

МИНОБРНАУКИ РОССИИ  
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение  
высшего образования  
«САРАТОВСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ  
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ  
ИМЕНИ Н. Г. ЧЕРНЫШЕВСКОГО»

Кафедра системного анализа и  
автоматического управления

**МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ СЕТИ ПЕРЕДАЧИ ДАННЫХ  
С УПРАВЛЕНИЕМ ВХОДЯЩИМ ПОТОКОМ**  
АВТОРЕФЕРАТ БАКАЛАВРСКОЙ РАБОТЫ

студента 4 курса 481 группы  
направления 27.03.03 — Системный анализ и управление  
факультета КНиИТ  
Оглоблиной Анны Анатольевны

Научный руководитель  
к. ф.-м. н., доцент

\_\_\_\_\_

И. Е. Тананко

Заведующий кафедрой  
к. ф.-м. н., доцент

\_\_\_\_\_

И. Е. Тананко

Саратов 2024

## ВВЕДЕНИЕ

**Актуальность темы.** Результаты теории систем массового обслуживания, методов их анализа и оптимизации используются для решения прикладных задач исследования, оптимизации и проектирования дискретных стохастических систем с образованием очередей.

Одним из центральных вопросов при разработке протоколов связи для компьютерных сетей является спецификация алгоритмов управления потоком. Предотвращение снижения производительности из-за перегрузки, предотвращение взаимоблокировок и справедливое распределение сетевых ресурсов входят в число основных функций таких алгоритмов.

В этой выпускной квалификационной работе рассматривается только задача предотвращения снижения производительности из-за сильной загруженности сети. Для этого рассматривается соответствующая модель и критерий оптимизации. Решение задачи оптимизации может быть использовано для разработки протокола. Для изучения компромисса между увеличением пропускной способности сети и одновременным увеличением длительности пребывания в сети, компьютерные сети связи моделируются как сети массового обслуживания.

Особенно актуальным является изучение методов оптимизации систем массового обслуживания, которые позволяют определять набор параметров, обеспечивающих экстремальные значения выбранных характеристик этих систем обслуживания. Использование методов оптимизации в моделях систем позволяет решать задачи уменьшения времени реакции информационных систем, снижения затрат и потерь времени в производственных системах, эффективности использования транспортных средств, определения оптимальной структуры систем обслуживания.

В настоящее время получили развитие методы оптимального управления системами массового обслуживания. К ним относятся, например, методы управления входящими потоками требований, методы управления интенсивностями обслуживания, методы распределения нагрузки. Разработке методов управления и методов анализа систем и сетей массового обслуживания с управлением в разное время изучался такими исследователями как Ю.И. Митрофанов, В.М. Вишнеvский, Г.П. Башарин, А.А. Lazar и другими.

Целью данной работы является разработка математической модели се-

ти передачи данных с управлением входящим потоком.

Для достижения данной цели были поставлены следующие задачи: изучить основные понятия, параметры и характеристики систем и сетей массового обслуживания; изучить основные принципы управления входящим потоком требований в системы и сети обслуживания; изучить метод анализа сетей массового обслуживания с оптимальным управлением входящим потоком требований и применить его для построения модели сети передачи данных; разработать алгоритм и программу для анализа сети массового обслуживания с оптимальным управлением входящим потоком требований; провести исследование разработанной модели.

В первом разделе приводится описание рассматриваемой системы массового обслуживания, включающее описание самой сети и ее состояния. Второй раздел посвящен описанию модели сети передачи данных в виде сети массового обслуживания с управлением потоком. В третьем и четвертом разделах описывается алгоритм вычисления характеристик однородных замкнутых экспоненциальных сетей массового обслуживания и используемый метод Зейделя для решения системы линейных алгебраических уравнений. В пятом разделе приводится структурная схема алгоритма метода анализа модели сети передачи данных с управлением потоком и подробное описание блоков данного алгоритма. В шестом разделе представлено назначение и описание программы для анализа сети передачи данных с управлением потоком. В седьмом разделе показан пример использования программы, а в восьмом разделе представлены результаты исследования зависимостей характеристик от параметров модели.

**Цель бакалаврской работы** — разработка математической модели сети передачи данных с управлением входящим потоком.

Поставленная цель определила **следующие задачи**:

1. Изучить математическую модель сети передачи данных и метод ее анализа;
2. Разработать алгоритм и программу для анализа модели сети передачи данных;
3. Исследовать зависимость характеристик модели сети передачи данных от ее параметров;

**Методологические основы** исследования математической модели про-

изводственной системы представлены в работах Ю.И. Митрофанова, В.М. Вишневецова, Г.П. Башарина, А.А. Lazar.

**Практическая значимость бакалаврской работы.** В ходе выполнения выпускной квалификационной работы был разработан алгоритм анализа модели сети передачи данных с управлением входящим потоком, с помощью которого можно исследовать зависимости характеристик модели.

**Структура и объем работы.** Бакалаврская работа состоит из введения, 8 разделов, заключения, списка использованных источников и цифрового носителя в качестве приложения. Общий объем работы — 41 страницы, из них 36 страницы — основное содержание, включая 11 рисунков и 2 таблицы, список использованных источников информации — 26 наименований.

## КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

**Первый раздел «Системы массового обслуживания с оптимальным управлением потоком»** посвящен описанию рассматриваемой системы массового обслуживания, включающее описание самой сети и ее состояния. Описан процесс функционирования сети массового обслуживания, обработка требований и их маршрутизация. В подразделе 1.1 описаны параметры и характеристики систем массового обслуживания. Процессы в СМО могут быть описаны с помощью различных параметров, таких как количество каналов обслуживания, интенсивность входящего потока требований, время обслуживания и т. д. Важным параметром является пропускная способность - среднее количество требований, обрабатываемых системой за единицу времени.

Число требований, пребывающих в открытой системе массового обслуживания в процессе ее эволюции, является дискретной случайной величиной. По типам функций распределения длительностей обслуживания требований во входящих в сеть системах обслуживания сети обслуживания делятся на экспоненциальные и общего вида.

Состояние систем массового обслуживания меняется скачком в моменты появления каких-то событий: прихода очередного требования, окончания обслуживания, момента, когда требование, которому надоело ждать, покидает очередь. Чтобы дать рекомендации по рациональной организации этого процесса и предъявить разумные требования к системе массового обслужи-

вания, необходимо изучить систему, описать ее математически. Этим и занимается теория массового обслуживания.

Подраздел 2.1 посвящен оптимальному управлению системами массового обслуживания. Система, в которой возможно использование управляющих воздействий на ее параметры, называется управляемой системой массового обслуживания. Правила использования управляющих воздействий во времени, также известные как стратегии, являются необходимыми для полного описания функционирования СМО. Класс стратегий может быть ограничен, поэтому возникают задачи определения оптимальных стратегий с учетом данных ограничений.

Управление  $\lambda = (\lambda_\kappa)$ ,  $1 \leq \kappa \leq N$ , считается оптимальным по классу допустимых элементов управления для данного  $T$ ,  $T \in R_+$ , если максимальное

$$\max_{E\tau^{(N)} \leq T} \leq E\gamma_N,$$

достигается.

Оптимальное управление системой массового обслуживания  $M/M/1$  может быть легко получено, поскольку максимизация пропускной способности эквивалентна минимизации вероятности того, что система пуста. Следовательно, для нахождения оптимального управления необходимо максимизировать линейную функцию при линейных ограничениях. В  $M/M/m$  системе максимизируемая функция оказывается нелинейной. Это связано с тем, что вероятность того, что система недостаточно используется, представляет собой линейную комбинацию вероятностей того, что, по крайней мере, один прибор не используется. Рассмотрим оптимальное управление системой массового обслуживания  $M/M/\infty$ .

Так как средняя временная задержка задается:

$$E\tau^{(N)} = \frac{\sum_{\kappa=1}^N \kappa p_\kappa}{\mu \sum_{\kappa=1}^N \kappa p_\kappa} = \frac{1}{\mu}.$$

Поэтому при минимизации средней пропускной способности временная задержка не является явным параметром.

**Второй раздел «Модель сети передачи данных в виде сети массового обслуживания с управлением потоком»** посвящен моделированию сети передачи данных. Одним из подходов к моделированию се-

ти передачи данных является использование сети массового обслуживания с управлением потоком. Этот подход позволяет описать систему как сеть узлов, в которых данные обрабатываются и передаются между узлами в соответствии с определенными правилами. Управление потоком данных в такой сети позволяет оптимизировать процесс передачи информации, повышая производительность и качество обслуживания.

Полное определение сети обслуживания включает также задание типов дисциплин обслуживания в системах массового обслуживания, состава СМО (число одинаковых параллельных приборов в СМО), зависимости интенсивности обслуживания в СМО от ее состояния и другие характеристики.

Важным элементом модели сети массового обслуживания является управление потоком данных. Это позволяет контролировать скорость передачи данных, управлять приоритетами и обеспечивать равномерное распределение нагрузки на узлы сети. Управление потоком данных в сети массового обслуживания позволяет предотвратить перегрузку системы, улучшить ее производительность и обеспечить оптимальное качество обслуживания для конечных пользователей.

**Третий раздел «Алгоритмы вычисления характеристик однородных замкнутых экспоненциальных сетей массового обслуживания»** посвящен применяемым, в настоящее время, методам решения систем линейных алгебраических уравнений, которые можно разбить на две группы:

1. Прямыми методами называют такие методы, которые позволяют получить решение системы за конечное количество шагов. К данной группе методов относятся: метод Гаусса, метод квадратных корней, метод Крамера и др.

2. Итерационными методами называют такие методы, в которых точное решение можно получить только в результате бесконечного процесса. В связи с тем, что реализовать бесконечный процесс на практике невозможно, итерационные методы позволяют получить решение системы лишь с заданной точностью. К итерационным методам относятся: метод простых итераций, метод Зейделя и др.

**Четвертый раздел «Метод Зейделя»** описывает основную идею метода Зейделя. Она заключается в том, что при вычислении нового приближения к решению системы линейных уравнений, мы используем уже вычис-

ленные значения переменных из предыдущих итераций.

**Пятый раздел «Алгоритм для анализа сети передачи данных с управлением потоком»** посвящен описанию алгоритма для анализа сети передачи данных с управлением потоком. В подразделе 5.1 представлена блок-схема алгоритма анализа сетей передачи данных с управлением потоком. В подразделе 5.2 описан алгоритм состоящий из нескольких основных блоков, каждый из которых отвечает за определённый этап анализа:

Блок ввода данных:

— описаны необходимые входные параметры системы для дальнейшего анализа.

Блок расчёта характеристик:

— вычисление характеристик системы, включая интенсивность потока требований в сеть, м.о. числа требований в сети, пропускная способность СеМО и время реакции.

Блок вывода данных:

— вывод результатов в файл *out.txt*.

**Шестой раздел «Описание программы для анализа сети передачи данных с управлением потоком»** посвящен описанию разработки программы на языке программирования C#, которая даёт возможность вычислять пропускную способность СеМО, время реакции СеМО и характеристики при заданных начальных параметрах сети

Подраздел 6.1 раскрывает назначение и структуру программы. Программа разработана с целью анализа модели сети передачи данных с оптимальным управлением потоком. Были вычислены следующие характеристики сети:

— вектор относительных интенсивностей потоков требований в системы сети обслуживания  $\omega$ ;

— м.о числа требований в СеМО  $\overline{Q}_t$ ;

— м.о длительности пребывания требований в системах сети  $u_i$ ;

— м.о. числа требований в системах СеМО  $q_i$ ;

— интенсивность потока требований в СеМО  $\lambda_0$ ;

— пропускная способность СеМО;

— время реакции СеМО.

В подразделе 6.2 приводится список идентификаторов и методов про-

граммы. В таблице 2 представлены переменные с их описанием, используемые в методе анализа сети передачи данных с управлением входящим потоком требований, и соответствующие им переменные алгоритма.

В таблице 3 представлены методы с их описанием, которые были использованы для вычислений в программе.

**Седьмой раздел «Пример использования программы»** посвящен рассмотрению примера использования программы. Введем следующие значения входных параметров:  $L = 8$  — число СМО в сети;  $\tau = 2$  — м.о. длительности пребывания требований в сети (т.е. время реакции сети);  $\mu = (5.0; 4.85; 4.9; 5.1; 4.8; 5.05; 5.15; 4.95)$  — интенсивность обслуживания требований системами обслуживания.

Зададим маршрутную матрицу (двумерный массив вещественных чисел размерности  $9 \times 9$  :

$$\begin{bmatrix} 0,0 & 0,25 & 0,25 & 0,25 & 0,25 & 0,0 & 0,0 & 0,0 & 0,0 \\ 0,0 & 0,0 & 0,0 & 0,0 & 0,0 & 0,5 & 0,0 & 0,5 & 0,0 \\ 0,0 & 0,0 & 0,0 & 0,0 & 0,0 & 0,0 & 0,5 & 0,0 & 0,5 \\ 0,0 & 0,0 & 0,0 & 0,0 & 0,0 & 0,5 & 0,0 & 0,5 & 0,0 \\ 0,0 & 0,0 & 0,0 & 0,0 & 0,0 & 0,0 & 0,5 & 0,0 & 0,5 \\ 0,7 & 0,1 & 0,1 & 0,1 & 0,0 & 0,0 & 0,0 & 0,0 & 0,0 \\ 0,7 & 0,1 & 0,0 & 0,1 & 0,0 & 0,0 & 0,0 & 0,0 & 0,1 \\ 0,7 & 0,0 & 0,1 & 0,1 & 0,1 & 0,0 & 0,0 & 0,0 & 0,0 \\ 0,7 & 0,0 & 0,1 & 0,0 & 0,1 & 0,1 & 0,0 & 0,0 & 0,0 \end{bmatrix}$$

На рисунке 1 выводятся сначала входные параметры сети, такие как число СМО в сети, заданное время реакции СеМО и интенсивность обслуживания требований системами обслуживания. Далее мы вычисляем характеристики систем обслуживания, а именно  $\lambda_0$  — интенсивность потока требований в СеМО,  $u_i$  — м.о. длительности пребывания требований в системах,  $q_i$  — м.о. числа требований в системах,  $\Lambda$  — пропускную способность и время реакции. Далее — оптимальная  $\lambda_0 = 10,058493$ , когда в СеМО  $Q$  требований, при которой время реакции СеМО не превосходит заданного числа (в данном примере это 2). Затем мы находим пропускную способность СеМО. В нашем случае — это максимум при таком ограничении на время реакции.

```

out.txt – Блокнот
Файл Правка Формат Вид Справка
Исходные данные
Число СМО в сети = 8
Заданное время реакции СеМО = 2,000000
-----
Характеристики систем обслуживания
Лямбда м.о._и м.о._q
1 3,2365 0,5671 1,8353
2 3,6113 0,8073 2,9152
3 3,5770 0,7559 2,7037
4 3,2331 0,5357 1,7318
5 3,7713 0,9721 3,6661
6 3,4104 0,6099 2,0799
7 3,3950 0,5698 1,9345
8 3,7524 0,8350 3,1332

Вектор омега
0 0,2644
1 0,0851
2 0,0949
3 0,0940
4 0,0850
5 0,0991
6 0,0896
7 0,0892
8 0,0986

Интенсивность потока треб-й в СеМО = 10,058493
М.о. числа требований в СеМО = 19,999984
Время реакции СеМО = 1,988368 при м.о. числа треб-й в СеМО = 20
Пропускная способность СеМО = 27,987012
Интенсивность потока в СеМО не должна превышать 12,802109

```

Рисунок 1 – Результат работы программы

**Восьмой раздел «Анализ зависимостей характеристик модели системы обработки информации»** посвящен результатам проведенного исследования зависимостей характеристик модели от входных параметров.

В качестве эксперимента будем изменять интенсивность обслуживания требований в системе 1 (рисунок 2). На графике отображено изменение математического ожидания длительности пребывания требований в системе при увеличении интенсивности обслуживания в первой системе соответственно. Исходя из наглядно представленных результатов логично предположить, что при увеличении интенсивности обслуживания в первой системе, уменьшается математическое ожидание числа требований в ней.

Рассмотрим другую не менее интересную зависимость (рисунок 4). По оси абсцисс будет так же отложена интенсивность обслуживания требований системами обслуживания от 5 до 6.8. А по оси ординат отложим пропускную способность сети. Исходя из наглядно представленных результатов логично предположить, что при увеличении интенсивность обслуживания требований, увеличивается и пропускная способность сети.

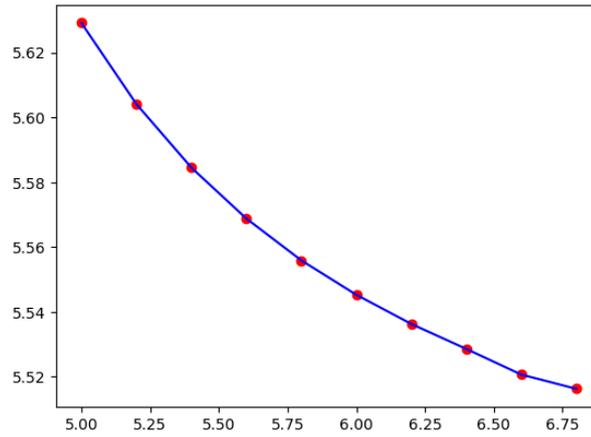


Рисунок 2 – Зависимость м.о. длительности пребывания требований в системе 1 сети от интенсивности  $\mu_1$

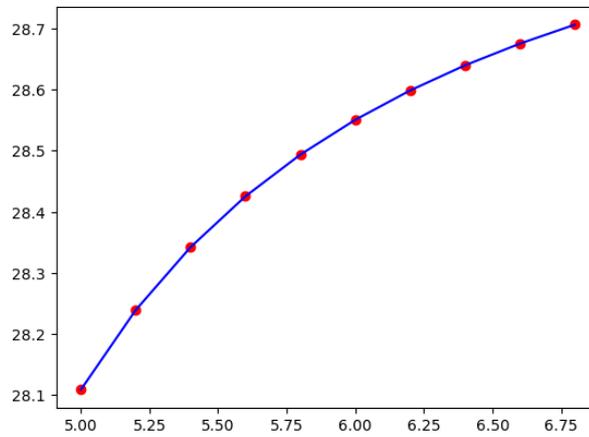


Рисунок 3 – Зависимость пропускной способности сети от интенсивности  $\mu_1$

Завершим эксперимент следующим графиком: по оси абсцисс отложено м.о. числа требований в сети. А по оси ординат откладывается математическое ожидание длительности пребывания требований в сети.

Математическое ожидание числа требований в системах сети вычисляется по формуле

$$q_i = \lambda_i u_i.$$

Таким образом, на графике отображены изменения математического ожидания длительности пребывания требований при увеличении числа требований в сети. Исходя из наглядно представленных результатов логично предположить, что при увеличении числа требований, увеличивается математическое ожидание длительности пребывания требований.

На основе данных экспериментов можно сделать вывод, что разработанная модель применима для анализа сетей массового обслуживания обще-

го вида с варьируемыми параметрами: интенсивностями обслуживания и м.о длительности пребывания требований в сети.

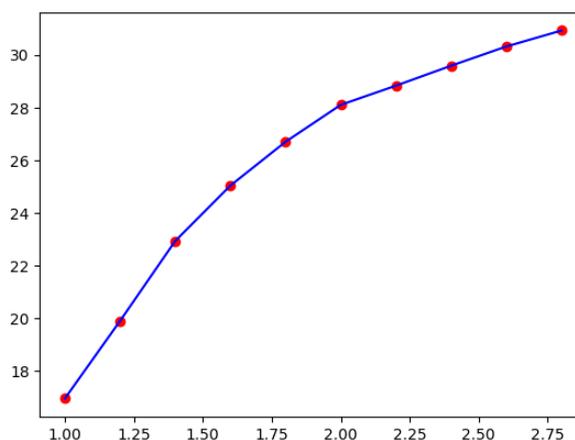


Рисунок 4 – Зависимость м.о. числа требований в сети от м. о. длительности пребывания требований в сети

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В данной работе были рассмотрены необходимые элементы теории массового обслуживания, касающиеся замкнутых экспоненциальных сетей массового обслуживания с одним классом требований, изучен метод анализа сетей массового обслуживания с оптимальным управлением потоком, разработан алгоритм и программа для анализа сетей обслуживания рассматриваемого класса. Разработанная программа предназначена для вычисления таких характеристик сети массового обслуживания, как интенсивность потока требований в сеть обслуживания, вектор м.о. длительности пребывания требований в системах, вектор м.о. числа требований в системах, пропускная способность и время реакции сети обслуживания. В представленной работе приводится структурная схема алгоритма, подробное описание блоков алгоритма и реализация алгоритма на языке *C#*. Проведено исследование зависимости характеристик от параметров сети обслуживания. Полученные результаты помогут оптимизировать процессы приема, передачи и обработки информации, повысить качество обслуживания информации. Дальнейшее развитие исследований в данной области позволит создать более совершенные модели управления потоком для повышения эффективности работы информационно-вычислительных систем и сетей передачи данных.

**Основные источники информации:**

1. Митрофанов, Ю. И. Анализ сетей массового обслуживания: Учеб. пособие / Ю. И. Митрофанов. — Саратов: Изд-во «Научная книга», 2004.— 175 с.
2. Вишневский, В. М. Теоретические основы проектирования компьютерных сетей / В. М. Вишневский. — М: Изд-во «Техносфера», 2003. — 512 с.
3. Башарин, Г. П. Теория сетей массового обслуживания и ее приложения к анализу информационно - вычислительных систем / Толмачев, А. Л., Башарин, Г. П. — М: Итоги науки и техн. Сер. Теор. вероятн. Мат. стат. Теор. кибернет., 21, ВИНТИ, М., 1983, с. 3–119.
4. Lazar, A, A Optimal flow control of a class of queueing networks in equilibrium/  
Lazar, A, A // IEEE transactions on Automatic Control. — 1983. — № 11. — С. 1001-1007.
5. Клейнрок, Л. Теория массового обслуживания/ Клейнрок Л.— М.: Наука, 1979.— 432 с.