

МИНОБРНАУКИ РОССИИ
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«САРАТОВСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ Н.Г.ЧЕРНЫШЕВСКОГО»

Кафедра физики открытых систем

Численный анализ характеристик перемежающейся обобщенной
синхронизации

в случае взаимодействия систем с различной топологией аттрактора

название темы выпускной квалификационной работы полужирным шрифтом

АВТОРЕФЕРАТ МАГИСТЕРСКОЙ РАБОТЫ

Студента 2 курса 2241 группы

направления 09.04.02 Информационные системы и технологии

код и наименование направления

института физики

наименование факультета

Передереева Александра Павловича

фамилия, имя, отчество

Научный руководитель
профессор кафедры ФОС,

д.ф.-м.н., профессор

должность, уч. степень, уч. звание

дата, подпись

О.И. Москаленко

инициалы, фамилия

Заведующий кафедрой физики открытых систем

полное наименование кафедры

д.ф.-м.н., профессор

должность, уч. степень, уч. звание

дата, подпись

А.А.Короновский

инициалы, фамилия

Саратов 2024 год

Введение

Синхронизация взаимодействующих хаотических осцилляторов представляет собой значимое явление в области теории динамических систем и нелинейной динамики [1]. Изучение эффектов синхронизации между связанными автогенераторами является актуальной задачей современной физики. Одним из важнейших аспектов синхронизации является переход от асинхронной динамики, когда системы колеблются с разными частотами и фазами, к синхронной динамике, когда они синхронизируют свои колебания. Этот переход является фундаментальным процессом, который лежит в основе многих природных и искусственных явлений. Исследование переходов к синхронизации в связанных автогенераторах ведется с использованием различных теоретических и экспериментальных подходов. Теоретические модели позволяют изучать динамику систем, способных демонстрировать синхронное поведение, и предсказывать условия перехода от одного типа поведения к другому. Экспериментальные исследования проводятся на реальных автоколебательных системах, связанных различными способами.

Одним из наиболее эффективных методов анализа различных типов хаотической синхронизации является численное моделирование [2].

Численное моделирование динамических систем является эффективным методом описания и исследования сложных систем, что позволяет проводить вычислительные эксперименты в тех случаях, когда реальное проведение эксперимента затруднено или может привести к непредсказуемым результатам. Кроме того, причиной большой популярности численного моделирования служит высокая скорость получения результатов и сравнительно небольшая погрешность, которую также можно регулировать при помощи изменения шага нахождения решения.

В настоящее время известно несколько типов хаотической синхронизации в связанных нелинейных осцилляторах [1]. Это фазовая синхронизация, синхронизация с запаздыванием, полная синхронизация и

обобщенная синхронизация. Каждый из вышеназванных типов хаотической синхронизации характеризуется своими особенностями.

Целью данной магистерской работы является анализ эффектов вблизи границы обобщенной синхронизации в случае взаимодействия систем со сложной и простой топологией аттрактора при помощи численного моделирования. Показано, что в данном случае имеет место перемежаемость [3,4]. Получены статистические характеристики перемежаемости вблизи границы обобщенной синхронизации при помощи амплитудного метода, основанного на методе вспомогательной системы.

Описание работы

Основная часть работы состоит из трех глав.

В первой главе дается определение обобщенной синхронизации и рассматриваются различные методы ее диагностики в однонаправленно связанных хаотических системах.

Для однонаправленно связанных хаотических осцилляторов режим обобщенной синхронизации подразумевает, что после завершения переходного процесса между ведущей системой $X(t)$ и ведомой системой $U(t)$ устанавливается функциональная зависимость $F[\bullet]$, которая определяет их взаимосвязь $U(t)=F[X(t)]$ [5].

Для диагностики режима обобщенной синхронизации хаотических осцилляторов широко применяются следующие методы: метод ближайших соседей, метод вспомогательной системы, метод расчета условных показателей Ляпунова, метод, основанный на анализе спектрального состава сигнала.

Более подробно остановимся на методе вспомогательной системы [6]. Суть данного метода заключается в следующем: помимо ведомой системой $U(t)$ рассматривается вспомогательная система $V(t)$, идентичная ведомой системе по значениям управляющих параметров, но начинает свое движение с

других начальных условий в пределах того же хаотического аттрактора. В случае отсутствия режима обобщенной синхронизации между взаимодействующими системами состояния ведомой $U(t)$ и вспомогательной $V(t)$ систем принадлежат одному и тому же хаотическому аттрактору, но являются различными. В режиме обобщенной синхронизации обе системы (ведомая и вспомогательная) демонстрируют одинаковое поведение после завершения переходного процесса. Иными словами, эквивалентность состояний ведомой и вспомогательной систем, $U(t) = V(t)$, после завершения переходного процесса является критерием наличия обобщенной синхронизации по методу вспомогательной системы.

Вблизи границы обобщенной синхронизации наблюдается перемежающееся поведение – режим перемежающейся обобщенной синхронизации [7]. В данном случае функциональная связь между состояниями взаимодействующих систем наблюдается только в определенные интервалы времени, называемые ламинарными фазами поведения, в то время как на фоне ламинарных фаз имеют место кратковременные турбулентные всплески, в течение которых функциональная связь между взаимодействующими системами отсутствует.

В таком случае рассматривают разность между состояниями или одной из координат ведомой и вспомогательной систем, $\xi(t) = x_2(t) - x_a(t)$, и анализируют ее поведение с течением времени [8]. Временные интервалы, в которых модуль разницы остается ниже определенной заранее заданной константы Δ ($|\xi(t)| < \Delta$), при этом Δ является значительно меньшей величиной по сравнению с амплитудой собственных колебаний в системе, отражают фазы синхронного поведения и называются ламинарными фазами, в то время как участки времени, где разница превышает Δ , соответствуют фазам асинхронного поведения или турбулентным всплескам. Таким образом, в режиме перемежающейся обобщенной синхронизации при фиксированных значениях управляющих параметров во временных реализациях

взаимодействующих систем происходит чередование участков с синхронной (ламинарные фазы) и асинхронной (турбулентные фазы) в смысле обобщенной синхронизации динамикой.

Переход между ламинарными и турбулентными фазами происходит спонтанно и нерегулярно. Длительность каждой фазы может варьироваться, а частота переходов зависит от управляющих параметров. Для изучения характеристик перемежающейся обобщенной синхронизации и определения ее типа необходимо рассчитать статистические характеристики длительностей ламинарных фаз: распределения длительностей ламинарных фаз $N(\tau)$ при фиксированных значениях управляющих параметров и зависимость средней длительности ламинарных фаз T от параметра надкритичности (параметра связи ε) [7].

В настоящее время известно, что статистические характеристики, а следовательно, и тип перемежаемости, реализуемой вблизи границы обобщенной синхронизации, существенным образом отличаются для систем с относительно простой и относительно сложной топологией аттрактора [9]. При этом, под системами с простой топологией аттрактора понимаются системы с аттрактором ленточного типа [10], в то время как системы со сложной топологией аттрактора характеризуются, как правило, двулистной структурой [11].

Во второй главе рассматриваются объекты и методы исследования. Поведение однонаправленно связанных систем Ресслера [7] описывается следующими системами обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= -\omega_1 y_1 - z_1, \\ \dot{y}_1 &= \omega_1 x_1 + a y_1, \\ \dot{z}_1 &= p + z_1(x_1 - c), \end{aligned} \tag{1}$$

$$\begin{aligned} \dot{x}_2 &= -\omega_2 y_2 - z_2 + \varepsilon(x_2 - x_1), \\ \dot{y}_2 &= \omega_2 x_2 + a y_2, \\ \dot{z}_2 &= p + z_2(x_2 - c), \end{aligned} \tag{2}$$

где $a = 0.15$, $p = 0.2$, $c = 10$, $\omega_1 = 0.99$ для первой и $\omega_2 = 0.95$ для второй системы, ε – параметр связи.

Динамика однонаправленно связанных систем Лоренца [9] подчиняется следующим уравнениям:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= \sigma(y_1 - x_1), \\ \dot{y}_1 &= rx_1 - y_1 - x_1z_1, \end{aligned} \quad (3)$$

$$\begin{aligned} \dot{z}_1 &= -bz_1 + x_1y_1, \\ \dot{x}_2 &= \sigma(y_2 - x_2) + \varepsilon(x_1 - x_2), \\ \dot{y}_2 &= rx_2 - y_2 - x_2z_2, \\ \dot{z}_2 &= -bz_2 + x_2y_2, \end{aligned} \quad (4)$$

где ε параметр связи, определяющий переход от асинхронной динамики к обобщенной синхронизации, $r_1 = 40, r_2 = 35, \sigma = 10, b = 8/3$.

Поведение однонаправленно связанных систем Ресслера и Лоренца описывается следующими системами обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= -\alpha(y_1 + z_1), \\ \dot{y}_1 &= \alpha(x_1 + ay_1), \end{aligned} \quad (5)$$

$$\begin{aligned} \dot{z}_1 &= \alpha(p + z_1(x_1 - c)), \\ \dot{x}_2 &= \sigma(y_2 - x_2), \\ \dot{y}_2 &= rx_2 - y_2 - x_2z_2 + \varepsilon y_2, \\ \dot{z}_2 &= -bz_2 + x_2y_2, \end{aligned} \quad (6)$$

где $\alpha = 6, a = 0.2, p = 0.2, c = 5.7, \sigma = 10, r = 28, b = 8/3$.

При выбранных значениях управляющих параметров системы характеризуются аттракторами ленточного типа и аттракторами двойной спирали, то есть являются системами с простой и сложной топологией аттрактора.

Решение систем уравнений (1)-(2), (3)-(4), (5)-(6) осуществлялось численно при помощи метода Рунге-Кутты 4 порядка с шагом $h = 0.001$ [2]. Для этого была написана программа на языке программирования Python [12].

В третьей главе изложены результаты исследования. Для диагностики обобщенной синхронизации, как отмечалось выше, традиционно используется метод вспомогательной системы. Наглядно наличие перемежаемости в данном случае иллюстрирует рисунок 1, на котором приведена временная зависимость разности между состояниями ведомой и вспомогательной систем Ресслера (1)-(2). Видно, что она представляет собой чередования участков с синхронной

(ламинарные фазы) и асинхронной (турбулентные фазы) динамикой, что говорит о режиме перемежаемости.

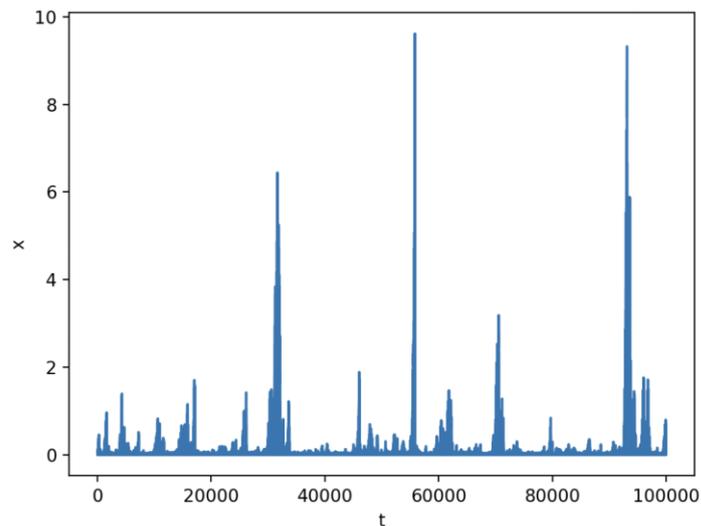


Рисунок 1 – Зависимость $\xi(t)$ модуля разности между состояниями ведомой и вспомогательной систем, рассчитанная для системы (1)-(2) при $\varepsilon = 0.106$. Режим перемежающейся обобщенной синхронизации.

На рисунках 2-3 приведены статистические характеристики перемежаемости, полученные для систем Ресслера (1)-(2) при $\Delta = 0.5$. Видно, что и распределение длительностей ламинарных фаз, и зависимость средней длительности ламинарных фаз от параметра надкритичности $\varepsilon_c - \varepsilon$, где $\varepsilon_c = 0.115$ – порог обобщенной синхронизации, подчиняются степенным законам, характерным для перемежаемости типа «on-off»:

$$N(\tau) \sim \tau^{-3/2} \quad (7)$$

для распределения длительностей ламинарных фаз и

$$T \sim (\varepsilon_c - \varepsilon)^{-1} \quad (8)$$

для зависимости средней длительности ламинарных фаз от параметра надкритичности.

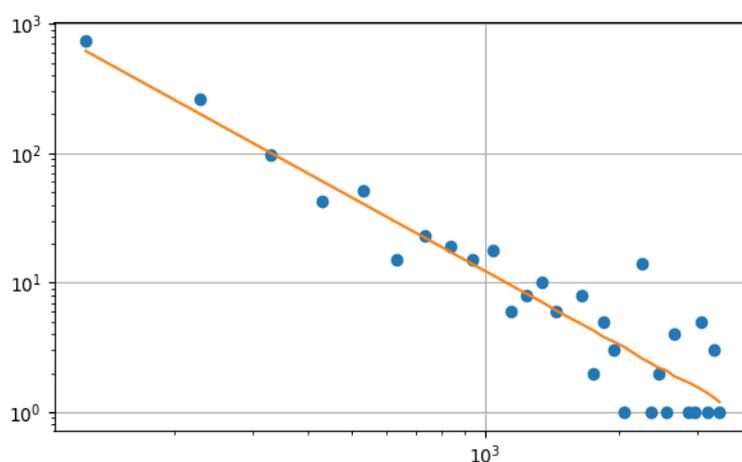


Рисунок 2 – Распределение длительностей ламинарных фаз в системе (1)-(2) при $\varepsilon = 0.106$ и ее аппроксимация степенным законом (7)

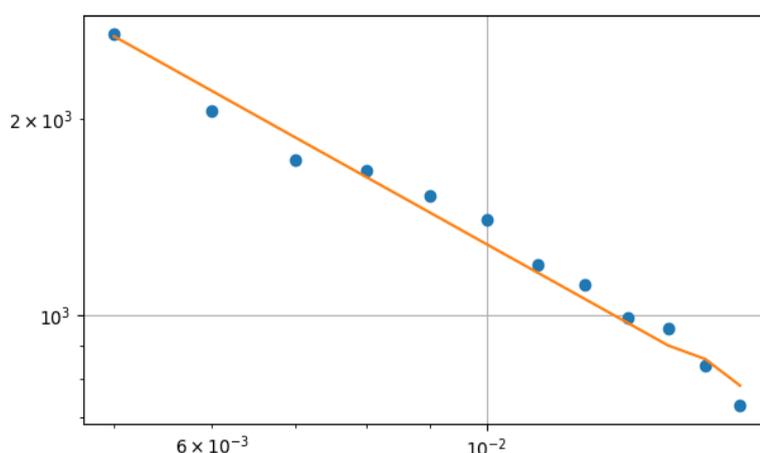
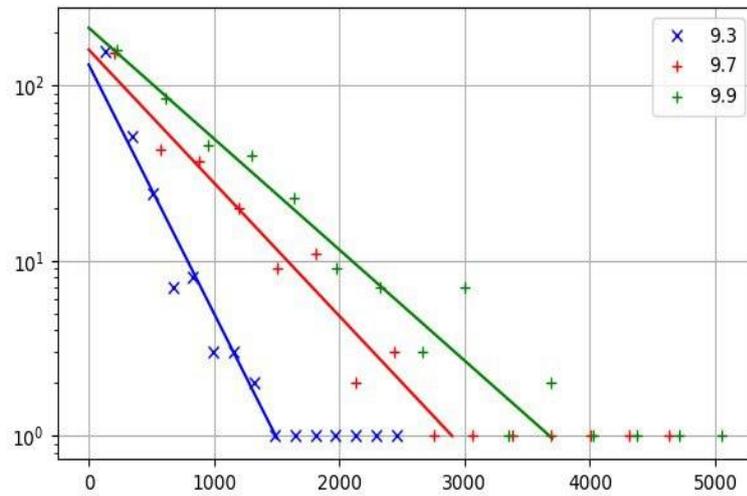


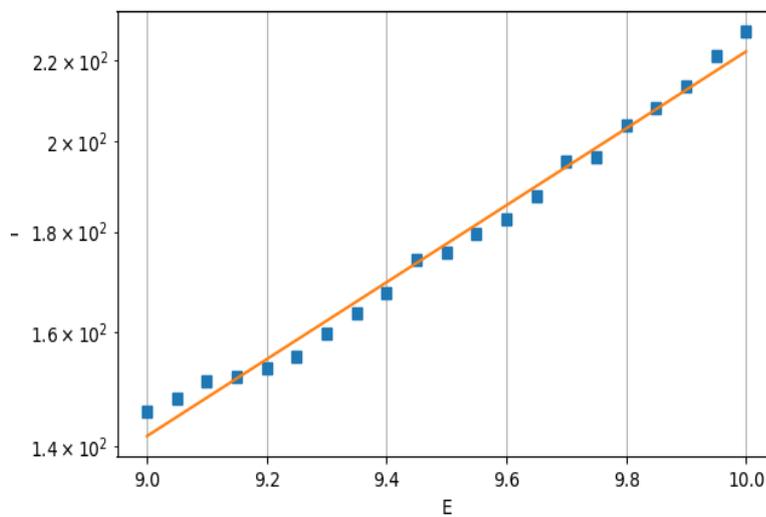
Рисунок 3 – Зависимость средней длительности ламинарных фаз в системе (1)-(2) от параметра надкритичности $\varepsilon_c - \varepsilon$ и ее аппроксимация степенным законом (8), $\varepsilon_c = 0.115$

Для систем с более сложной топологией аттрактора статистические характеристики сильно отличаются. На рисунке 4 представлены распределения длительностей ламинарных фаз и зависимость средней длительности ламинарных фаз от параметра связи, рассчитанные для двух однонаправленно связанных систем Лоренца (3)-(4), и их аппроксимация экспоненциальными (сплошные линии) законами. Видно, что

экспоненциальные закономерности в полной мере удовлетворяют численно полученным результатам. В данном случае имеет место перемежаемость перескоков.



a



б

Рисунок 4 — (а) Распределения длительностей ламинарных фаз, рассчитанные для двух однонаправленно связанных систем Лоренца (3)-(4), и их аппроксимация экспоненциальным законом для фиксированных значений силы связи: $\varepsilon = 9.9$ — плюсы, $\varepsilon = 9.7$ — плюсы, $\varepsilon = 9.3$ — крестики. (б) Средняя длина ламинарных фаз в зависимости от параметра связи ε и ее экспоненциальная аппроксимация

Далее рассмотрим случай воздействия системы Ресслера на систему Лоренца. На рисунках 5-6 приведены статистические характеристики перемежаемости, полученные в данном случае. Видно, что и распределение длительностей ламинарных фаз, и зависимость средней длительности ламинарных фаз от параметра надкритичности $\varepsilon_c - \varepsilon$, где $\varepsilon_c = 7.12$ – порог обобщенной синхронизации, подчиняются степенным законам (7)-(8).

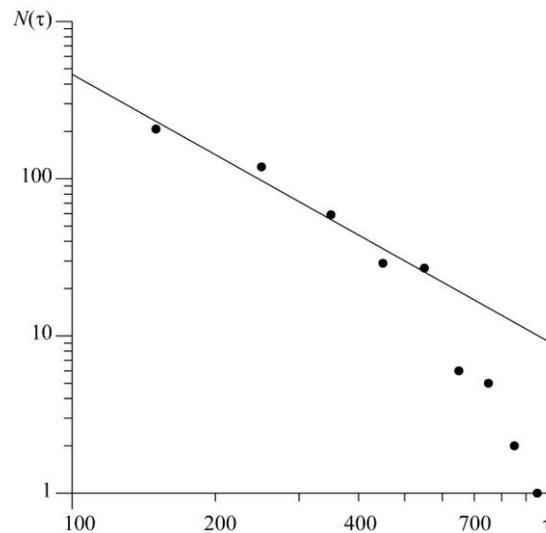


Рисунок 5 – Распределение длительностей ламинарных фаз в системах (5)-(6) при $\varepsilon = 6.6$ и его аппроксимация степенным законом (7)

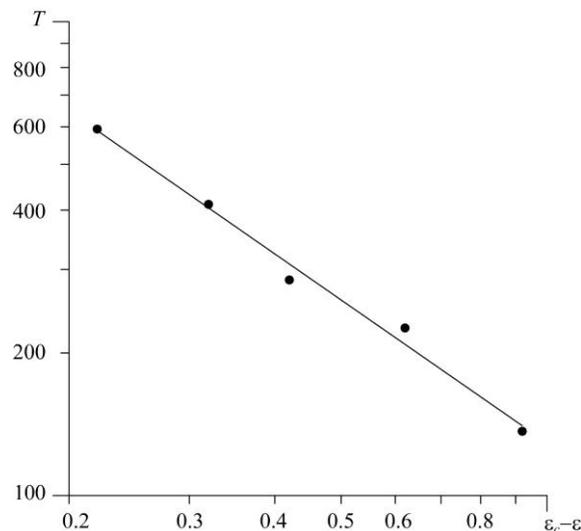


Рисунок 6 – Зависимость средней длительности ламинарных фаз в системах (5)-(6) от параметра надкритичности $\varepsilon_c - \varepsilon$ и ее аппроксимация степенным законом (8), $\varepsilon_c = 7.12$

Заключение

Таким образом, в рамках настоящей магистерской работы проведен анализ эффектов, возникающих при взаимодействии систем с различными типами топологии аттракторов вблизи границы обобщенной синхронизации. Объектом изучения были выбраны однонаправленно связанные системы Ресслера, однонаправленно связанные системы Лоренца, а также однонаправленно связанные системы Ресслера и Лоренца.

Для изучения взаимодействия систем было использовано численное моделирование. Показано, что во всех рассмотренных случаях на границе обобщенной синхронизации происходит чередование синхронных и асинхронных состояний, то есть наблюдается перемежаемость. Рассмотрены статистические характеристики перемежаемости при помощи амплитудного метода, основанного на методе вспомогательной системы. Определен тип перемежаемости, наблюдаемой в данном случае: для систем с простой топологией это перемежаемость типа «on-off»; для систем со сложной топологией — перемежаемость перескоков; для однонаправленно связанных систем с простой и сложной топологией — «on-off»-перемежаемость.

Список литературы

1. Pikovsky A., Rosenblum M., Kurths J. Synchronization: a universal concept in nonlinear sciences. New York: Cambridge University Press (2001) 411 p.
2. Белоглазкина М.В., Егоров Е.Н., Левин Ю.И. Численное решение уравнений. Учебно-методическое пособие. Саратов (2008).
3. N. Platt, E. A. Spiegel, and C. Tresser, Phys. Rev. Lett. 70, 279 (1993).
4. E. Ott and J. C. Sommerer, Phys. Lett. A 188, 39 (1994).
5. Rulkov N.F., Sushchik M.M., Tsimring L.S., Abarbanel H.D.I. Generalized synchronization of chaos in directionally coupled chaotic systems, Phys. Rev. E, 51 (2) (1995) 980-994.
6. Abarbanel H.D.I, Rulkov N.F, Sushchik M.M, Generalized synchronization of chaos: the auxiliary system approach, Phys Rev. E, 53 (1996) 4528-4535.
7. Hramov A.E., Koronovskii A.A., Intermittent generalized synchronization in unidirectionally coupled chaotic oscillators, Europhysics Lett. 70 (2) (2005) 169-175.
8. Короновский А.А., Москаленко О.И., Сельский А.О. Корректность определения характеристик перемежающейся обобщенной синхронизации при использовании только одной переменной ведомой и вспомогательной систем, Письма в ЖТФ 46 (7) (2020) 48–51.
9. Koronovskii A.A., Moskalenko O.I., Pivovarov A.A., Khanadeev V.A., Hramov A.E., Pisarchik A.N. Jump intermittency as a second type of transition to and from generalized synchronization, Phys. Rev. E 102 (2020) 012205
10. Кузнецов С.П. Динамический хаос. М.: Физматлит (2006).
11. Ханадеев В.А., Москаленко О.И., Короновский А.А. Перемежаемость вблизи границы обобщенной синхронизации в системах со сложной топологией аттрактора. Изв. РАН. Сер. физическая. 85, 2 (2021) 265-269.
12. Лутц М. Изучаем Python, том 1, 5-е изд.: Пер. с англ. – СПб.: ООО “Диалектика” (2019).