

МИНОБРНАУКИ РОССИИ
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«САРАТОВСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ Н.Г.ЧЕРНЫШЕВСКОГО»

Кафедра физики открытых систем

Изучение и программная реализация методов генерации и анализа
самоподобных сигналов

АВТОРЕФЕРАТ БАКАЛАВРСКОЙ РАБОТЫ

Студента 4 курса 4041 группы

направления (специальности) _____

09.03.02 «Информационные системы и технологии»

код и наименование направления (специальности)

института физики

наименование факультета, института, колледжа

Рожкова Максима Александровича

фамилия, имя, отчество

Научный руководитель

доцент кафедры физики

открытых систем, к.ф.-м.н.

должность, уч. степень, уч. звание

дата, подпись

Д.В. Савин

инициалы, фамилия

Заведующий кафедрой

физики открытых систем,

д.ф.-м.н., профессор

должность, уч. степень, уч. звание

дата, подпись

А.А. Короновский

инициалы, фамилия

Саратов 2024 год

Введение

Самоподобные явления и процессы широко распространены в природе и вместе с тем на сегодняшний день хорошо изучены. В широком смысле самоподобные явления можно называть фрактальными, изучению и описанию различных проявлений фрактальной динамики посвящено большое количество литературы (см, например, [1, 2, 6]). Свойство самоподобия, как правило, приводит к тому, что математическим образом такого явления или процесса является степенной закон, показатель степени которого не меняется при масштабировании. Ярким примером такого рода процессов являются так называемые «цветные» шумы - стохастические процессы, подчиняющиеся степенным закономерностям [7]. С понятием цветных шумов тесно связано понятие фрактального броуновского движения [8]. «Цветные» шумы – одни из ярких представителей области статистики, подчиняющихся степенным закономерностям. Потому основное внимание при выполнении данной работы было сосредоточено на демонстрирующих шумовые свойства сигналах и анализе как их самих, так и их спектров мощности.

Основанные на шумовых процессах приложения служат для моделирования различных процессов и прогнозирования разного рода естественных и техногенных катастроф [1-2], используются в генераторах случайных чисел [3]. Соответственно, возникает необходимость в определенных инструментах генерации и анализа самоподобных сигналов. Существует ряд способов генерации такого рода последовательностей [5, 9, 10]. Одним из таких является фактически использование дробного интегро-дифференцирования [1,10]. Само по себе дробное интегрирование - мощный математический инструмент, открывающий широкие перспективы для применения в различных областях науки [11]; в частности, оно позволяет расширить спектр динамических систем со сложной, представляющей наибольший интерес к изучению, динамикой [4]. Целью настоящей работы является реализация алгоритма генерации цветных шумов, основанного на применении дробного интегрирования к Фурье-спектру шумового сигнала, и анализ результатов его работы.

В ходе научно-исследовательской работы решались задачи генерации шумов с различными показателями степени, оптимизации имеющегося кода для генерации и исследования шумовых сигналов с точки зрения быстродействия, определение и анализ различных, в том числе статистических, свойств получаемых сигналов, а также поиск для них закономерностей и сравнение таковых с эталонными.

Основное внимание в ходе выполнения работы было сосредоточено на исследовании характеристик сигналов, получаемых в результате применения операции дробного интегрирования к спектру мощности исходного сигнала. Анализ отдельных значений или зависимостей этих характеристик и сравнение получаемых результатов с представленными в литературе эталонными дает представление о том, корректно ли проводится как генерация, так и сам анализ.

Результаты исследований представлены в тексте работы 4-мя разделами: методы генерации и анализа шумовых сигналов (здесь представлена основная теория, необходимая для реализации различных методов генерации и исследования сигналов), генерация шумовых сигналов с различными характеристиками (в нем приведены результаты работы кода по генерации тривиальных шумов), статистические характеристики сгенерированных сигналов (здесь анализируются зависимости определенных статистических характеристик от параметров генерации шумовых сигналов) и генерация шумовых сигналов на основе различных моделей белого шума (исследование и поиск различий в характеристиках шумовых сигналах, получаемых при работе с различными моделями белого шума).

Основное содержание работы

Генерация шумовых сигналов с различными характеристиками. Первым делом была изучена теория дробного интегрирования, на основании которой был написан код, позволяющий проводить данную операцию над значениями спектра мощности исходного сигнала, являющегося рядом нормально распределённых чисел и представляющего собой модель белого шума. Значения спектра мощности были получены возведением в квадрат абсолютных значений

комплексных компонент Фурье-образа исходного сигнала после применения к нему быстрого преобразования Фурье (далее – БПФ).

На основе модели белого шума при помощи операции дробного интегрирования были сгенерированы новые шумовые сигналы с известными соотношениями спектральных показателей β и абстрактной характеристики «цвета». Были выбраны следующие параметры генерации шумовых сигналов: $\beta = 1$ для розового шума, $\beta = 2$ для броуновского шума и $\beta = 3$ для черного шума. После применения операции дробного интегрирования к значениям спектра мощности исходного сигнала и к компонентам его Фурье-образа, из полученных значений комплексных компонент обратным БПФ была восстановлена временная реализация шумового сигнала с определенным показателем степени в зависимости спектра мощности от частоты β .

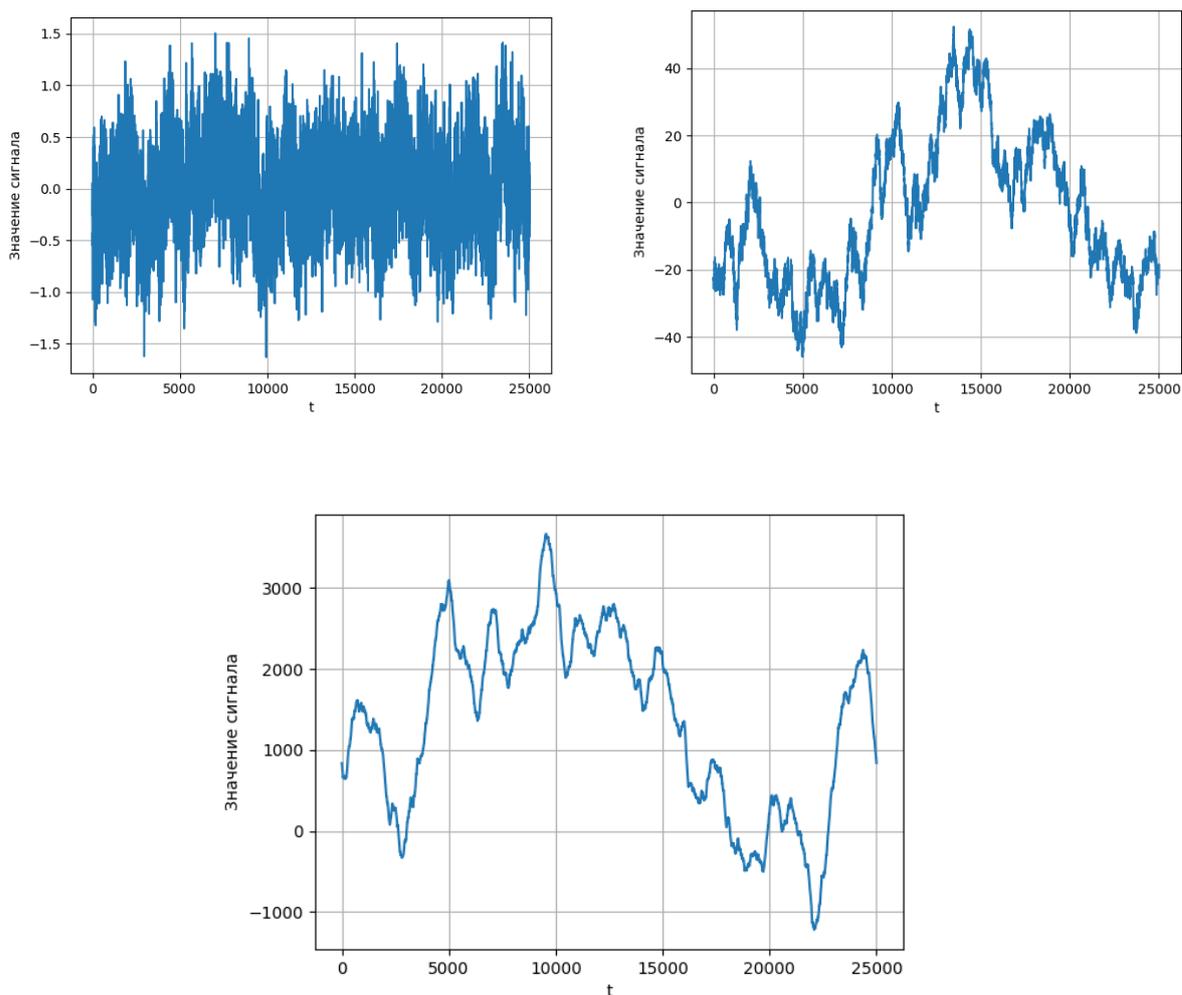


Рисунок 1 – Временные реализации розового, броуновского и черного шумов

Для построенных в двойном логарифмическом масштабе спектров мощности сигналов, восстановленных обратным БПФ, были рассчитаны линейные аппроксимации, чей инвертированный угловой коэффициент k представляет собой показатель степени β в зависимости спектров мощности от частоты. Для розового, броуновского и черного шумов были получены значения угловых коэффициентов $k = -0.98$, $k = -1.98$ и $k = -3.01$, соответственно.

Для того, чтобы убедиться в появлении свойства самоподобия у полученных временных реализаций шумовых сигналов, были построены графики автокорреляционных функций (далее – АКФ). При сравнении АКФ полученных сигналов между собой и с АКФ модели белого шума, можно сделать вывод о появлении памяти о прошлых значениях у цветных шумов и увеличении её «объема» с ростом показателя степени β , что проявляется в увеличении показателя времени корреляции τ_c по мере увеличения β .

Анализ результатов генерации шумовых сигналов с различными показателями степени в зависимости спектра мощности от частоты, ввиду совпадения ожидаемых и полученных в ходе выполнения практического задания характеристик, позволил сделать вывод об успешно проведенной генерации.

Статистические характеристики сгенерированных сигналов.

Следующей целью данной работы был расчет статистических характеристик получаемых шумов и изучение наблюдаемых закономерностей. Анализ статистических характеристик получаемых шумовых сигналов важен по той причине, что шумы – стохастические процессы. В связи с отсутствием задающих подобные сигналы функций, исследовать представляется возможным лишь сами временные реализации, для чего лучше всего подходят статистические методы работы с большими объемами данных.

Первым параметром, зависимость таких статистических характеристик, как среднее, медиана, дисперсия и среднеквадратическое отклонение, от которого исследовалась в ходе работы, была длина временной реализации исходного сигнала с нормальным распределением значений. Для проведения анализа был выбран интервал длительностей временной реализации [1000, 3000].

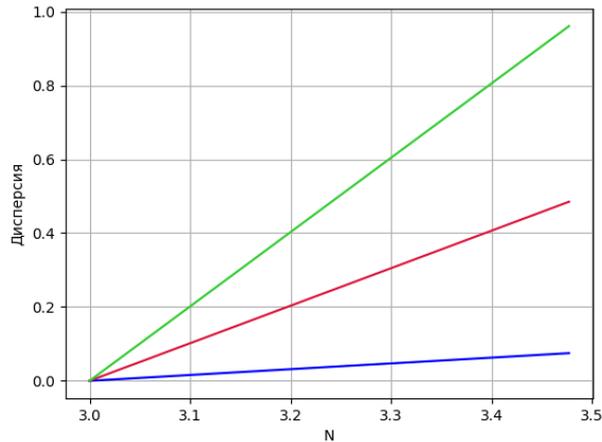


Рисунок 2 – Зависимость аппроксимирующей дисперсию прямой от длины временной реализации исходного сигнала с нормальным распределением значений для розового (выделен синим), броуновского (выделен красным) и черного (выделен зеленым) шумов, двойной логарифмический масштаб

Полученные результаты свидетельствуют о тенденции к увеличению максимальных значений статистических характеристик с увеличением длины временной реализации. Были рассчитаны угловые коэффициенты k линейных аппроксимаций зависимостей дисперсии, построенных в двойном логарифмическом масштабе, для розового ($k = 0.17$), броуновского ($k = 1.04$) и черного ($k = 2.06$) шумов. Расчетное значение k для броуновского шума подтверждается известным фактом пропорциональности времени его изменения дисперсии. На основании полученных значений и вывода из факта равенства дельта-дисперсии кумулятивного процесса Δt^{2H} [6, с. 350] выражения $2H = k$, где H – показатель Херста, были рассчитаны показатели Херста для розового ($H = 0.085$), броуновского ($H = 0.52$) и черного ($H = 1.03$) шумов. Эти значения согласуются с теорией показателя Херста и сходятся с эталонными для соответствующих шумов.

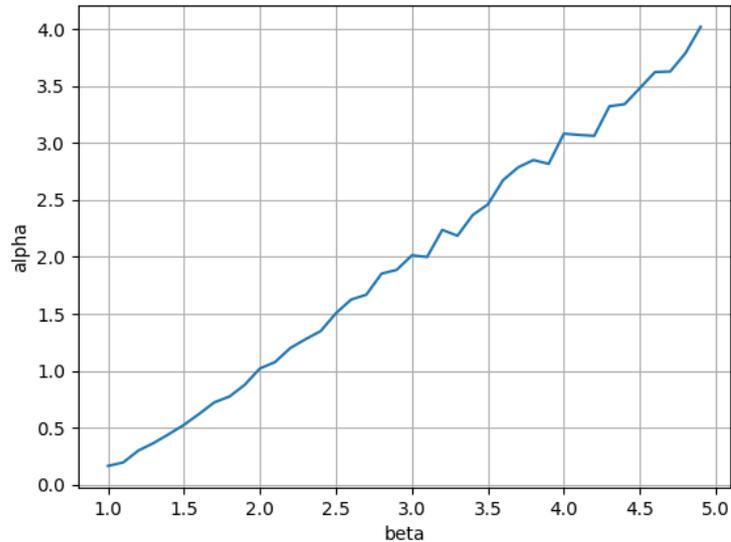


Рисунок 3 – Зависимость $k(\beta)$, сигнал с нормальным распределением значений, линейный масштаб

В целом, полученные зависимости статистических характеристик были ожидаемы, если вспомнить поведение АКФ для различных цветных шумов. Белый шум имеет нулевые среднее и дисперсию, розовый шум, как максимально приближенный к белому среди шумов с целыми показателями степени, демонстрирует схожую динамику поведения статистических величин, вроде зависимости среднего, значения которого колеблются в пределах не меняющегося со временем интервала. Однако с ростом спектрального показателя β размах значений статистических характеристик явно увеличивается с ростом длины временной реализации, и сильно растет по мере увеличения показателя степени.

Наряду с зависимостью статистических характеристик шумовых сигналов от длины временной реализации, было выдвинуто предположение о существовании определенной взаимосвязи между статистическими характеристиками, в первую очередь дисперсией, и значением спектрального показателя β .

В ходе работы исследовался тот же набор статистических характеристик и использовался тот же метод генерации исходного сигнала, однако теперь изучались 3 длины него реализации (1000, 5000 и 10000 значений). Для них при

меняющемся значении β рассчитывались статистические характеристики получаемых шумов.

Графики полученных зависимостей от β более нелинейные, чем зависимости от длины временной реализации. Тем не менее, тенденция к росту размаха значений зависимостей статистических характеристик с ростом β сохраняется. Обращаясь к полученным для дисперсии данным, можно сделать вывод о том, что полученные зависимости явно растут быстрее степенной функции. Были рассчитаны следующие угловые коэффициенты линейных аппроксимаций полученных дисперсионных зависимостей, характеризующие меру скорости роста полученных зависимостей и представляющие собой показатель степени в зависимости дисперсии от спектрального показателя: 15.78 для реализации с $N=1000$, 19.97 для реализации с $N=5000$ и 21.86 для реализации с $N=10000$.

Ранее уже был проведен расчет показателей Херста на основании угловых коэффициентов дисперсионных зависимостей. Для получения выводов касательно зависимости угловых коэффициентов аппроксимации дисперсионной зависимости был построен график зависимости $k(\beta)$ углового коэффициента аппроксимации дисперсионной зависимости для интервала длительностей временной реализации [1000, 3000] от показателя степени β , меняющегося на интервале [1, 5]. На основании ранее представленного выражения $2H = k$ и формулы $\beta = 2H + 1$ [1, с. 184], был сделан следующий вывод: зависимость $k(\beta)$ описывается выражением $k = \beta - 1$. Анализ графика полученной зависимости подтвердил пропорциональность зависимости показателя степени дисперсионной зависимости от длины реализации исходного сигнала изменению спектрального показателя.

Несмотря на наличие проведенных ранее расчетов показателей Херста, при помощи функций библиотеки `hurst` были построены графики зависимостей величины нормированного размаха от величины временного интервала, сравнивающие значения, определенные для конкретных временных интервалов, и функцию Херста, представляющую собой их линейную аппроксимацию в

двойном логарифмическом масштабе. При анализе такого графика показатель Херста может быть определен как угловой коэффициент функции Херста.

Сигналами, на основе которых проводились расчеты и построения, служили сгенерированные ранее цветные шумы. Для розового шума было получено значение $H=0.78$, что противоположно эталонному значению $H=0$, означающему антиперсистентность процесса. Напротив, сгенерированный шум с таким показателем Херста будет стремиться сохранить имеющуюся тенденцию. Для сгенерированного ранее броуновского шума было получено значение $H=0.51$, что означает отсутствие явных тенденций. Также генерация броуновского шума была проведена моделированием винеровского процесса – модели броуновского шума, определяемой в практической части данной работы как сумма нормально распределенных величин с нулевым средним. Для такой реализации броуновского шума было получено значение $H=0.56$. Показатели Херста обоих способов генерации броуновского шума сходятся с эталонным $H=0.5$. Показатель Херста ранее сгенерированного черного шума принимает значение $H=0.22$, что не сходится с эталонным $H=1$, означающим персистентность процесса, или большую вероятность сохранения имеющейся тенденции. По результатам данного раздела вывод о генерации шумового сигнала можно сделать только для реализаций броуновского шума, про розовый и черный шумы приходится говорить лишь как про сигналы, демонстрирующие определенные свойства соответствующих шумов.

Генерация шумовых сигналов на основе различных моделей белого шума.

В данном разделе исследовались статистические характеристики шумовых сигналов, генерируемых на основе временных рядов с однородным распределением значений на интервале $[-1, 1]$ и задаваемых логистическим отображением $x_{n+1} = 1 - \lambda x_n^2$ с параметром $\lambda = 2$. Оба эти способа представляют собой различные модели белого шума, процесс генерации цветных шумов не меняется.

Вид зависимостей статистических характеристик от длины временной реализации исходного сигнала с однородным распределением значений не

претерпел значительных изменений по сравнению с представленными ранее зависимостями. Были рассчитаны угловые коэффициенты линейных аппроксимаций дисперсионных зависимостей, построенных в двойном логарифмическом масштабе, для розового ($k = 0.16$), броуновского ($k = 1.02$) и черного ($k = 2.04$) шумов. Зависимости статистических характеристик от значения показателя степени β также оказались похожи на представленные ранее. Для аппроксимированной дисперсионной зависимости от спектрального показателя β были рассчитаны следующие угловые коэффициенты, представляющие показатель степени в зависимости дисперсии от спектрального показателя: 15.82 для реализации с $N=1000$, 20.05 для реализации с $N=5000$ и 21.85 для реализации с $N=10000$. Исследование зависимости $k(\beta)$ позволяет подтвердить ранее сделанный вывод о пропорциональности зависимости показателя степени дисперсионной зависимости от длины реализации исходного сигнала изменению спектрального показателя.

Результаты анализа статистических характеристик шумовых сигналов, сгенерированных на основе временного ряда логистического отображения, могут лишь подтвердить ранее сделанные заключения, значительных изменений в поведении зависимостей и в рассчитанных для них значениях характеристик не выявлено. Новый вывод можно сделать лишь о меньших флуктуациях значений получаемых зависимостей.

Заключение

В ходе работы были достигнуты основные цели по генерации и анализу шумов с различным спектральным показателем и на основании представленных результатов были сделаны определенные выводы. Анализ графиков, получаемых в результате проведения операции дробного интегрирования спектров мощности, и их аппроксимаций позволяет сделать заключение об исправности генерации шумовых сигналов, а следовательно пригодности их для дальнейшего анализа. Касательно графиков АКФ можно сказать о том, что поведение АКФ исследуемых шумов соответствует ожидаемому – вспоминая теорию

показателей Херста, можно сопоставить их значения с появлением долгосрочной памяти у сигнала. Касательно рассчитанных с помощью функций библиотеки `hurst` показателей Херста сгенерированных шумов, можно утверждать о соответствующем поведении лишь для броуновского шума. С другой стороны, оценка показателя Херста, проведенная на основании зависимости дисперсии сигнала от времени, даёт результаты, находящиеся в гораздо более хорошем соответствии с теорией. На данный момент до конца не понятно, с чем может быть связано данное несоответствие, это может служить одной из задач дальнейших исследований.

Также были сделаны выводы касательно статистических закономерностей в характеристиках получаемых сигналов. К примеру, была выявлена пропорциональность времени дисперсии броуновского шума - что соответствует теории, - а также оценены показатели степени в зависимости дисперсии от времени для других типов сигналов. Нельзя не упомянуть факт практически полной независимости от модели исходного псевдослучайного сигнала параметров закономерностей, определяющих зависимость статистических характеристик получаемых сигналов как от длины реализации исходного сигнала, так и от значений спектрального показателя β . Определенные выводы были получены и для зависимостей статистических характеристик от показателя степени шума. Например, была установлена пропорциональность показателя степени в зависимости дисперсии от длины реализации изменению спектрального показателя. Также можно сделать вывод о том, что дисперсия и среднее значение сигнала растут с увеличением β быстрее степенной функции.

С практической стороны данной работы можно отметить выполнение задачи оптимизации кода с точки зрения времени выполнения и большее погружение в работу инструментария библиотек для языка Python.

Список литературы

[1] Шредер, М. Фракталы, хаос, степенные законы. Миниатюры из бесконечного рая / М. Шредер. – Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2001. – 528 с.

- [2] Федер, Е. Фракталы / Е. Федер. – М.: Мир, 1991. - 260 с.
- [3] Napoli E. Digital circuit for the generation of colored noise exploiting single bit pseudo random sequence / E. Napoli, G. Castellano, D. Esposito, A. G. M. Strollo. – 2016 IEEE 7th Latin American Symposium on Circuits & Systems (LASCAS). – IEEE, 2016. – С. 23-26
- [4] Vasily E. Tarasov Fractional dynamics: applications of fractional calculus to dynamics of particles, fields and media / Tarasov V.E. – Springer Science & Business Media, 2011. – 505 с.
- [5] Kasdin N. J. Discrete simulation of colored noise and stochastic processes and $1/f^\alpha$ power law noise generation / N. J. Kasdin - Proceedings of the IEEE, vol. 83, no. 5, 1995. – С. 802-527
- [6] Мандельброт, Б. Фрактальная геометрия природы / Б. Мандельброт. – М.: Институт компьютерных исследований, 2002. – 656 с.
- [7] Hänggi P. Colored noise in dynamical systems / P. Hänggi, P. Jung - Advances in chemical physics, vol. 89, 1994. – с. 239-326.
- [8] Mandelbrot B. B. Fractional Brownian motions, fractional noises and applications / B. B. Mandelbrot, J. W. Van Ness - SIAM review, vol. 10, no. 4, 1968. – с. 422-437.
- [9] Timmer J. On generating power law noise / J. Timmer, M. König - Astronomy and Astrophysics, vol. 300, 1995 - с.707.
- [10] Zhivomirov H. A method for colored noise generation / H. Zhivomirov - Romanian journal of acoustics and vibration, vol. 15, no. 1, 2018. – с. 14-19.
- [11] Diethelm K. Trends, directions for further research, and some open problems of fractional calculus / K. Diethelm, V. Kiryakova, Y. Luchko, J. A. Tenreiro Machado, Vasily E. Tarasov - Nonlinear Dynamics, vol. 107, no. 4, 2022. – с. 3245-3270.