МИНОБРНАУКИ РОССИИ
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«САРАТОВСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ Н.Г. ЧЕРНЫШЕВСКОГО

кафедра математического анализа

ЭЛЕКТРОННЫЙ ОБРАЗОВАТЕЛЬНЫЙ КУРС
«КВАДРАТИЧНЫЕ ФУНКЦИИ»

АВТОРЕФЕРАТ МАГИСТЕРСКОЙ РАБОТЫ

студентки 3 курса 322 группы

направления **44.04.01 – Педагогическое образование**

механико-математического факультета

Красновой Елизаветы Сергеевны

Научный руководитель
доцент, к.ф.-м. н. ____________________ М.А. Осипцев

Заведующий кафедрой
и.о.зав.кафедрой, к.ф.-м.н.,
доцент ____________________ Е.В.Разумовская

Саратов 2024

Введение. Квадратичные функции занимают важное место в математике и её приложениях. Они представляют собой полиномиальные функции второго порядка, графиком которых является парабола. Эти функции не только являются основой для изучения более сложных математических концепций, но и находят широкое применение в различных областях науки и техники, таких как физика, экономика и инженерия. В данной магистерской работе подробно рассмотрим квадратичные функции и их графики, уделяя особое внимание различным аспектам их анализа и преобразования.

Начнем с определения функций и их свойств, что позволит понять, как квадратичные функции вписываются в более широкий контекст математического анализа. Далее рассмотрим преобразование функций, что является ключевым моментом в изучении их графиков. Стандартный вид параболы, где коэффициент «a» играет решающую роль в определении направления и ширины параболы, будет проанализирован отдельно. Также обратим внимание на дробно-квадратичные функции, которые представляют собой интересный класс функций, обладающих уникальными свойствами и графиками.

Особое внимание будет уделено случаям, когда «a» не равно нулю, что позволяет избежать тривиальных решений и углубиться в изучение свойств параболы с различными значениями коэффициента. Парабола со смещенной вершиной и построение графиков квадратичных функций, содержащих знак модуля, также будут рассмотрены, поскольку они представляют собой важные аспекты визуализации и интерпретации данных.

Важным элементом нашей работы станет анализ производных на примере квадратичных функций, что поможет понять, как производные влияют на поведение функций и их графиков.Также проведем разбор задач, связанных с квадратичными функциями, что позволит закрепить теоретические знания на практике. Наконец, рассмотрим примеры применения квадратичных функций в реальных задачах, что подчеркивает их значимость и универсальность.

Цель магистерской работы – разработать электронный образовательный ресурс (ЭОР) «Квадратичная функция» для учеников 8-11 классов и учителей школ. Для достижения поставленной цели необходимо решить следующие задачи:

- Изучение свойств квадратичных функций: определить основные характеристики и свойства квадратичных функций, включая их стандартный вид и влияние коэффициента «a» на форму графика.
- Анализ преобразований функций: рассмотреть различные способы преобразования квадратичных функций и их влияние на графическое представление.
- Исследование дробно-квадратичных функций: проанализировать особенности дробно-квадратичных функций и их графиков, а также сравнить их с обычными квадратичными функциями.
- Построение графиков: научиться строить графики квадратичных функций, включая случаи со смещенной вершиной и с использованием знака модуля.
- Изучение производных: рассмотреть производные квадратичных функций и их применение для анализа экстремумов и поведения функций.
- Решение практических задач: провести разбор и решение задач, связанных с квадратичными функциями, для закрепления теоретических знаний.
- Примеры применения: исследовать примеры реальных приложений квадратичных функций в различных областях, чтобы продемонстрировать их значимость и практическую ценность.
- Разработать теоретическое и практическое содержание ЭОР «Квадратичная функция» в системе «Ipsilon».

Научная новизна магистерской работы состоит в разработке дидактического материала трех уровней сложности.

Выпускная квалификационная работа состоит из введения, четырех глав, заключения, списка использованных источников.

Цели создания электронного образовательного курса включают:

- повышение качества обучения через внедрение дистанционных образовательных программ и электронного обучения;
- оптимизация работы педагогического состава посредством использования электронного обучения и дистанционных технологий;
- создание электронной информационно-образовательной среды для поддержки дистанционного обучения.

Задачи создания электронного образовательного курса:

- обеспечение соответствия структуры и элементов курса, а также методов обучения единым требованиям системы дистанционного образования Ipsilon;
- разработка учебно-методических и контрольно-измерительных материалов по теме «Квадратичная функция» для использования в системе дистанционного образования Ipsilon;
- совершенствование и обновление комплекса учебно-методических материалов по указанной теме.

Изучение квадратичной функции в школьном курсе является традиционным и значимым разделом математики, актуальным на протяжении всего периода обучения.

Перед началом изучения Квадратичных функций учащиеся должны обладать следующими базовыми знаниями и умениями:

- иметь представление о базовых понятиях функций;
- знать координатной плоскости и уметь работать с координатами точек;
- уметь строить графики простых квадратичных функций и интерпретировать их;
- понимать симметрию и ее применения в графиках функций;
- уметь читать графики и извлекать из них информацию, такую как координаты точек пересечения с осями

Диагностируемые цели обучения теме «Квадратичная функция» с помощью электронного курса.

Основное содержание работы. Функция – это правило, по которому каждому элементу одного множества (аргументу) ставится в соответствие некоторый (единственный!) элемент другого множества (множества значений функции).

То есть, если есть функция $y = f(x)$, это значит что каждому допустимому значению переменной x (которую называют «аргументом») соответствует одно значение переменной y (называемой «функцией»).

Квадратичная функция – это функция вида $y = a * x^2 + b * x + c$, где $a \neq 0$, b и c – любые числа (они и называются коэффициентами).

Число a называют старшим или первым коэффициентом такой функции, b – вторым коэффициентом, а c – свободным членом.

Другими словами, квадратичная функция – это зависимость, содержащая аргумент в квадрате.

Нарисовать параболу можно, используя таблицу значений, в которой выбираем произвольный x и находим y. Но не всегда этот способ является самым рациональным.

Прежде чем перейдем к изложению материала, дадим известные определения, необходимые для дальнейшего изложения.

Определение 1. Функция $y = f(x), x \in X$, называется четной, если область её определения симметрична относительно нуля и для любого значения аргумента $x \in X$ верно равенство: $f(-x) = f(x)$. График любой четной функции симметричен относительно оси ординат OY.

Определение 2. Функция $y = f(x), x \in X$, называется нечетной, если область её определения симметрична относительно нуля и для любого значения аргумента $x \in X$ верно равенство: $f(-x) = -f(x)$. График любой нечетной функции симметричен относительно начала координат. Заметим, что не всякая функция является четной или нечетной. В тех случаях, когда функция не является ни четной, ни нечетной, то её называют функцией общего вида. График такой функции не обладает симметрией.

Определение 3. Квадратичной функцией называется функция вида $y = ax^2 + bx + c$, где $a \neq 0, b, c$ - некоторые числа. Графиком квадратичной функции является парабола. Осью симметрии параболы называется прямая, проходящая через вершину параболы и параллельная оси OY .

Определение 4. Вершиной параболы называется точка пересечения параболы с ее осью. Она считается началом системы координат, канонической для данной кривой.

Преобразование графиков функций является фундаментальной частью математического анализа и прикладной математики. Это позволяет понять, как изменение параметров функции влияет на её графическое представление. Рассмотрим основные виды преобразований: смещение, сжатие, растяжение и отражение.

Графиком любой квадратичной функции $y = \pm x^2 + b * x + c$ (обязательно коэффициент перед x^2 должен равняться ± 1) является стандартной параболой, только вершины этих парабол не будут находится в начале координат.

Чтобы начертить подобные параболы нужно сначала узнать, где находится вершина.

При построении параболы после нахождения координат вершины очень удобно учитывать следующие моменты:

1) парабола обязательно пройдет через точку $(0; c)$. Действительно, подставив в формулу $y = a * x^2 + b * x + cx = 0$, получим, что $y = c$. То есть ордината точки пересечения параболы осью (oy), это c. Парабола пересекает ось ординат в точке -2, так как $c = -2$.

2) осью симметрии параболы является прямая $x = \frac{-b}{2*a}$, поэтому все точки параболы будут симметричны относительно нее. В нашем примере, сразу берем точку (0; -2) и строим ей симметричную относительно оси симметрии параболы, получим точку (4; -2), через которую будет проходить парабола.

3) Приравнивая y к 0, узнаем точки пересечения параболы с осью (ox). Для этого решаем уравнение $a*x^2+b*x+c = 0$. В зависимости от дискриминанта, будем получать одну $(D = 0, x = -\frac{b}{2*a})$, две $(D > 0, x_{1,2} = \frac{-b\pm\sqrt{b^2-4*a*c}}{2*a})$ или ноль $(D < 0)$ точек пересечения с осью (ox). В предыдущем примере корень из дискриминанта – не целое число, видно, что две точки пересечения с осью (ox) будут (так как $D > 0$). 4) В найденной точке – вершине параболы (как в точке (0;0) новой системы координат) строим параболу $y = a*x^2$. Если $|a| > 1$, то парабола $y = a * x^2$ становится уже по сравнению с $y = x^2$, если $|a| < 1$, то парабола расширяется по сравнению с $y = x^2$.

5) Находим точки пересечения параболы с осью (oy) решая уравнение $a * x^2 + b * x + c = 0$.

Замечание 1. Если же парабола изначально задана в виде $y = a(x-m)^2+n$, где m, n – некоторые числа (например, $y = (x-5)^2-1$), то построить ее будет еще легче, потому что уже заданы координаты вершины (m, n).

Замечание 2. Если парабола задана в виде, подобном этому $y = x(x - 4)$ (то есть у представлен в виде произведения двух линейных множителей), то сразу видны точки пересечения параболы с осью (ox). В данном случае: (0;0) и (4;0). В остальном же действуем согласно алгоритму, раскрыв скобки.

Построение графиков квадратичных функции, содержащих знак модуля. Общий вид : $y = |f(x)|, y = f(|x|)$

Перейдем теперь к построению графиков квадратичных функций, содержащих знак модуля.

Такие задачи делятся на два типа:

а) задачи, содержащие знак «внешнего» модуля, т.е. вида $y = |ax^2+bx+c|$;

б) задачи, содержащие знак «внутреннего» модуля, т.е. вида $y = ax^2 + b|x| + c$

Начнем с задач, содержащих «внешний» знак модуля. Если аналитическая запись функции содержит «внешний» знак модуля, то график этой функции будет расположен не ниже оси абсцисс.

Алгоритм построения графиков квадратичных функций, содержащих «внешний» знак модуля, т.е. функций вида $y = |ax^2 + bx + c|$:

- строим график функции $y = ax^2 + bx + c$, не обращая внимания на «внешний» знак модуля;
- отразим нижнюю часть графика симметрично относительно оси абсцисс, учитывая знак модуля.

Производные на примере квадратичных функций. Производная — это важное понятие в математике, которое помогает понять, как изменяется функция. Если говорить простыми словами, производная показывает, насколько быстро меняется значение функции в данной точке. Это особенно полезно, когда работаем с графиками функций, например, с квадратичными.

Производная $f'(x)$ показывает, как быстро меняется значение функции $f(x)$ в зависимости от x. Нахождение наклона: Если подставим какое-то значение x в производную $f'(x)$, получим наклон касательной к графику функции в этой точке.

Определение максимумов и минимумов: Производная также помогает находить точки, где функция достигает своего максимума или минимума. Это происходит в тех точках, где производная равна нулю.

Производная помогает понять, как изменяется функция, находить наклон графика и определять, где функция достигает своих экстремумов.

Квадратичные функции находят широкое применение в различных сферах жизни. Вот несколько конкретных примеров их использования:

Физика. Траектория снаряда. Когда снаряд или мяч бросают вверх, его высота $h(t)$ в зависимости от времени t может быть описана квадратичной функцией, например:

$$h(t) = -4.9t^2 + v_0t + h_0,$$

где v_0 — начальная скорость, а h_0 — начальная высота. Эта функция показывает, как высота меняется со временем, и позволяет находить максимальную высоту и время, когда снаряд упадет на землю.

Экономика. Максимизация прибыли. Представим, что компания производит определенный товар, и ее прибыль $P(x)$ от продажи x единиц товара описывается квадратичной функцией:

$$P(x) = -2x^2 + 40x - 100.$$

Здесь $P(x)$ достигает максимума в определенной точке, и знание этой функции позволяет компании оптимизировать объем производства для максимизации прибыли.

Инженерия. Проектирование мостов. Форма арки моста может быть описана квадратичной функцией. Например, высота арки $h(x)$ может быть задана как:

$$h(x) = ax^2 + bx + c,$$

где a, b, и c — коэффициенты, определяющие форму арки. Это позволяет инженерам проектировать безопасные и эффективные конструкции.

Оптимизация. Задачи на минимизацию затрат. Допустим, компания производит два продукта, и ее затраты на производство $C(x, y)$ могут быть описаны квадратичной функцией. Например:

$$C(x, y) = 2x^2 + 3y^2 + 4xy + 100,$$

где x и y — количество производимых продуктов. Знание этой функции помогает найти оптимальное количество каждого продукта для минимизации затрат.

Статистика. Регрессионный анализ. В статистике квадратичные функции могут использоваться для построения модели, которая описывает зависимость между переменными. Например, если есть данные о продажах и рекламе, можно использовать квадратичную регрессию для нахождения наилучшей модели, которая описывает, как реклама влияет на продажи.

Архитектура. Проектирование крыши. При проектировании крыши здания, которая имеет форму параболы, архитектор может использовать квадратичную функцию для определения высоты крыши в зависимости от расстояния от центра:

$$h(x) = -ax^2 + b,$$

где a и b — параметры, определяющие форму крыши.

Экология. Моделирование популяций. Если популяция определенного вида животных растет, ее численность $N(t)$ может быть описана квадратичной функцией, например:

$$N(t) = -t^2 + 10t + 5,$$

где t — время. Эта функция может помочь предсказать, когда популяция достигнет максимума и начнет уменьшаться.

Эти примеры показывают, как квадратичные функции применяются в реальных ситуациях, и как их знание может быть полезным в различных профессиях и областях.

Заключение. Электронный образовательный курс по теме «Квадратичная функция» предлагает эффективный подход к обучению, основанный на целенаправленной и контролируемой самостоятельной работе учащихся. Такой формат позволяет ученикам заниматься в удобное для них время, по индивидуальному графику, пользуясь специально разработанным набором учебных материалов и поддерживая контакт с преподавателем по мере необходимости.

Для решения поставленных задач применялись следующие методы: анализ нормативных документов и литературы (математической, учебно-методической), наблюдение за учебным процессом, педагогический эксперимент, анализ экспериментальных данных. Электронный образовательный курс «Квадратичная функция» был апробирован в МОУ СОШ № 16 города Энгельс. После проведения тестирования по теме «Квадратичная функция» проведена соответствующая корректировка тестов базового, среднего и повышенного уровня сложности.

Исходя из выше сказанного, практическая ценность электронного образовательного курса заключается в том, что он доступен для широкой аудитории: учеников средних школ, студентов, будущих и работающих преподавателей. Теоретический материал курса включает информацию, которая отсутствует в обычных школьных учебниках. Предоставляет возможность учащимся самостоятельно изучать теоретический материал и выполнять практические задания в удобное для них время и месте. Это способствует развитию навыков самообучения и повышению мотивации к обучению.