

МИНОБРНАУКИ РОССИИ
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«САРАТОВСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ИМЕНИ Н. Г. ЧЕРНЫШЕВСКОГО»

Кафедра системного анализа и
автоматического управления

**ИССЛЕДОВАНИЕ СЕТИ МАССОВОГО ОБСЛУЖИВАНИЯ С
ОПТИМАЛЬНЫМ УПРАВЛЕНИЕМ ПОТОКОМ**
АВТОРЕФЕРАТ БАКАЛАВРСКОЙ РАБОТЫ

студентки 4 курса 481 группы
направления 27.03.03 — Системный анализ и управление
факультета КНиИТ
Ивановой Екатерины Сергеевны

Научный руководитель
старший преподаватель

И. А. Люкшин

Заведующий кафедрой
к. ф.-м. н., доцент

И. Е. Тананко

Саратов 2024

ВВЕДЕНИЕ

Актуальность темы. Теория массового обслуживания является областью прикладной математики, связанной с построением и исследованием математических моделей определенного класса дискретных систем со стохастическим характером функционирования. Как и все математические модели, системы и сети массового обслуживания отображают моделируемые системы и сети обслуживания с некоторым уровнем детализации, который определяет адекватность моделей моделируемым системам и точность результатов исследования систем и сетей обслуживания с использованием соответствующих математических моделей.

Основными характеристиками систем и сетей массового обслуживания (СМО и СеМО) являются распределения вероятностей их состояний. В задачах, связанных с изучением переходных режимов эволюции систем и сетей, одной из целей является определение этих вероятностей как функций времени.

Успешное применение сетей массового обслуживания различных типов в качестве математических моделей для анализа дискретных систем с сетевой структурой и стохастическим характером функционирования, стимулирует дальнейшее активное развитие теории сетей массового обслуживания, методов решения задач их анализа, проектирования и оптимизации, а также методологии моделирования дискретных систем с использованием сетей массового обслуживания.

Управление потоком – это метод регулирования объёма данных, отправляемых по сети связи, который помогает предотвратить перегрузку сети и обеспечивает эффективную передачу данных. Управление потоком не является универсальным решением проблем перегрузки и должно сочетаться с другими методами для обеспечения оптимальной производительности сети. Вопрос управления потоком возникает, когда имеется ограничение на скорость передачи данных между двумя точками вследствие ограниченной пропускной способности узла обработки. Таким образом, схема управления потоком может потребоваться на участках передачи между системами сети или между внешним источником и системой сети. Оптимальное управление потоком – стратегия управления потоками требований с целью максимизации и минимизации различных параметров.

Для эффективного решения задач оптимизации, связанных с оптимальным управлением потоком, широкого класса дискретных систем с сетевой структурой и стохастическим характером функционирования в настоящее время широко применяются и достигают успеха сети массового обслуживания различных классов в качестве их математических моделей. Задачи, направленные на оптимальное управление потоком, позволяют эффективнее расходовать ресурсы и передавать данные, а также предотвратить перегрузку сети.

Цель бакалаврской работы – исследование сети массового обслуживания с оптимальным управлением потоком.

Поставленная цель определила **следующие задачи**:

1. Изучение теории, связанной с оптимальным управлением потоком;
2. Реализация метода для нахождения вектора относительных интенсивностей потоков требований, обеспечивающего выполнение заданных условий оптимальности функционирования сетей обслуживания;
3. Реализация метода для нахождения оптимальной маршрутной матрицы с заданным вектором относительных интенсивностей потоков;
4. Проведение исследования путем анализ результатов при различных входных параметрах.

Методологические основы оптимального управления потоком представлены в работах И. Е. Тананко [1-2], В. Н. Задорожный [3].

Практическая значимость бакалаврской работы. В ходе выполнения выпускной квалификационной работы было разработано приложение, цель которого заключается в исследовании и оптимизации управления потоком требований, с помощью которого можно оптимизировать относительную интенсивность входящего потока и маршрутную матрицу сети массового обслуживания.

Структура и объем работы. Бакалаврская работа состоит из введения, 4 разделов, заключения, списка использованных источников и приложения. Общий объем работы — 62 страницы, из них 41 страница — основное содержание, включая 16 рисунков и 5 таблиц, список использованных источников информации — 21 наименование.

КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Первый раздел «Теория массового обслуживания» посвящен описанию основных понятий теории массового обслуживания.

Теория массового обслуживания является областью прикладной математики, которая связана с построением и исследованием математических моделей, описывающих стохастические процессы в функционировании систем. Она основана на анализе потоков требований, поступающих на обслуживание, длительности нахождения требований в очереди и на обслуживании и длине очереди.

В подразделе 1.1 представлено определение и основные характеристики систем массового обслуживания, включая описание потоков требований, их классификацию и основные параметры систем [4-6].

Система массового обслуживания — это математическая модель, задача которой заключается в обслуживании поступающих в систему объектов, называемых требованиями, при этом процессы поступления требований в систему и их обслуживания являются в общем случае случайными.

Подраздел 1.1.2 рассматривает простейшую систему массового обслуживания типа $M/M/1$, обсуждаются ключевые параметры и режимы функционирования системы, приводятся математические формулы для расчета значений различных характеристик.

Система массового обслуживания типа $M/M/1$ — открытая одноприборная система массового обслуживания с ожиданием, в которую поступает пуассоновский входящий поток требований, и в которой длительности обслуживания требований являются непрерывными случайными величинами с экспоненциальным распределением. Очередь в данной системе имеет бесконечную длину, число требований, поступающих в систему, неограничено.

В подразделе 1.2 описываются сети массового обслуживания, их классификация, основные параметры и характеристики [7-8].

Сеть массового обслуживания представляет собой совокупность взаимосвязанных систем массового обслуживания, обеспечивающих в процессе функционирования сети прием, хранение, обработку и выдачу требований, поступающих в системы обслуживания.

В подразделе 1.2.1 приводится описание открытой сети массового обслуживания с системами типа $M/M/1$.

Второй раздел «Метод оптимального управления потоком в открытой СеМО» посвящен рассмотрению метода оптимального управления потоком в открытых сетях массового обслуживания [9].

В подразделе 2.1 рассматривается постановка задачи оптимального управления потоком в открытых экспоненциальных сетях массового обслуживания, описывая параметры и математические модели для определения оптимальной маршрутной матрицы и векторов интенсивностей потоков.

Подраздел 2.2 посвящен процессу формирования вектора относительных интенсивностей потоков требований. Для оптимизации управления потоками используется метод множителей Лагранжа, позволяющий найти экстремумы при обеспечении стационарного режима.

При использовании этого метода решаются две задачи. Первая из них состоит в определении вектора относительных интенсивностей потоков требований в сети, удовлетворяющего заданным критериям оптимизации. Это означает, что необходимо определить, какие потоки данных в сети требуют более высокого приоритета или большей пропускной способности, чтобы удовлетворить требованиям пользователей или оптимизировать производительность системы. Формула для вычисления суммарного дохода сети представлена в формуле 1. Вторая задача связана с формированием маршрутной матрицы сети, соответствующей заданному вектору относительных интенсивностей потоков. Это включает в себя определение оптимальных путей для каждого потока данных в сети, чтобы минимизировать заданные критерии, такие как задержка, потери требований или загрузка сети. Формирование маршрутной матрицы позволяет эффективно маршрутизировать данные и оптимизировать использование доступных ресурсов. Формула для вычисления математического ожидания длительности пребывания требований в сети представлена в формуле 2.

Суммарный доход $S(\lambda)$ сети обслуживания Γ в единицу времени вычисляется по формуле:

$$S(\lambda) = \sum_{i=1}^L \varphi_i(\lambda_i), \quad (1)$$

$$\varphi_i(\lambda_i) = d_i \lambda_i + r_i, \quad d_i > 0, \quad r_i \geq 0, \quad i = 1, \dots, L.$$

Математическое ожидание длительности пребывания требований в сети $\bar{\tau}_0(\lambda)$:

$$\bar{\tau}_0(\lambda) = \frac{1}{\lambda_0} \sum_{i=1}^L \frac{\lambda_i}{(\mu_i - \lambda_i)}. \quad (2)$$

Подраздел 2.3 описывает процесс формирования оптимальной маршрутной матрицы, основанный на методе спуска, для решения задач минимизации и оптимизации маршрутизации в сети. Кратко, данный цикл описывается следующими шагами:

1. Формирование набора матриц направлений β , каждая из которых содержит два ненулевых элемента в одной строке: один элемент равен 1, а другой, соответственно, -1. Все остальные элементы матрицы имеют нулевые значения.
2. Вычисление множества возмущений \mathcal{V} , которое напрямую зависит от набора матриц направлений β и параметра γ , обозначающего шаг вычислений. Вычисление происходит путем произведения вышеупомянутых значений.
3. Получение набора матриц Θ происходит путем сложения соответствующих матриц из набора \mathcal{V} и набора матриц Θ с предыдущего шага. Начальная матрица Θ задается по формуле 3.
4. Создание вектора, состоящего из значений функции $V(\Theta)$, которая определяет оптимальность матрицы для каждой матрицы из набора Θ . Функция $V(\Theta)$ вычисляется по формуле 4.

$$\theta_{ij}^{(0,0)} = \begin{cases} 1/q_i, & h_{ij} = 1, \\ 0, & h_{ij} = 0. \end{cases} \quad (3)$$

$$V(\Theta) = \sum_{i=0}^L \left(\omega_i - \sum_{j=0}^L \omega_j \theta_{ji} \right)^2. \quad (4)$$

Данный цикл будет продолжаться до тех пор, пока не достигнет одного из следующих критериев: достижение установленной минимальной точности ϵ вычисленного значения, либо когда предполагаемое оптимальное значение превышает значение предыдущего шага, что указывает на отсутствие дальнейшей эффективности алгоритма.

Третий раздел «Реализация алгоритма оптимального управления потоком» описывает разработанное программное решение, разработанное на языке программирования C# [10], которое позволяет эффективно управлять потоками требований, вычисляя оптимальные значения исходя из входных параметров. Программа осуществляет расчеты для оптимизации маршрутов и вычисления интенсивностей, обеспечивая гибкую настройку и легкость интерпретации результатов через пользовательский интерфейс, представленный на рисунке 1.

Оптимизация маршрутных матриц

Введите параметры сети:

Число систем в сети:	<input type="text" value="3"/>	Введите вектор μ :	<input type="text" value="1,1"/>	<input type="text" value="0,9"/>	<input type="text" value="1,2"/>
Интенсивность входящего потока λ_0 :	<input type="text" value="1"/>	Введите вектор d :	<input type="text" value="1"/>	<input type="text" value="0,9"/>	<input type="text" value="1,1"/>
F в интервале: $3,242 < F < 6,030$:	<input type="text" value="5"/>	Введите вектор g :	<input type="text" value="1,1"/>	<input type="text" value="1,0"/>	<input type="text" value="0,7"/>

Введите матрицу переходов (0 или 1):

<input type="text" value="0"/>	<input type="text" value="1"/>	<input type="text" value="0"/>	<input type="text" value="1"/>
<input type="text" value="1"/>	<input type="text" value="0"/>	<input type="text" value="1"/>	<input type="text" value="0"/>
<input type="text" value="1"/>	<input type="text" value="1"/>	<input type="text" value="0"/>	<input type="text" value="0"/>
<input type="text" value="1"/>	<input type="text" value="1"/>	<input type="text" value="0"/>	<input type="text" value="0"/>

Вычислить

Вектор относительных интенсивностей:

[0,315 0,237 0,179 0,269]

Оптимизированная матрица (Tetta):

0,000	0,147	0,000	0,853
0,245	0,000	0,755	0,000
0,501	0,499	0,000	0,000
0,623	0,377	0,000	0,000

Рисунок 1 – Пользовательский интерфейс приложения

Основными аспектами разработки являются: язык программирования C#, который предлагает мощные инструменты для разработки и поддержки сложных алгоритмов обработки данных; платформа Windows Presentation Foundation (WPF), обеспечивающая гибкость и мощные возможности для создания настольных приложений с удобным в использовании пользователь-

ским интерфейсом.

Функциональной возможностью данного приложения является подсчет вектора относительных интенсивностей и оптимальной маршрутной матрицы. Итоговые значения позволяют пользователям настроить вычислительный процесс в соответствии с их потребностями.

Входными параметрами для приложения являются: количество систем в сети; интенсивность входящего потока в источник λ_0 ; вектор интенсивностей обслуживания требований, представляющая собой ввод значений относительной интенсивности обслуживания каждой из систем; векторы μ , d , r , которые настраивают различные аспекты прохождения через систему, включая временные и ресурсные ограничения; значение F – минимальный суммарный доход сети обслуживания в единицу времени, значение необходимо выбирать из сформированного диапазона значений; матрица переходов, которая показывает о существовании связей между системами, учитывая отсутствие петель сети, отражаемое в виде нулей на главной диагонали матрицы. Форма для ввода параметров представлена на рисунке 2.

Введите параметры сети:

Число систем в сети:	<input type="text" value="3"/>	Введите вектор μ :	<input type="text" value="2,1"/>	<input type="text" value="1,8"/>	<input type="text" value="3,7"/>
Интенсивность входящего потока λ_0 :	<input type="text" value="1"/>	Введите вектор d :	<input type="text" value="1"/>	<input type="text" value="1"/>	<input type="text" value="1"/>
F в интервале: $1,575 < F < 7,900$:	<input type="text" value="5"/>	Введите вектор r :	<input type="text" value="0,1"/>	<input type="text" value="0,1"/>	<input type="text" value="0,1"/>

Введите матрицу переходов (0 или 1):

<input type="text" value="0"/>	<input type="text" value="1"/>	<input type="text" value="0"/>	<input type="text" value="1"/>
<input type="text" value="0"/>	<input type="text" value="0"/>	<input type="text" value="1"/>	<input type="text" value="0"/>
<input type="text" value="1"/>	<input type="text" value="1"/>	<input type="text" value="0"/>	<input type="text" value="0"/>
<input type="text" value="0"/>	<input type="text" value="1"/>	<input type="text" value="1"/>	<input type="text" value="0"/>

Рисунок 2 – Интерфейс ввода параметров

Выходными параметрами приложения являются: диапазон возможных значений для ограничений F на минимальное значение математического ожидания прибыли сети; вектор относительных интенсивностей при решении поставленной задачи; оптимальная маршрутная матрица. Интерфейс выходных параметров сети в приложении представлен в соответствии с иллюстрацией,

изображенной на рисунке 3. С использованием данного интерфейса пользователи могут легко интерпретировать результаты и принимать информированные решения.

Вектор относительных интенсивностей:

[0,175 0,212 0,171 0,442]

Оптимизированная матрица (Tetta):

0,000	0,002	0,000	0,998
0,000	0,000	1,000	0,000
0,998	0,002	0,000	0,000
0,000	0,786	0,214	0,000

Рисунок 3 – Интерфейс вывода результатов

Четвертый раздел «Исследование задач оптимизации» описывает анализ сети массового обслуживания с целью минимизации длительности пребывания требований при заданных ограничениях на доход сети.

Исследование задач оптимизации необходимо начинать с определения типа сети. Пусть задана открытая экспоненциальная сеть массового обслуживания Γ , содержащая в себе источник требований, а также системы типа $M/M/1$ – системы, имеющие 1 обслуживающий прибор, интенсивность входящего потока имеет пуассоновское распределение с параметром λ , а интенсивность обслуживания – экспоненциальное с параметром μ . Основными параметрами для исследования являются: число систем в сети L , интенсивность входящего потока в источник λ_0 , вектор интенсивности обслуживания μ , а также векторы d и r , необходимые для подсчета прибыли в каждой из систем, и матрица H , определяющая топологию сети.

Подраздел 4.1 содержит рассмотрение примеров, используя разные входные параметры, и анализ результатов, путем вычислений и экспериментов выявляются закономерности, такие как уменьшение интенсивности входящего потока в источник при увеличении минимального допустимого значения дохода сети, а также увеличение этой интенсивности в остальных системах при увеличении дохода. Эти изменения позволяют оптимизировать распределение требований по системе и достичь необходимого уровня прибыли. Результаты исследования подтверждаются графиками зависимостей параметров от минимального допустимого значения дохода.

Переходя от общего описания к конкретным примерам, рассмотрим пример, представленный в работе.

Рассматривается открытая сеть массового обслуживания Γ , состоящая из систем типа $M/M/1$ со следующими входными параметрами:

$$L = 5,$$

$$\lambda_0 = 1,$$

$$\mu = (1.0, 1.5, 1.3, 1.1, 1.4),$$

$$d = (1, 1, 1, 1, 1),$$

$$r = (0.1, 0.1, 0.1, 0.1, 0.1),$$

$$H = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Граф, построенный на основе матрицы смежностей, способствует визуальному выявлению и упрощенному анализу топологии сети. Граф, иллюстрирующий взаимодействие систем сети Γ , представлен на рисунке 4.

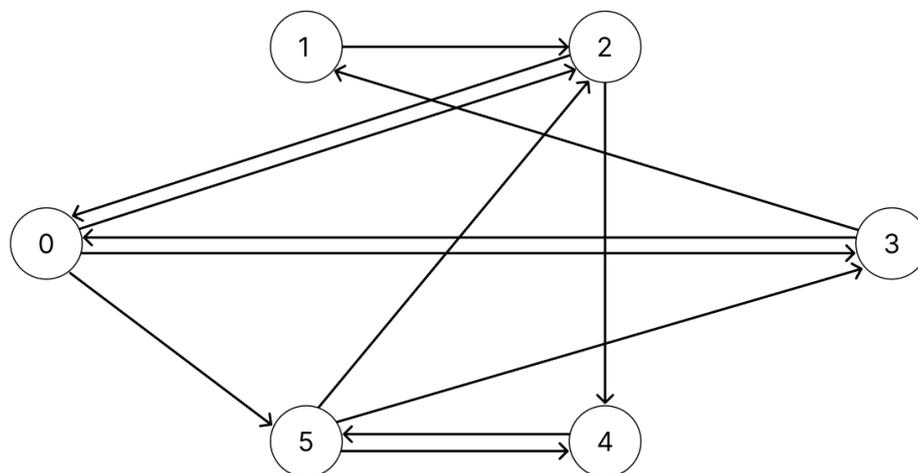


Рисунок 4 – Топология сети Γ

В ходе исследования найдены следующие закономерности:

1. Проведено исследование интенсивности входящего потока в источник. При исследовании были рассмотрены допустимые значения для F , которые необходимы для вычисления ω_0 . Было выявлено, что интенсивность входящего потока в источник снижается при увеличении минимально

допустимого значения дохода сети. Вследствие уменьшения ω_0 требования распределяются по сети и реже покидают её, поскольку интенсивность входящего потока в остальные системы сети увеличивается.

2. При исследовании интенсивности входящего потока в системы, отличные от источника, рассматривались допустимые значения для F , которые необходимы для вычисления $\omega_i, i = 1, \dots, 5$. Значения относительных интенсивностей входящего потока в системы, отличные от источника, увеличиваются с ростом F . Вследствие увеличения ω_i требования распределяются по сети и реже покидают её, поскольку интенсивность входящего потока в системы сети, отличные от источника, увеличивается.
3. Анализ вероятностей переходов в источник из смежных системы производился путем рассмотрения допустимых значений для F , вычисляя θ_{20} и θ_{30} . Вероятности переходов в источник из системы C_2 не изменяется или уменьшается с медленной скоростью, имея значение, приближенное к единице. Вероятности переходов из системы C_3 при минимально возможном значении F имеет значение, приближенное к единице, после достижения значения $F = 2.5$ – начинает значительно уменьшаться. Это происходит из-за того, что для достижения минимально необходимого дохода возникает необходимость задерживать требования в сети, распределяя их по системам, пренебрегая временными затратами.

Относительные интенсивности входящего потока в системы сети, отличные от источника, увеличивается с увеличением минимально допустимого значения прибыли сети, а в источник – уменьшается. Это обусловлено тем, что для того, чтобы прибыль сети увеличивалась, требования могли распределиться по системам сети и реже ее покидать. Закономерность, связанная с уменьшением вероятностей перехода из систем сети в источник, объясняется распределением требований по сети, что позволяет достичь необходимого уровня прибыли. Также рассмотрим скорость увеличения значений ω_i при увеличении F . Можно заметить, что ω_i значительно медленнее увеличиваются в тех системах, из которых затем происходит переход в источник. Обратив внимание на θ_{ij} , имеющие значения 0,998, можно сделать вывод о том, что данные значения не изменяются на протяжении нескольких шагов, так как поток до определенного момента стремится только выходить в источник.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В результате выполнения данной выпускной квалификационной работы были рассмотрены виды систем массового обслуживания, классификация и основные характеристики сетей массового обслуживания, а также дисциплины обслуживания. Кроме того, была представлена информация об управлении потоком требований. Также были описаны используемые для проведения исследования алгоритмы, позволяющие оптимизировать управление потоком. В ходе работы разработано приложение, позволяющее оптимизировать относительные интенсивности входящего потока и маршрутную матрицу сети массового обслуживания на языке программирования C#. Наибольшее внимание было уделено исследованию результатов, полученных в результате разработанных методов, путем рассмотрения различных вариантов входных параметров.

Основные источники информации:

1. Тананко, И. Е. Метод оптимального управления маршрутизацией в сетях массового обслуживания с переменной конфигурацией / И. Е. Тананко // Автоматика и вычислительная техника. — 2006. — №3 — С. 71-77.
2. Тананко, И. Е. Метод оптимизации маршрутных матриц открытых сетей массового обслуживания / И. Е. Тананко // Автоматика и вычислительная техника. — 2002. — №4 — С. 39-46.
3. Задорожный, В. Н. Оптимизация маршрутных матриц в сетях с очередями / В. Н. Задорожный // Омск: Омский научный вестник, 2016. — 152-157 с.
4. Клейнрок, Л. Теория массового обслуживания: Учебник / Л. Клейнрок. — М.: Машиностроение, 1979. — 432 с.
5. Гнеденко, Б. В. Введение в теорию массового обслуживания / Б. В. Гнеденко, И. Н. Коваленко. — М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1966. — 431 с.
6. Митрофанов, Ю. И. Анализ систем массового обслуживания: Учебно-методическое пособие / Ю. И. Митрофанов, Е. С. Рогачко, Н. П. Фокина. — Саратов: Издательство «Научная книга», 2009. — 59 с.
7. Бертсекас, Д. Сети передачи данных: Пер. с англ. / Д. Бертсекас, Р. Галлагер. — М.: Мир, 1989. — 544 с.
8. Башарин, Г. П. Анализ очередей в вычислительных сетях. Теория и методы расчета / Г. П. Башарин, П. П. Бочаров, Я. А. Коган. — М.: Наука.

Гл. ред. физ.-мат. лит., 1989. — 319 с.

9. Hsiao, M.-T. T. Optimal decentralized flow control of Markovian queueing networks with multiple controllers / M.-T. T. Hsiao, A. A. Lazar // Performance Evaluation. — 1991. — N. 13. — P. 181-204.
10. Прайс, М. С# 10 и .NET 6. Современная кросс-платформенная разработка / М. Прайс. — СПб.: Питер, 2023. — 848с.