МИНОБРНАУКИ РОССИИ
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
**«САРАТОВСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ Н.Г. ЧЕРНЫШЕВСКОГО»**

Кафедра теоретических основ компьютерной безопасности и криптографии

# Исследование решёток турниров

АВТОРЕФЕРАТ
дипломной работы

студентки 6 курса 631 группы
специальности 10.05.01 Компьютерная безопасность
факультета компьютерных наук и информационных технологий
Конновой Анны Дмитриевны

Научный руководитель
д. ф.-м. н., доцент ____________ М. Б. Абросимов
22.01.2024 г.

Заведующий кафедрой
д. ф.-м. н., доцент ____________ М. Б. Абросимов
22.01.2024 г.

Саратов 2024

# ВВЕДЕНИЕ

В современном мире существует множество проблем и решений, которые можно представить с помощью теории графов. Графы фигурируют в различных областях, таких как математика, информатика, медицина, биохимия, социология и многих других.

Особенным видом графов являются турниры. Они используются, например, для решения некоторых экономических вопросов, таких как голосование, или для представления спортивного турнира в виде математической модели.

Из множества свойств турнира выделяется то, что для каждого из них может быть построена математическая модель, названная решеткой. Именно решетки турниров являются главным интересом данной работы. Для изучения решеток турниров необходимо было написать программные модули, один из которых позволит визуализировать нужные решетки, а другой анализировать решетки по им характеристикам – высоте, ширине, порядку, а также находить связь этих характеристик с диаметром соответствующего турнира.

Материалы данной работы частично были представлены на итоговой студенческой научной конференции СГУ и опубликованы в ее материалах.

Дипломная работа состоит из введения, 3 разделов, заключения, списка использованных источников и 2 приложений. Общий объем работы – 82 страницы, из них 52 страницы – основное содержание, включая 27 рисунков и 54 таблицы, список использованных источников из 16 наименований.

# КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ

## 1 Общие сведения

Орграфом называется $\vec{G} = (V,\ \alpha)$, где $V$ – конечное непустое множество, а $\alpha\ \subseteq\ V{\times}V$, где элементы $V$ – вершины, элементы отношения смежности $\alpha$ – дуги. Если $(u,\ v) \in \alpha$ – значит, из $u$ в $v$ есть дуга. Если $u = v$, то есть $(u,\ u) \in \alpha$, то дуга называется петлей.

Диграфом или направленным графом называется такой орграф $\vec{G} = (V,\ \alpha)$, у которого отношение смежности антисимметрично, то есть нет встречных дуг помимо петель.

Турниром $\vec{T}$ называется полный диграф, то есть такой орграф, в котором между любыми двумя вершинами существует единственная дуга и есть петля в каждой вершине. При этом при изображении турнира петли обычно опускаются.

Транзитивным называется турнир с транзитивным отношением смежности.

Фактор-графом по заданной эквивалентности $\varepsilon$ на множестве вершин $V$ называют диграф $\vec{G}/\varepsilon$, вершинами которого являются классы эквивалентности отношения $\varepsilon$, при этом из вершины $\varepsilon(u)$ проведена дуга в $\varepsilon(v)$, если $\exists$ вершины $u' \in \varepsilon(u), v' \in \varepsilon(v)$: $(u', v') \in \alpha$.

Конгруэнцией турнира $\vec{T} = (V, \alpha)$ является такая эквивалентность $\Theta$ на множестве его вершин, что фактор-граф по ней является турниром.

Точной (наибольшей) нижней гранью подмножества $S^*$ в упорядоченном множестве $(S, \leq)$ называется наибольший (если он существует) элемент в множестве всех нижних граней для $S^*$.

Точной (наименьшей) верхней гранью подмножества $S^*$ в упорядоченном множестве $(S, \leq)$ называется наименьший (если он существует) элемент в множестве всех верхних граней для $S^*$.

Пусть $(S, \leq)$ – решетка, то есть упорядоченное множество, в котором для любых двух элементов $a, b \in S$ существует точная верхняя и точная нижняя грани.

Известно, что множество всех конгруэнций турнира $\vec{T}$ относительно теоретико-множественного включения образует решетку $Con\,\vec{T}$.

Высотой решетки конгруэнций турнира $Con\,\vec{T}$ назовем количество уровней этой решетки, на которых существует хотя бы одна конгруэнция турнира.

Шириной решетки конгруэнций турнира $Con\,\vec{T}$ назовем максимальное количество конгруэнций турнира на одном уровне из всех уровней этой решетки.

Порядком решетки конгруэнций турнира $Con\,\vec{T}$ назовем суммарное количество конгруэнций турнира на всех уровнях $Con\,\vec{T}$.

Эксцентриситет вершины графа – это наибольшее из расстояний от этой вершины до всех остальных.

Диаметр графа – это наибольший из эксцентриситетов всех его вершин.

## 2 Построение решеток конгруэнций турниров в программном виде

Во втором разделе представлено построение решеток турниров, заданных в нескольких форматах, описаны алгоритмы, использующиеся для этого, а также рассмотрены примеры работы программы, позволяющей визуально изучать решетки турниров.

### 2.1 Алгоритм построения решетки конгруэнций турнира из $n$ вершин

Алгоритм построения решетки конгруэнций турнира из $n$ вершин состоит из следующих основных шагов:

1. На первый уровень решетки записать тождественную конгруэнцию турнира $(\{0\}, \{1\}, \dots, \{n-1\})$.

2. Найти конгруэнции, полученные объединением любых 2-х классов эквивалентности в каждой из конгруэнций турнира предыдущего уровня решетки.

3. Найти среди полученного множества конгруэнции турнира, то есть такие, что фактор-граф по каждой из них является турниром. Соединить родителя с полученными из него потомками ребрами.

4. Продолжить до тех пор, пока не получится универсальная конгруэнция турнира ($\{0, 1, \dots, n-1\}$). Она будет являться последним уровнем решетки.

### 2.2 Алгоритм перевода формата digraph6 в нужное представление

Вход: строка символов таблицы ASCII длины $d$: $c = c[0] \dots c[d-1]$. Числа представлены в десятичной системе счисления.

1. Первый символ $c[0]$ это ‘&’.

2. Количество вершин обозначим n. Второй символ $c[1] = n + 63$.

3. Конвертируем строку $c[2] \dots c[d-1]$ в бинарную строку. Для этого из каждого ASCII-символа вычитаем 63 и дополняем слева до 6 бит.

4. Извлекаем первые $n^2$ бит, которые представляют собой матрицу смежности.

### 2.3 Построение решетки с правильным позиционированием уровней

Одной из задач в построении решетки было определить координаты каждой ее вершины для правильного отображения при визуализации.

Был реализован следующий подход:

1. Установка расстояний между вершинами: задаются значения горизонтального ($x\_spacing$) и вертикального ($y\_spacing$) расстояний между вершинами.

2. Подсчет вершин на каждом уровне: для каждого уровня графа определяется количество вершин. Эта информация используется для центрирования вершин на каждом уровне.

3. Расчет координат каждой вершины:

3.1 Пусть количество вершин на уровне это $k$, индекс вершины на уровне это $l\_i$. Координата по оси $x$ для каждой вершины рассчитывается как

$$-\frac{(k\ -\ 1) * \ x\_spacing}{2} + l\_i * \ x\_spacing \qquad (1)$$

3.2 Координата по оси $y$ для каждой вершины определяется как номер текущего уровня, умноженный на $y\_spacing$.

### 2.4 Программная реализация визуализации решеток турниров

В рамках данной работы был реализован программный модуль на языке Python, который для произвольного турнира или списка турниров из файла позволяет построить и визуализировать соответствующие решетки их конгруэнций.

Интерфейс разделен на два логических блока по варианту построения: «одна решетка», и тогда можно вручную ввести нужный турнир и проанализировать его решетку конгруэнций, и «несколько решеток», в котором можно загрузить файл со списком турниров и увидеть решетки для всех них (рисунок 1).

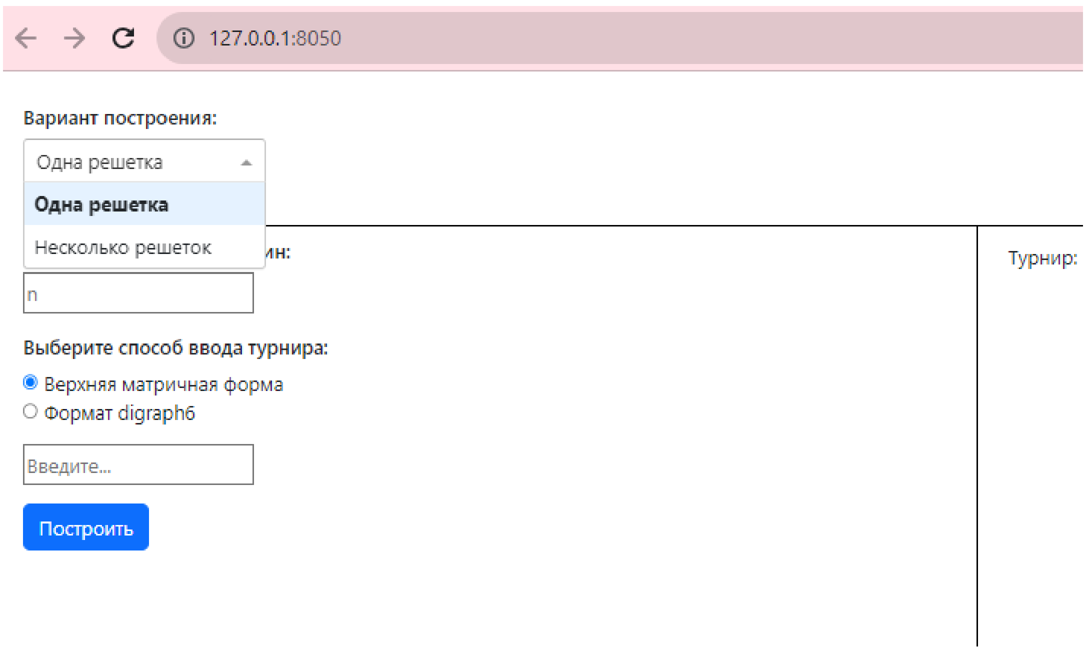


Рисунок 1 – Варианты визуализации

Продемонстрируем программу в обеих режимах: и для одного введенного турнира, и для списка.

Рассмотрим турнир с 5 вершинами: 1101110111. Введем необходимые входные данные в интерфейс программы, как показано на рисунке 2 и нажмем на кнопку построить. Построятся турнир и его решетка конгруэнций, а в левом нижнем углу отобразятся характеристики этой решетки.

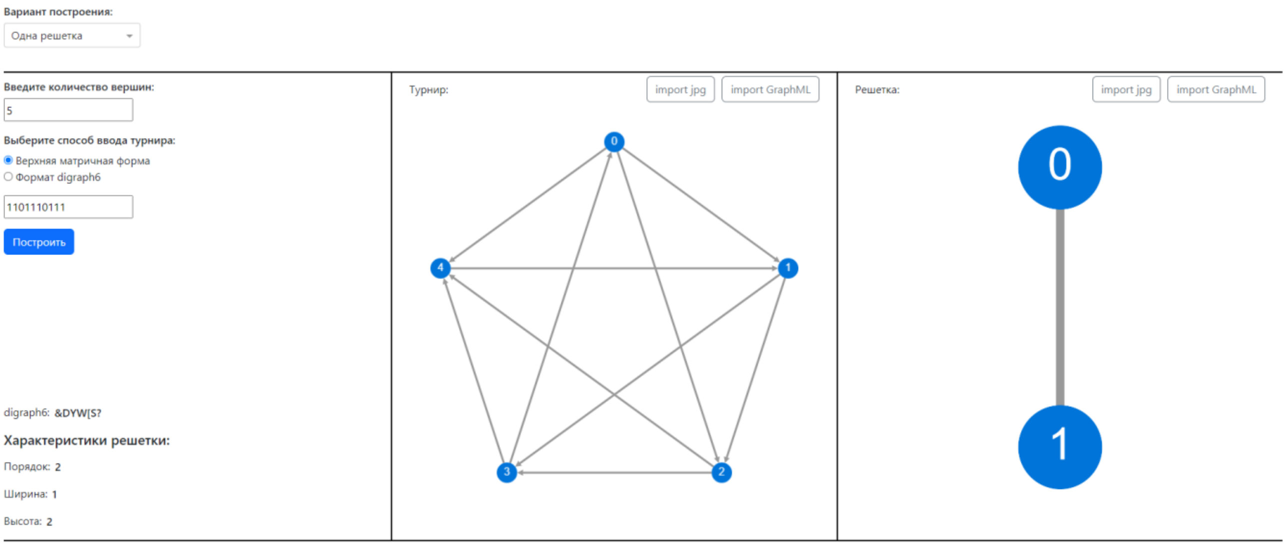


Рисунок 2 – Решетка для турнира 1101110111

Конгруэнции можно увидеть, нажав на вершину решетки, как показано на рисунке 3.

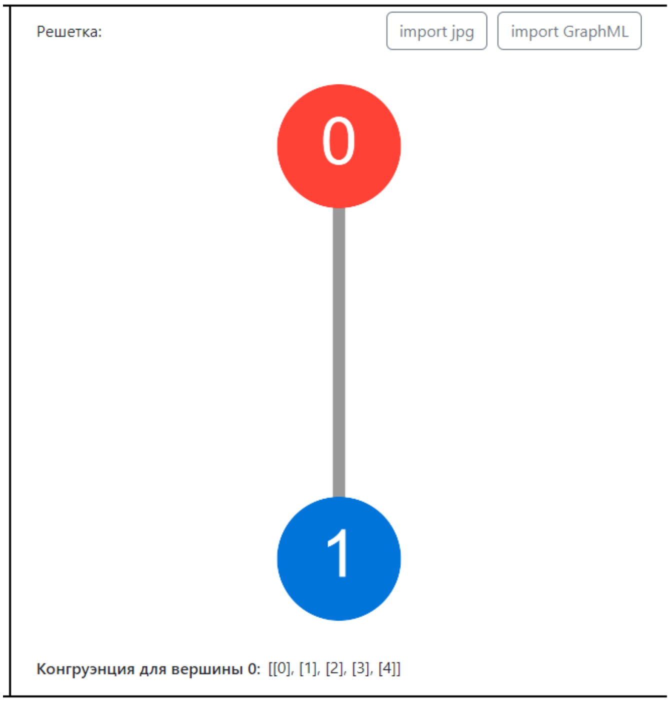


Рисунок 3 – Пример выделенной конгруэнции решетки

Посмотрим теперь на построение сразу нескольких решеток для списка турниров. Будем рассматривать файл с турнирами из 6 вершин. После окончания обработки файла на экране показывается галерея турниров и их решеток, которые можно перелистывать (рисунки 4 и 5).

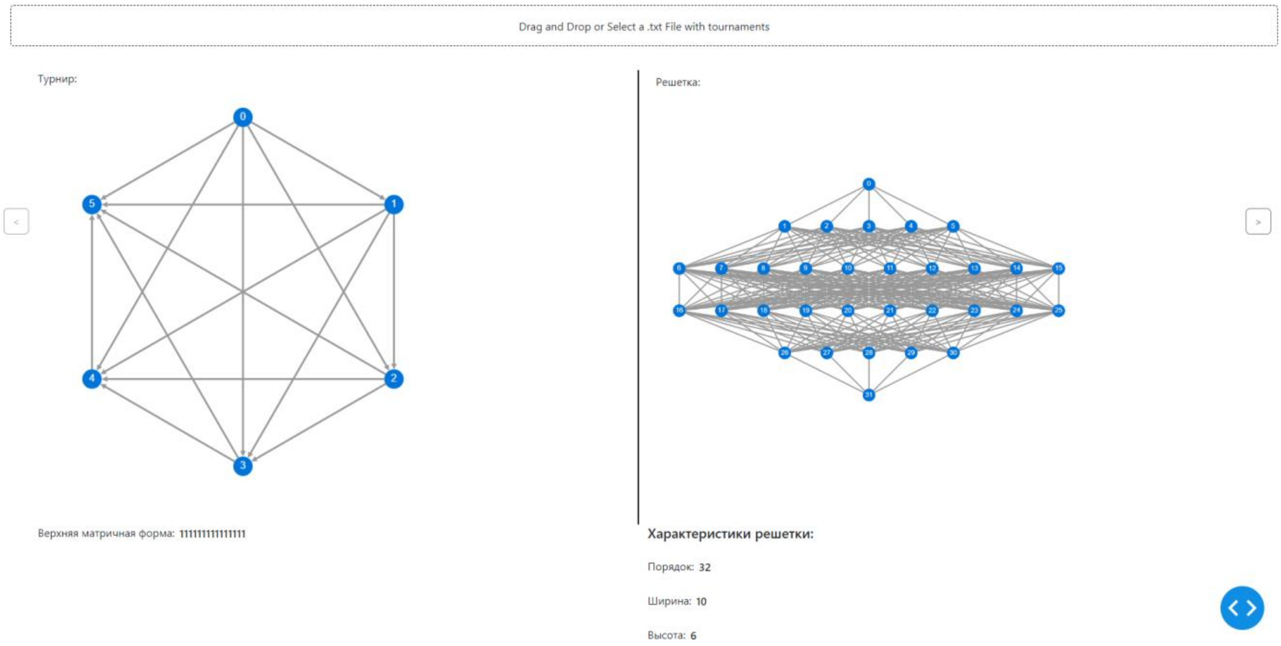


Рисунок 4 – Галерея 6-вершинных турниров

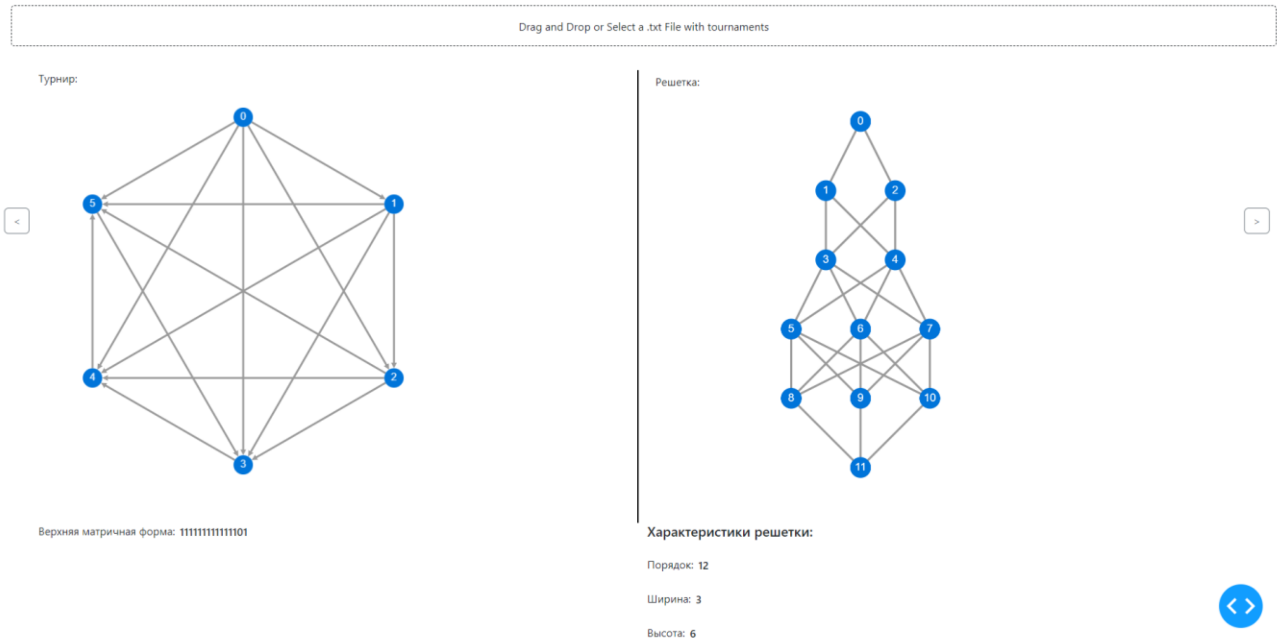


Рисунок 5 – Галерея 6-вершинных турниров

## 3 Статистическое исследование

Результатом раздела 3 являются статистические данные о решетках конгруэнций турниров в целом и некоторых их отдельных подклассов.

### 3.1 Получение общих данных

Для исследования решеток конгруэнций турниров был написан программный модуль, не имеющий никакого интерфейса и не строящий никакого визуального представления этих решеток, но подсчитывающий для каждой из них высоту, ширину и порядок, а также определяющий диаметр турнира для определения зависимостей между ним и характеристиками решетки. Помимо этого, программа подсчитывает количество решеток со всеми возможными парами характеристик и находит среди них статистически экстремальные решетки. Также подсчитывается количество турниров с определенным диаметром, чья решетка имеет определенные значения высоты, ширины и порядка.

Далее представлено несколько таблиц, отображающих некоторые из полученных результатов.

Таблица 1 – Высота и ширина решеток для турниров с 7 вершинами

| | | Ширина | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | | 1 | 2 | 3 | 6 | 20 |
| Высота | 2 | 197 | | | | |
| | 3 | 130 | | | | |
| | 4 | 23 | 37 | | | |
| | 5 | 8 | 10 | | | |
| | 6 | 4 | 18 | 8 | 5 | |
| | 7 | | 2 | 8 | 5 | 1 |

Таблица 2 – Ширина и порядок решеток для турниров с 6 вершинами

| | | Порядок | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 8 | 9 | 10 | 12 | 32 |
| Ширина | 1 | 15 | 17 | 5 | 2 | | | | | | |
| | 2 | | | | 1 | 5 | 2 | | | | |
| | 3 | | | | | | | 4 | 2 | 2 | |
| | 10 | | | | | | | | | | 1 |

Таблица 3 – Порядок и высота решеток для турниров с 6 вершинами

| | | Высота | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
| Порядок | 2 | 15 | | | | |
| | 3 | | 17 | | | |
| | 4 | | | 5 | | |
| | 5 | | | 1 | 2 | |
| | 6 | | | | 5 | |
| | 8 | | | | | 2 |
| | 9 | | | | 4 | |
| | 10 | | | | | 2 |
| | 12 | | | | | 2 |
| | 32 | | | | | 1 |

Таблица 4 – Диаметр турниров с 8 вершинами и высота решеток

| | | Высота | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
| Диаметр | ∞ | | 394 | 215 | 119 | 41 | 52 | 51 |
| | 2 | 378 | 17 | | | | | |
| | 3 | 2927 | 1113 | 273 | 78 | 17 | 43 | |
| | 4 | 630 | 285 | 57 | 55 | | | |
| | 5 | 66 | 34 | 21 | | | | |
| | 6 | 6 | 7 | | | | | |
| | 7 | 1 | | | | | | |

### 3.2 Теоретические результаты исследования турниров

В данном разделе сформулированы наблюдения на основании результатов, представленных в предыдущем разделе.

**Предложение 1.** Высота решетки транзитивного $n$-вершинного турнира равняется $n$.

**Предложение 2.** Количество элементов в решетке транзитивного $n$-вершинного турнира равняется $2^{n-1}$.

**Гипотеза 1.** Количество элементов в решетке транзитивного $n$-вершинного турнира является наибольшим среди всех решеток $n$-вершинных турниров.

**Гипотеза 2.** Ширина решетки конгруэнций транзитивного турнира максимальна и равна:

$$\begin{cases} \binom{n}{\frac{n}{2}}, \text{если } n \text{ четное} \\ \binom{n}{\frac{n-1}{2}}, \text{если } n \text{ нечетное} \end{cases} \tag{2}$$

**Гипотеза 3.** Не существует конгруэнций турниров высотой $n$ и шириной 1.

**Гипотеза 4.** Для турнира с количеством вершин $n$ больше 5 для всех значений высоты $\mathrm{h} \in [2,\ n-1]$ существуют решетки, чей порядок равен $\mathrm{h}$, то есть высота равна порядку.

**Наблюдение 1**. При $n > 3$ турниры, решетка которых имеет ширину, равную 1 и порядок, равный $n - 1$, принимают значения диаметра из множества $[3, \infty]$.

**Наблюдение 2**. При $n > 4$ количество турниров, решетка которых имеет высоту, равную $n$ и порядок, равный $\frac{3*2^{n-3}}{2}$ равно 2.

# ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В данной работе были рассмотрены и исследованы решетки конгруэнций турниров. Были написаны программные модули на языке Python, позволившие визуализировать необходимые решетки, а также посчитать и проанализировать некоторые их характеристики.

По результатам анализа оказалось, что турнирами, имеющими наибольшие подсчитанные характеристики, являются транзитивные турниры. Для этих видов турниров на основании вычислительных экспериментов удалось сформулировать и доказать несколько предложений. Первое касается высоты решетки $n$-вершинного транзитивного турнира, второе описывает количество элементов в решетке транзитивного $n$-вершинного турнира. Также на основании полученных результатов были сформулированы 4 гипотезы и 2 наблюдения. Первая гипотеза о количестве элементов в решетке транзитивного $n$-вершинного турнира, вторая о ширине решетки транзитивного турнира, а две другие относятся к другим классам турниров, также как и наблюдения.