МИНОБРНАУКИ РОССИИ
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«САРАТОВСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ Н.Г. ЧЕРНЫШЕВСКОГО

кафедра математического анализа

ЭЛЕКТРОННЫЙ ОБРАЗОВАТЕЛЬНЫЙ КУРС «МНОГОЧЛЕНЫ»

АВТОРЕФЕРАТ МАГИСТЕРСКОЙ РАБОТЫ

студентки 3 курса 322 группы

направления **44.04.01 – Педагогический образование**

механико-математического факультета

Ивановой Ольги Владимировны

Научный руководитель
доцент, к.ф.-м. н, доцент ________________ Е.В.Разумовская

Заведующий кафедрой
и.о.зав.кафедрой, к.ф.-м.н.,
доцент ________________ Е.В.Разумовская

Саратов 2024

Введение. Магистерская работа представляет собой материалы для разработки электронного образовательного курса «Многочлены». Данный образовательный курс предназначен для учащихся 7-9 классов основного общего образования, и содержит элементы, относящиеся как к обучению на базовом уровне, так и в классах с профильной подготовкой. Так же некоторые аспекты, могут быть рассмотрены на факультативных занятиях.

Актуальность работы объясняется тем, что тема «Многочлены» занимает важное место в процессе обучения математике и развития личности в целом. Содержание темы многочлены является основой для изучения курса алгебры, поэтому очень важна активизация деятельности учащихся при её изучении, чему способствует реализация технологий проблемного обучения. В основной школе содержание материала в курсе алгебры группируется вокруг понятий «одночлен» и «многочлен», учащиеся овладевают навыками преобразований целых и дробных выражений, содержащие не только цифры, но и буквы, получают представление об операции извлечения корня, знакомятся с понятием уравнения, овладевают алгоритмами решения задач с несколькими неизвестными, изучают формулы сокращенного умножения. Без систематизированных знаний по теме «Многочлены» трудно представить, как можно выполнять математические операции, не владея понятийным аппаратом по данной теме.

Цель магистерской работы – разработать электронный образовательный ресурс (ЭОР) «Многочлены» для учеников 7-9 классов и учителей школ.

В рамках работы было создано теоретическое наполнение электронного образовательного курса, предусматривающее структурированное и удобное для восприятия представление учебного материала. А также представлены разработанные тесты трех уровней сложности для ступенчатого контроля. Для базового уровня разработаны пять вариантов тестов, каждый из которых включает десять заданий. Средний уровень представлен пятью вариантами с восемью заданиями в каждом, а высокий уровень — пятью вариантами по пять заданий. Поскольку варианты тестов аналогичны, в работе приводятся развернутые решения для первого варианта каждого уровня сложности, а для остальных вариантов приведены ключи.

Выпускная квалификационная работа состоит из введения, шести глав, заключения, списка использованных источников.

Каждая глава магистерской работы соответствует определенному модулю ЭОР.

На освоение данного электронного образовательного курса в среднем можно затратить две недели.

Однако, необходимо учитывать уровень знаний учащихся, и в каком классе предлагается прохождение данного курса.

Основное содержание работы. Рассмотрим важные определения.

Определение 1. Одночлен – это такое выражение, которое содержит числа, натуральные степени переменных и их произведения и не содержит никаких других действий над числами и переменными.

Стандартный вид одночлена представляет собой числовой множитель и переменную, где числовой множитель называется коэффициентом одночлена. Степенью одночлена называется сумма показателей степеней всех переменных.

Пример 1. $0,4b^2$; $28c^3d$; $15sb^2$; $3a(2,5a^4)$ - одночлены.

Пример 2. $0,4b^2$; $28c^3d$; $15sb^2$; ab; $3a^3b$ - одночлены стандартного вида.

Определение 2. Многочлен представляет собой сумму одночленов. Стандартным видом многочлена является многочлен, полученный в результате приведения всех одночленов к стандартной форме и приведения подобных.

Определение 3. Многочленом от одной переменной, представленным в каноническом виде называют многочлен относительно переменной x, представленный в виде $f(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1x + a_0$,

где $a_n, a_{n-1}, \ldots, a_0$ - являются действительными числами и называются коэффициентами многочлена, x - независимой переменной, выражения a_ix^{n-i} - членами многочлена $f(x)$, $n - i$ - степенью одночлена.

Пример 3. $27a^3 + 1$; $28c^5 + 19c^2 + 33$; $3xy^5 + 6y^6 + 13x^5$; $6z^6 - zs^5 + 3s^5$ - многочлены стандартного вида.

Пример 4. $12k^2 - 6k + 9k + 1$; $27n^3 + 8n^3 - 9$; $3x + 5xy^2 + x - xy^2$; $3ab^5 + 6b^6 + 13a^5 + 3b^6 - ab^5 + 2a^5$ - не являются многочленами стандартного вида.

Если $a_n \neq 0$, то n называется степенью многочлена и обозначается $\deg f(x)$, а $a_n x^n$ - его старшим членом. Коэффициент a_0 называется свободным членом.

Определение 4. Если $a_n = 1$, то многочлен называют приведённым, а если же $a_n \neq 1$, то - неприведённым.

С многочленами можно проводить различные вычислительные действия. Сложение и вычитание многочленов выполняются по одному и тому же правилу, т. е. необходимости в различении операций сложения и вычитания нет, значит, нет и особой необходимости в использовании двух терминов: «сложение многочленов», «вычитание многочленов». Вместо них в математике принято употреблять термин алгебраическая сумма многочленов.
Чтобы записать алгебраическую сумму нескольких многочленов в виде многочлена стандартного вида, нужно раскрыть скобки и привести подобные члены. При этом если перед скобкой стоит знак «+», то при раскрытии скобок надо знаки, стоящие перед слагаемыми в скобках, оставить без изменения. Если же перед скобкой стоит знак «-», то при раскрытии скобок нужно знаки, стоящие перед слагаемыми в скобках, заменить на противоположные («+» на «-», «-» на «+»).

Пример 5. $5x+7xy-3b-(4x+2y+5xy) = \underline{5x}+\underline{\underline{7xy}}-3b-\underline{4x}-2y-\underline{\underline{5xy}} =$
$= x + 2xy - 3b - 2y$

При умножении многочлена на одночлен используется распределительный закон умножения: $(a + b)c = ac + bc$. Т. е., чтобы умножить многочлен на одночлен, нужно каждый член многочлена умножить на этот одночлен и полученные произведения сложить.

Пример 6. $-5a(2a^2 - 3ab) = (-5a) \cdot 2a^2 + (-5a) \cdot (-3ab) = -10a^3 + 15a^2b$

Требование представить заданный многочлен в виде произведения одночлена и многочлена встречается в математике довольно часто, поэтому указанной процедуре присвоено специальное название: вынесение общего множителя за скобки.

Чтобы, умножить многочлен на многочлен, нужно умножить каждый член одного многочлена поочерёдно на каждый член другого многочлена и полученные произведения сложить. В соответсвии с рисунком 1 показана общая идея умножения многочлена на многочлен. В результате умножения многочленов всегда получается многочлен.

$$(a + 5)(a - 2) = a \cdot a + a \cdot (-2) + 5 \cdot a + 5 \cdot (-2)$$

Рисунок 1 — Пример умножения многочлена на многочлен

В основе деления многочлена на одночлен лежит следующее свойство деления суммы на число: $(a + b + c) : m = (a : m) + (b : m) + (c : m)$. Т.е., чтобы разделить многочлен на одночлен, нужно каждый член многочлена разделить на этот одночлен и полученные результаты сложить.

Важно помнить, что не всегда можно разделить одночлен на одночлен. Чтобы деление было выполнимо, необходимо соблюдение целого ряда условий:

а) в делителе не должно быть переменных, которых нет в делимом;

б) если в делимом и делителе есть одна и та же переменная, причём в делимом она возводится в степень n, а в делителе — в степень k, то число k не должно быть больше числа n;

в) коэффициенты делимого и делителя могут быть любыми.

Определение 5. Разделить многочлен $P(x)$ на многочлен $A(x)$ ($\deg A(x) < \deg P(x)$) с остатком — значит найти многочлены $Q(x)$ и $R(x)$ такие, что

$$P(x) = Q(x) \cdot A(x) + R(x),$$

причём степень многочлена $R(x)$ строго меньше степени делителя $A(x)$.

$$\deg R(x) < \deg A(x).$$

Многочлен $Q(x)$ называют неполным частным, $R(x)$ — остатком от деления.

Одним из способов деления многочлена на многочлен с остатком производится столбиком (уголком).

Вторым наиболее распространенным алгоритмом деления многочлена на линейные двучлены является схема Горнера.

Рассмотрим многочлены: $P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$ - делимое и $A(x) = x - a$ - делитель. Распишем схему Горнера для этих многочленов. Для этого заполним таблицу

	a_n	a_{n-1}	a_{n-2}	$\ldots$	a_1	a_0
a						

В первой строке - коэффициенты многочлена $P(x)$ (даже нулевые) в порядке убывания степеней. Таких коэффициентов всегда на один больше, чем степень многочлена: для квадратного многочлена всего 3 коэффициента, для кубического — уже 4, и т.д.
Во второй строке таблицы вписывается число a в самой левой клетке. Остальные клетки заполняются последовательно по следующему алгоритму. В первую свободную клетку переносится элемент из верхней строки без изменений. Назовём этот элемент b_{n-1}:

	a_n	a_{n-1}	a_{n-2}	$\ldots$	a_1	a_0
a	$b_{n-1} = a_n$					

Вторая клетка — элемент b_{n-2} — считается по формуле $b_{n-2} = b_{n-1} \cdot a + a_{n-1}$. Другими словами, берется элемент слева, умножается на число и суммируется с элементом сверху:

	a_n	a_{n-1}	a_{n-2}	$\ldots$	a_1	a_0
a	b_{n-1}	$b_{n-2} = b_{n-1} \cdot a + a_{n-1}$				

Далее находим элемент b_{n-3} по аналогичной формуле: $b_{n-3} = b_{n-2} \cdot a + a_{n-2}$. Заносим результат в третью клетку:

	a_n	a_{n-1}	a_{n-2}	$\ldots$	a_1	a_0
a	b_{n-1}	b_{n-2}	$b_{n-3} = b_{n-2} \cdot a + a_{n-2}$			

По аналогичной формуле $b_{k-1} = b_k \cdot a + a_k$ находим оставшиеся элементы.
В какой-то момент алгоритма появится элемент b_0, который находится в клетке под коэффициентом a_1:

	a_n	a_{n-1}	a_{n-2}	$\ldots$	a_1	a_0
a	b_{n-1}	b_{n-2}	b_{n-3}	$\ldots$	$b_0 = b_1 \cdot a + a_1$	

Элемент в последней клетке считается по той же схеме: $b_0 \cdot a + a_0$. Обозначим его буквой r:

	a_n	a_{n-1}	a_{n-2}	$\dots$	a_1	a_0
a	b_{n-1}	b_{n-2}	b_{n-3}	$\dots$	b_0	$r = b_0 \cdot a + a_0$

Итак, заполненная таблица выглядит следующим образом:

	a_n	a_{n-1}	a_{n-2}	$\dots$	a_1	a_0
a	b_{n-1}	b_{n-2}	b_{n-3}	$\dots$	b_0	r

Схема заполнения этой таблицы как раз и называется схемой Горнера. Схема Горнера позволяет быстро находить неполное частное и остаток от деления произвольного многочлена на двучлен.

Третьим наиболее распространенным способом деления многочлена на многочлен с остатком является метод неопределенных коэффициентов.

Пусть даны два представления одного и того же многочлена. Например, в стандартном виде и разложение на множители:

$$P(x) = a_4x^4 + a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0 = (ax^2 + bx + c)(dx^2 + ex + f)$$

Тогда для нахождения неизвестных коэффициентов в любом из этих разложений необходимо выполнить три шага:

а) Раскрыть все скобки и привести подобные, чтобы получить две записи в стандартном виде;

б) Приравнять соответствующие коэффициенты, составить систему уравнений;

в) Решить эту систему и правильно интерпретировать ответ.

Определение 6. Разложение многочлена на множители – тождественное преобразование, превращающее сумму в произведение нескольких множителей. При этом каждый множитель может быть как многочленом, так и одночленом.

Универсального способа разложения, подходящего для всех многочленов нет. Поэтому существует всего 5 способов разложения многочлена на множители.

Вынесение общего множителя за скобки - один из самых элементарных способов упростить выражение. Для применения этого метода необходимо знать распределительный закон умножения относительно сложения.

Закон гласит:

Чтобы сумму двух чисел умножить на третье число, нужно каждое слагаемое умножить на это число и полученные результаты сложить. Иначе говоря, $a(b + c) = ab + ac$.

Так же можно проделать и обратную операцию, $ab + ac = a(b + c)$.

Вот именно эта обратная операция нас и интересует. Как видно из формулы, общий множитель a, можно вынести за скобку.

Суть разложения многочлена на множители с помощью формул сокращенного умножения заключается в том, что бы заметить в имеющемся перед тобой выражении какую-то определенную формулу, применить ее и получить, таким образом, произведение чего-то и чего-то, вот и все разложение.

Метод группировки применяется как раз, когда общие делители есть не у всех членов. Для группировки необходимо найти группки слагаемых, имеющих общие делители и переставить их так, чтобы из каждой группы можно было получить один и тот же множитель.

Хитрость в том, чтоб сгруппировать многочлен так, чтобы можно было вынести максимально большой множитель, либо, чтобы после вынесения множителей за скобку у нас внутри скобок оставались одинаковые выражения.

Иногда для применения формул сокращенного умножения необходимо преобразовать имеющийся многочлен, представив одно из его слагаемых в виде суммы или разности двух членов.

Пример 7. Многочлен $x^2 - 4x + 2$ в таком виде не может быть разложен при помощи формул сокращенного умножения, поэтому его необходимо преобразовать. Для полной формулы квадрата разности здесь нужно 4 вместо 2. Представим третий член 2 как разность $4 - 2$, получим:

$$x^2 - 4x + 4 - 2 = (x^2 - 4x + 4) - 2$$

К выражению в скобках можно применить формулу квадрата разности, имеем: $(x-2)^2-2$, к данному выражению можно применить формулу разности квадратов, получим: $(x-2-\sqrt{2})(x-2+\sqrt{2})$.

Квадратный трехчлен – многочлен вида $ax^2+bx+c=0$, где x – неизвестное, a, b, c – некоторые числа, причем $a\neq 0$.

Значения переменной x, которые обращают квадратный трехчлен в ноль, называются корнями трехчлена (подробнее понятие корней многочленов будет рассмотрено в следующей главе). Следовательно, корни трехчлена – это корни квадратного уравнения $ax^2+bx+c=0$.

Теорема 1. Если квадратное уравнение $ax^2+bx+c=0$ имеет корни x_1, x_2, то его можно записать в виде: $ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2)$

Определение 7. Корнем многочлена $P(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_1x+$ $+a_0$ является такое значение x, при котором многочлен обращается в 0.

Теорема 2. (Теорма Безу) Остаток от деления многочлена

$$P(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_1x+a_0$$

на двучлен $x-a$ равен значению этого многочлена в точке $x=a$:

$$r=P(a)$$

Следствие 1 из т. Безу. Остаток от деления многочлена

$$P(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_1x+a_0$$

на двучлен $kx+b$ равен значению этого многочлена в точке $x=-\dfrac{b}{k}$:

$$r=P(-\frac{b}{k})$$

Теорема 3. (Теорма Виета) Если $x_1, x_2, \ldots, x_n$ - корни многочлена $P(x) = = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0,\ a_n \neq 0$, то справедливы равенства:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + \ldots + x_n = -\dfrac{a_{n-1}}{a_n}, \\ x_1x_2 + x_1x_3 + \ldots + x_2x_3 + x_2x_4 + \ldots + x_{n-1}x_n = \dfrac{a_{n-2}}{a_n}, \\ x_1x_2x_3 + x_1x_2x_4 + \ldots + x_2x_3x_4 + \ldots + x_{n-2}x_{n-1}x_n = -\dfrac{a_{n-3}}{a_n}, \\ x_1x_2\ldots x_{n-1} + x_1x_2\ldots x_{n-2}x_n + \ldots + x_2x_3\ldots x_n = (-1)^{n-1}\,\dfrac{a_1}{a_n}, \\ x_1x_2\ldots x_{n-1}x_n = (-1)^n\,\dfrac{a_0}{a_n}. \end{cases}$$

Эти равенства называются формулами Виета.

В качестве примера приведем один из вариантов теста высокого уровня сложности.

1 Вариант

1. Решите уравнение, используя теорему Виета, и посчитайте сумму целых корней уравнения $5x^3 - x^2 - 20x + 4 = 0$.

   Ответ: ______________________________

2. При каких значениях параметра a многочлен $P(x) = x^6 + ax - 8$ нацело делится на многочлен $x + 2$?

   Ответ: ______________________________

3. При каких значениях параметра a многочлен $(a^2 - 4)x^4 - 2x^3 + (2a - - 1)x - 4$ будет принимать одинаковые значения в точках $x = 1$ и $x = -1$?

   Ответ: ______________________________

4. Используя метод неопределённых коэффициентов, найдите коэффициент при x^3 в многочлене, полученном в результате деления многочлена $x^5 - 2x^4 + 3x^3 - 7x^2 + 2x - 1$ на двучлен $x - 2$.

   Ответ: ______________________________

5. Выясните, является ли число 2 корнем многочлена $f(x) = x^5 - 5x^4 + 3x^3 + 22x^2 - 44x + 24$.

   Ответ: ______________________________

Заключение.

В магистерской работе представлены материалы для ЭОК по теме «Многочлены».

Были реализованы следующие задачи:

а) изучен и проанализирован теоретический материал по данной теме;

б) определены методические особенности данной темы;

в) разработана система контрольно-измерительных материалов, дифференцированная по уровню сложности;

г) расширен кругозор учащихся, ограниченный информацией учебника.

Содержание электронного образовательного курса «Многочлены» было апробировано в МОУ «СОШ №16» города Энгельс.

После проведения тестирования по теме «Многочлены» проведена соответствующая корректировка тестов базового, среднего и высокого уровней сложности. Были получены следующие результаты.

После проведение тестирования была проведена соответствующая корректировка курса для более оптимального изучения.

При апробации пришли к выводу: разработанный курс заданий по теме: «Многочлены», предназначенный для уроков математики, а также факультативных занятий по математике, послужит хорошей основой для усвоения данной темы на более глубоком уровне.