{2D_b}n_b(t)) + \frac{\sigma}{2R}\sum_{j=i-R}^{i+R}(u_j - u_i) \qquad (2)$$

где a_0, b_0- фиксированные параметры $n_{a,b}$(t) - нормированные источники белого Гауссового шума, $D_{a,b}$ - интенсивность шума.

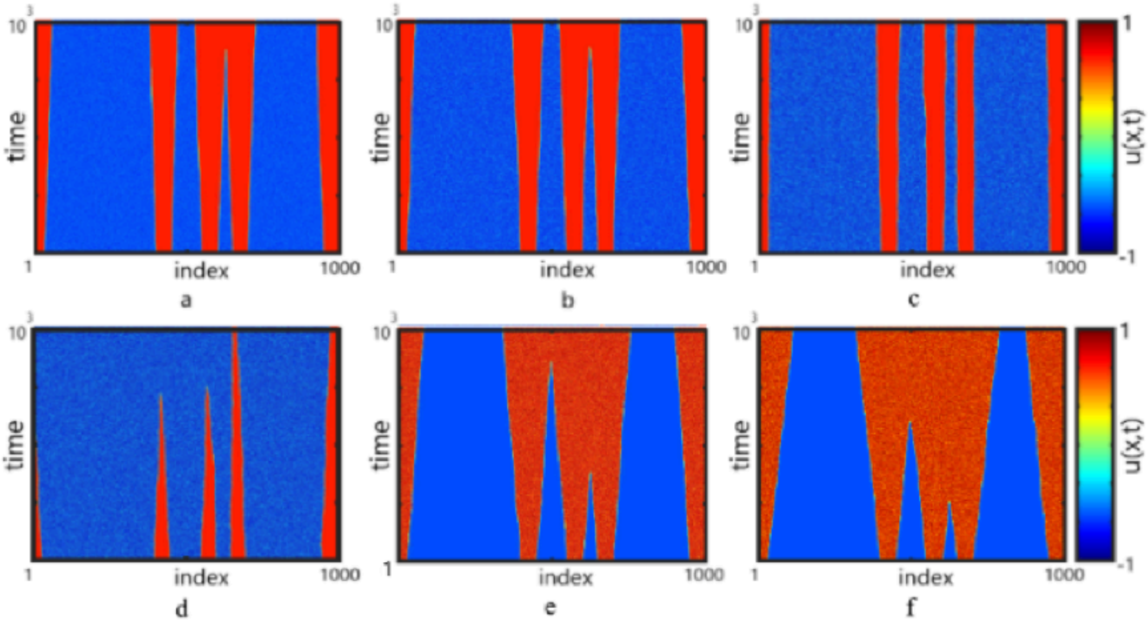

Рисунок 3 - эволюция пространственно-временной диаграммы системы (2) с увеличением интенсивности мультипликативного шума, добавляемым к параметру b: D_b=0.01 (a), D_b=0.03 (b), D_b=0.05 (c), D_b=0.2 (d); добавляемым к параметру a: D_a=0.07 (e), D_a=0.15 (f). Параметры осциллятора: a=1, b=0.9. Параметры системы: R=1, σ=1.

Теперь стоит рассмотреть влияние аддитивного шума на поведение системы. Как и с мультипликативным шумом, была модифицирована модель уравнения (1) с добавлением аддитивного шума:

$$\frac{du}{dt} = -u(u-a)(u+b) + \sqrt{2D}n(t) + \frac{\sigma}{2R}\sum_{j=i-R}^{i+R}(u_j - u_i) \quad (3)$$

Рассмотрим влияние аддитивного шума на систему с асимметрией (a=1, b=0.9). В этой работе зафиксируем силу σ=1 и радиус R=1 связи между элементами.

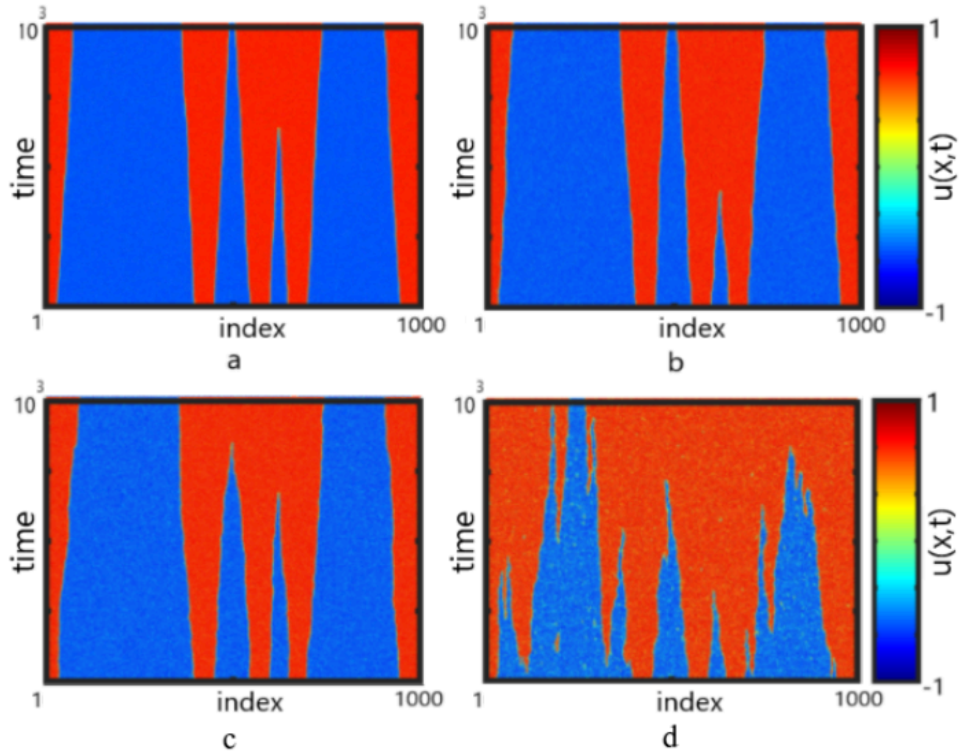

Рисунок 4 - эволюция пространственно-временной диаграммы системы (3) с увеличением интенсивности аддитивного шума: D=0.01 (a), D=0.03 (b), D=0.05 (c), D=0.1 (d). Параметры осциллятора: a=1, b=0.9. Параметры связи: R=1, σ=1.

Рассмотрим поведение системы с увеличение радиуса связи в системе с аддитивным шумом, добавляемым к каждому элементу в ансамбле (3). Как уже было выяснено ранее, аддитивный шум приводит к разрушению границы между разными состояниями осцилляторов.

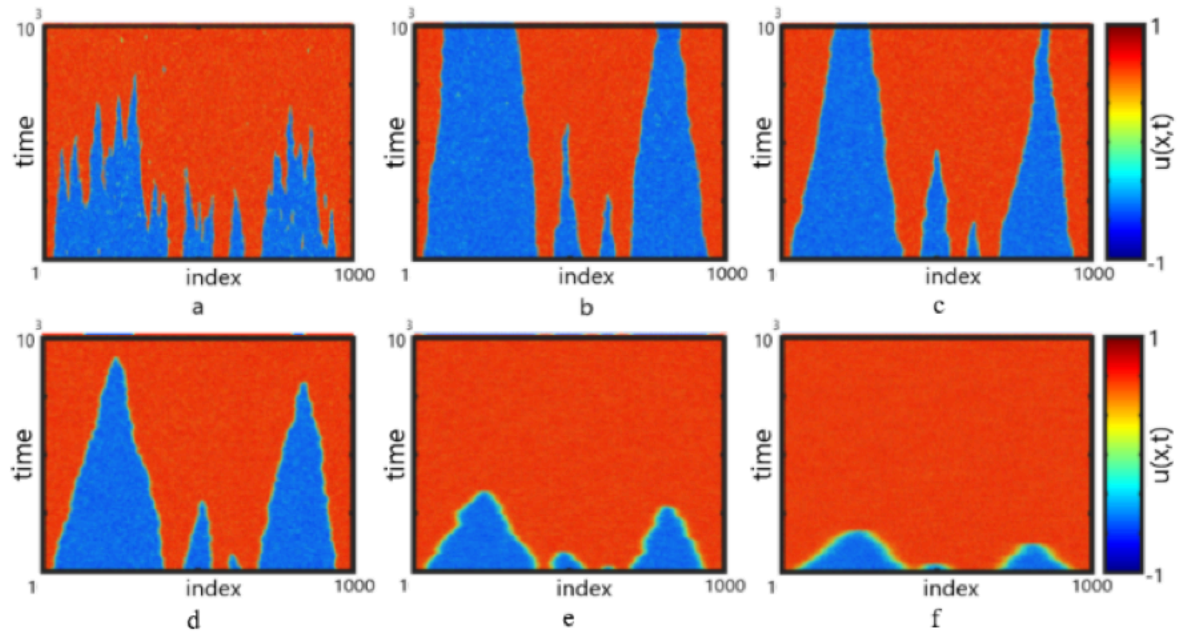

Рисунок 5 - эволюция пространственно-временной диаграммы системы (3) с увеличением радиуса связи с аддитивным шумом. R=1 (a), R=2 (b), R=3 (c), R=5 (d), R=15 (e), R=30 (f). Параметры осциллятора: a=1, b=0.9. Параметры системы: σ=1.

Заключение

В ходе данной работы была рассмотрена проблема, связанная с возникновением эффектов в ансамблях бистабильных осцилляторов, связанных с наличием различных шумовых возмущений. Бистабильность описывается с помощью моделей, основанных на нелинейных дифференциальных уравнениях. В качестве изучения бистабильных систем, за основу был взят осциллятор Крамерса, описывающий Броуновское движение в двухъямном потенциальном поле. Выяснили, что шум играет важную роль в таких системах в связи с его возможностью вызывать случайные переключения между устойчивыми состояниями. Также, рассмотрели явление бистабильности в средах. Наличие диффузии играет принципиально важную роль. Диффузия способна существенно изменять динамику бистабильных сред, приводя к возникновению пространственно-временных паттернов и волновых процессов. Флуктуация в таких средах, в том числе шумовые воздействия, также играют ключевую роль, индуцируя переходы между пространственными состояниями и формирование локализованных структур. Выяснили, что в бистабильных средах с диффузией, пространственные флуктуации или внешние воздействия могут инициировать проявление границ между устойчивыми состояниями, которые называются волновые фронтами. Скорость распространения волновых фронтов определяется нелинейностью и диффузионными процессами. Волновые фронты могут быть устойчивыми и неустойчивыми к возмущениям, что может привести к их деформации. Также, характер и топология связи играет существенную роль в ансамбле бистабильных осцилляторов. Связь может индуцировать синхронизацию осцилляторов, когда они переключаются между своими устойчивыми состояниями согласованно. Однако, стоит отметить, что связь в ансамбле может также приводить к проявлению сложных пространственно-временных паттернов.