МИНОБРНАУКИ РОССИИ
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«САРАТОВСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ Н.Г.
ЧЕРНЫШЕВСКОГО

кафедра математического анализа

**ЭЛЕКТРОННЫЙ ОБРАЗОВАТЕЛЬНЫЙ КУРС
КООРДИНАТНЫЙ МЕТОД РЕШЕНИЯ
ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ЗАДАЧ**

АВТОРЕФЕРАТ МАГИСТЕРСКОЙ РАБОТЫ

студентки 3 курса 322 группы

направления 44.04.01 – Педагогическое образование

механико-математического факультета

Тахтамысовой Динары Ермекалиевны

Научный руководитель доцент, к.ф.-м. н., доцент	________________	В. Г. Тимофеев
Заведующий кафедрой и.о.зав.кафедрой, к.ф.-м.н., доцент	________________	Е.В. Разумовская

Саратов 2024

Введение. Магистерская работа представляет электронный образовательный курс «Координатный метод решения геометрических задач», который состоит из теоретической части и тестов трёх уровней сложности. Данный образовательный курс предназначен для учащихся 10-11 классов основного среднего образования, и содержит элементы, относящиеся как к обучению на базовом уровне, так и в классах с профильной подготовкой.

В геометрии, и в стереометрии, в частности, используется два основных метода решения задач. Первый метод основан на аксиомах, теоремах и свойствах фигур, так называемый – геометрический. Второй метод – это метод координат или координатно-векторный метод, более прогнозируемый, и в тоже время результативный, так как его применение требует от ученика лишь знание необходимых формул для нахождения углов, расстояний и успешного их применения, не ошибаясь при этом в расчетах. Его можно успешно применять при решении большого числа задач, в том числе, задач Единого Государственного экзамена (задания 14). А так как, эти задания - повышенной сложности, то они приносят учащимся хорошие баллы при сдаче ЕГЭ.

Таким образом можно назвать следующие преимущества выбора и применения координатного метода учениками при решении задач:

-упрощение поиска решения и самого решения геометрических задач. Метод тесно связан с алгеброй, что позволяет перевести задачу на алгебраический язык и эффективно использовать метод математического моделирования;

- избавление от необходимости наглядного представления сложных пространственных изображений, не требует сложных построений в проекциях;

- развитие графической и вычислительной культуры учащихся;

- помощь при сдаче ЕГЭ и дальнейшем изучении математики в высших учебных заведениях.

Всем выше сказанным объясняется актуальность выбора темы при написании выпускной работы.

Основное содержание работы. Метод координат — способ определять положение точки или тела с помощью чисел или других символов. Аналогично координатам вектора на плоскости, вводятся декартовы прямоугольные координаты вектора в пространстве. От произвольной точки O откладывают три некомпланарных попарно взаимно перпендикулярных единичных вектора $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ то есть $\vec{i} \perp \vec{j}, \vec{j} \perp \vec{k}, \vec{k} \perp \vec{i}$, $|\vec{i}| = |\vec{j}| = |\vec{k}| = 1$.

Определение 1: Три вектора в пространстве называются компланарными, если они лежат в одной плоскости.

Упорядоченная тройка векторов $(\vec{i};\ \vec{j};\ \vec{k})$ называется декартовым прямоугольным ортонормированным базисом векторов в пространстве, а векторы $\vec{i};\ \vec{j};\ \vec{k}$ называются базисными (координатными) векторами.

Базисными векторами $\vec{i}\ \vec{j}, \vec{k}$ отложенными от точки *O*, определяются три взаимно перпендикулярные направленные прямые, которые называются координатными осями и обозначаются соответственно *Ox*, *Oy* и *Oz*. При этом говорят, что в пространстве задана декартова прямоугольная система координат, которую обозначают *Oxyz*.

Определение 2: Векторы называются коллинеарными, если они лежат на одной прямой или на параллельных прямых.

Коллинеарные векторы могут быть сонаправлены (иметь одно направление) или противоположно направлены.

Определение 3: Скалярным произведением двух векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называется число, равное произведению их длин на косинус угла между ними [3]. Если обозначить скалярное произведение через $\vec{a}\vec{b}$ = $|\vec{a}||\vec{b}|$cosφ. Скалярным квадратом вектора *a* называется скалярное произведение вектора *a* на себя $\vec{a}^2$ = $\vec{a}\vec{a}$ = $|\vec{a}||\vec{a}|$cos0 = $|a|^2$, т.е. скалярный квадрат его длины равен квадрату его длины.

Из определения скалярного произведение векторов следует, что угол φ между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$ находится с помощью формулы

$$cos\,\varphi = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|} = \frac{|x_1\,x_2 + y_1\,y_2 + z_1\;z_2\,|}{\sqrt{x_1^2+y_1^2+z_1^2}\,\sqrt{x_2^2+y_2^2+z_2^2}} \qquad (1)$$

Проекцией вектора $\overrightarrow{a}$ на ось вектора $\vec{b}$ называется число, равное произведению длины вектора $\vec{a}$ на косинус угла φ между векторами $\overrightarrow{a}$ и $\vec{b}$:

$$\text{Пр.}_{\text{b}}\;\vec{a} = |\vec{a}|\cos\varphi.$$

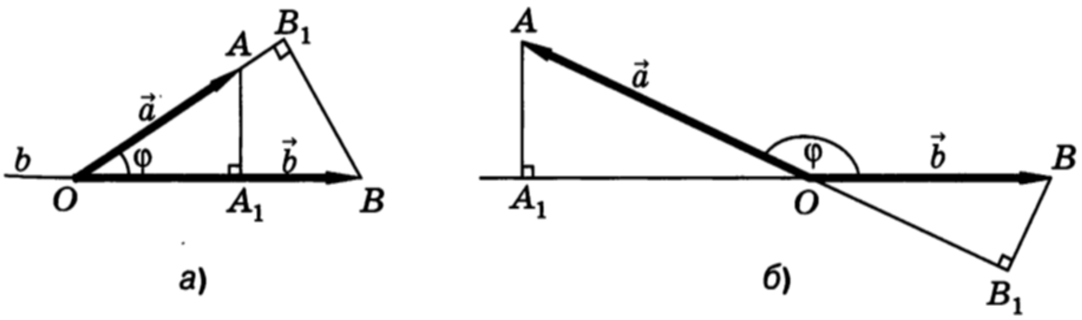

Рисунок 1 – Проекция вектора на ось

Стоит отметить, что проекция одного вектора на направление второго может быть положительной (при О < φ < 90°, рисунок 1, *а),* отрицательной (при 90° < φ < 180°, рисунок 1, б) или равной нулю (при φ = 90°).

Рассмотрим решение простейших задач стереометрии в координатах.

а) Расстояние между двумя точками. Пусть даны две точки А $(x_1;\, y_1;\, z_1)$ и В $(x_2;y_2;z_2)$. Тогда векторы $\overrightarrow{\text{OA}}$ и $\overrightarrow{\text{OB}}$ имеют координаты: $\overrightarrow{\text{OA}}$ $(x_1;\, y_1;\, z_1)$, $\overrightarrow{\text{OB}}$ $(x_2;y_2;z_2)$. По правилу вычитания векторов, заданных своими координатами, находим: $\overrightarrow{\text{OB}} - \overrightarrow{\text{OA}} = \overrightarrow{\text{AB}}\,(x_1 - x_2;\; y_1 - y_2;\; z_1 - z_2)$.

Расстояние $|\text{AB}|$ между точками А и В равно длине вектора $\overrightarrow{\text{AB}}$, то есть

$|\text{AB}| = \left|\overrightarrow{\text{AB}}\right| = \sqrt{\overrightarrow{\text{AB}}^2}$. В координатном виде это означает:

$\rho(\text{A};\text{B}) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_1 - z_2)^2}$

Из этого следует, что что если вектор $\overrightarrow{\text{AB}}$ задан координатами начала А$(x_1;\, y_1;\, z_1)$ и конца В $(x_2;y_2;z_2)$, то его длина $\left|\overrightarrow{\text{AB}}\right|$ находиться по формуле

$$\left|\overrightarrow{\text{AB}}\right| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_1 - z_2)^2}$$

б) Деление отрезка в заданном отношении.

Точка M делит отрезок M_1M_2 в отношении α, если $\left|\frac{\overrightarrow{M_1M}}{\overrightarrow{MM_2}}\right| = \alpha$. Найдем координаты точки M. На рисунке 2 изображён отрезок и его проекция на ось Ox.

Запишем векторное равенство $\overrightarrow{M_1M} = \alpha\overrightarrow{MM_2}$ и его проекции на оси координат.

$$\begin{cases} x - x_1 = \alpha(x_2 - x) \\ y - y_1 = \alpha(y_2 - y) \\ z - z_1 = \alpha(z_2 - z) \end{cases} \Rightarrow x = \frac{x_1+\alpha x_2}{1+\alpha}, y = \frac{y_1+\alpha y_2}{1+\alpha}, z = \frac{z_1+\alpha z_2}{1+\alpha}.$$

В частном случае $\lambda = 1$, то есть, когда точка M – середина отрезка, получаем, что координаты середины отрезка равны средним арифметическим координатам концов:

$$x_c = \frac{x_1+x_2}{2}, y_c = \frac{y_1+y_2}{2}, z_c = \frac{z_1+z_2}{2}$$

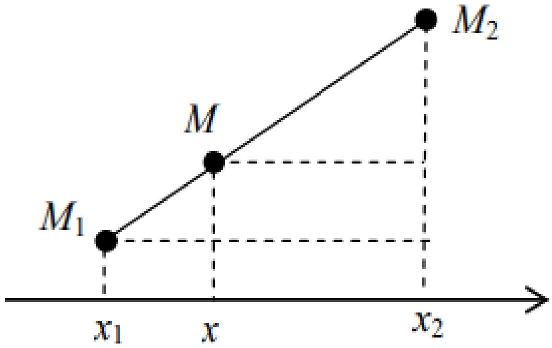

Рисунок 2 – Деление отрезка в заданном отношении

Рассмотрим уравнение плоскости. Пусть даны точка M_0 $(x_0;\ y_0;\ z_0)$ и ненулевой вектор $\vec{n}(A;\ B;\ C)$ $\vec{n} \neq \vec{0}$, то есть $A^2 + B^2 + C^2 \neq 0$. Тогда через точку M_0 проходит только одна плоскость (рисунок 3), для которой вектор $\vec{n}$ является перпендикулярным. Обозначим эту плоскость, α (она однозначно определяется точкой M_0 и вектором нормали $\vec{n}$).

Для вывода уравнения плоскости α определим то свойство, которым обладают лишь точки плоскости α по отношению к точке M_0 и вектору $\vec{n}$.

Так как $\vec{n} \perp \alpha$, то вектор $\vec{n}$ перпендикулярен любому вектору плоскости α. Поэтому, если M $(x;\ y;\ z)$ - произвольная точка плоскости α, то $\vec{n} \perp \overrightarrow{M_0M}$.

Это означает, что скалярное произведение векторов $\vec{n}$ и $\overrightarrow{M_0M}$ равно 0:

$$\vec{n} \cdot \overrightarrow{M_0M} = 0 \qquad (2)$$

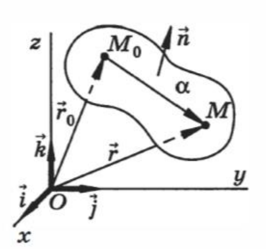

Рисунок 3 – Вектор нормали к плоскости

Равенство (2) выражает характеристическое свойство точек плоскости α (необходимое и достаточное условие принадлежности точки M плоскости α); для любой точки M пространства, не принадлежащей плоскости α, условие $\vec{n} \cdot \overrightarrow{M_0M} = 0$ не выполняется, так как векторы $\vec{n}$ и $\overrightarrow{M_0M}$ не перпендикулярны.

Равенство (2) называют векторным уравнением плоскости α (или уравнением плоскости α в векторной форме).

Так как вектор $\overrightarrow{M_0M}$ имеет координаты: $\overrightarrow{M_0M}(x - x_0;\ y - y_0;\ z - z_0)$, то векторное уравнение (2) плоскости принимает в координатной форме вид:

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0 \qquad (3)$$

Раскрывая скобки в левой части уравнения (3) и обозначая $D = -(Ax_0 + By_0 + Cz_0)$, получим уравнение

$$Ax + By + Cz + D = 0, \qquad (4)$$

которое называется общим уравнением плоскости.

В общем уравнении (4) плоскости коэффициенты *A, B, C* являются координатами ненулевого вектора $\vec{n}$, поэтому

$$A^2 + B^2 + C^2 \neq 0 \qquad (5)$$

(иначе говоря, коэффициенты *A, B* и *C* не равны нулю одновременно).

Таким образом, любой плоскости α пространства в системе прямоугольных координат *Oxyz* соответствует линейное уравнение $Ax + By + Cz + D = 0$ с тремя переменными *x, y, z* при условии $A^2 + B^2 + C^2 \neq 0$.

Справедливо обратное утверждение: любое уравнение вида (4) при условии (5) является в системе прямоугольных координат *Oxyz* уравнением некоторой плоскости.

В самом деле, уравнение (4) имеет бесконечное множество решений. Пусть $(x_0; y_0; z_0)$ какое-нибудь одно из них. Тогда справедливо равенство

$$Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D = 0 \tag{6}$$

Вычитая из уравнения (4) равенство (6), получаем уравнение

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0 \tag{7}$$

Это уравнение является уравнением плоскости, которая проходит через точку $(x_0;\ y_0;\ z_0)$ перпендикулярно вектору $\vec{n}(A;\ B;\ C)$ и, следовательно, является единственной.

Теорема 1: Каждое уравнение первой степени $Ax + By + Cz + D = 0$ при условии $A^2 + B^2 + C^2 \neq 0$ задает в прямоугольной системе координат *Oxyz* единственную плоскость, для которой вектор $\vec{n}(A;\ B;\ C)$ является вектором нормали .

Угол между двумя плоскостями α и β, заданными уравнениями соответственно $A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$ и $A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$, удобно связать с углом между векторами их нормалей $\overrightarrow{n_1}(A_1;\ B_1;\ C_1)$ и $\overrightarrow{n_2}(A_2;\ B_2;\ C_2)$ (Рисунок 4). Именно,

$$\cos\angle(\alpha;\ \beta) = |\cos\angle(\overrightarrow{n_1};\overrightarrow{n_2})| = \frac{|A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2|}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2}\cdot\sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}.$$

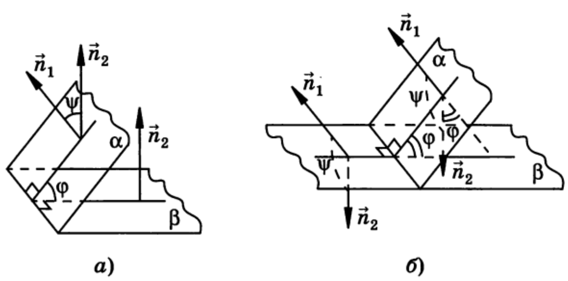

Рисунок 4 – Угол между плоскостями

Рассмотрим прямую в пространстве в координатах.

Вектор $\overrightarrow{AM}$ называется направляющим вектором прямой l, если отрезок AM параллелен прямой l или лежит на ней (в таком случае также говорят, что вектор $\overrightarrow{AM}$ параллелен прямой l).

$$\frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b} = \frac{z - z_0}{c} \tag{8}$$

Равенство (8) называются каноническим уравнением прямой, в которых числа *a, b, c* - координаты направляющего вектора данной прямой.

Косинус угла между прямыми может быть найден с помощью формулы:

$$\cos\varphi = \frac{|a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3|}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2} \cdot \sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2}}. \tag{9}$$

Уравнения прямой по двум ее точкам записывается в следующем виде:

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1}, \tag{10}$$

Или

$$\begin{cases} x = x_1 + t(x_2 - x_1), \\ y = y_1 + t(y_2 - y_1), \\ z = z_1 + t(z_2 - z_1), \end{cases} \quad \text{где } t \in R,$$

Расстояние от точки до плоскости в координатах находится по формуле

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} \tag{11}$$

Определение 4: Уравнение *f (x, y, z)* = 0 называется уравнением поверхности *Ф,* если этому уравнению удовлетворяют координаты *x, y, z* любой точки *M* этой поверхности и не удовлетворяют координаты никакой точки пространства, не принадлежащей поверхности *Ф.*

Уравнение сферы имеет вид:

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2 = R^2 \tag{12}$$

Например, сфера с центром в точке (1; -2; 3) и радиусом 5 имеет уравнение

$(x - 1)^2 + (y + 2)^2 + (z - 3)^2 = 25$ или после преобразований

$x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4y - 6z - 11 = 0.$

Сфера, центр, которой совпадает с началом системы: координат ($a = b = c = 0$), задается уравнением

$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2 \tag{13}$$

Из уравнений (12) и (13) следует, что сфера — это поверхность второго порядка. Наблюдается аналогия с окружностью: которая на плоскости является линией второго порядка.

После изучение пройденного материала ученикам предлагается решить тесты трех уровней сложности: базовый, повышенный и высокий. В качестве примера приведем один тест базового уровня сложности.

Вариант 1

Вариант 1

1.Какая пара векторов из представленных ниже является коллинеарной?

а) $\overline{a}$ (3; 4; 5) и $\overline{b}$ (6; 8; 10)

б) $\overline{p}$ (2; -3; 3) и $\overline{d}$ (4; -6; 2)

в) $\overline{y}$ (1; -2; 1) и $\overline{j}$ (3; 1; 2)

2.Найдите длину вектора $\vec{a}$, если $\vec{a}$ с координатами ($2\sqrt{3}$; -6; 1)

а) $3\sqrt{8}$

б) 7

в) $\sqrt{43}$

3.Вычислите расстояние между точками A (9; 3; -5) и B (2; 10; -5)

а) $7\sqrt{2}$

б) $3\sqrt{22}$

в) 7

4.Найдите расстояние от точки A (-1; 3; 0) до плоскости, заданной уравнением:

$$x - 3y - 2z + 5 = 0$$

а) $-\frac{3}{\sqrt{14}}$

б) $\frac{5}{\sqrt{14}}$

в) $\frac{3}{\sqrt{14}}$

5.Вычислите расстояние от начала координат до плоскости

$$2x + 3y - 6z + 14 = 0$$

а) 1

б) $1\frac{6}{7}$

в) 2

6. Найдите координаты точки С середины отрезка АВ, заданного точками А $(-1;\ 3;\ 1)$ и В $(6;\ 5;\ -3)$

а) С (2,5; 4; -1)

б) С (2,5; 4; 2)

в) С (2,5; 4; -2)

7.Найдите координаты точки В, если известны координаты точки С (1; 5; 2), середины отрезка АВ и точки А (-1; 3; 10)

а) В (1; 7; -6)

б) В (0; 4; 6)

в) В (3; 7; -6)

8.Определите вид треугольника АВС, если вершины имеют следующие координаты: А (1; 0; 0), В (1; 3; 4), С (4; 3; 0)

а) Равнобедренный

б) Равносторонний

в) Разносторонний

9.Найдите угол между плоскостями: $x - 2y + 3 = 0$ и $2x + y + z - 1 = 0$

а) 180°

б) 90°

в) 45°

10.Найдите угол между прямой и плоскостью: $x + y + z - 2 = 0$, прямая проходит через точки А (2; -1; 4) и В (3; 2; 2) *а)* $\arcsin \frac{\sqrt{42}}{21}$

б) $180°$

в) $\sqrt{14}$

Заключение. В данном электронном образовательном курсе рассмотрена тема «Координатный метод решения геометрических задач».

Основой образовательного процесса в дистанционном обучении является целенаправленная и контролируемая самостоятельная работа учащегося, который имеет возможность учиться в удобное для себя время по индивидуальному расписанию, используя комплект специализированных учебных материалов и имея согласованную возможность общения с преподавателем в процессе обучения.

Несомненно, разработка подобных курсов и их применение на уроках необходима по основным темам, входящим в курс школьной математики. Данные курсы позволяют в довольно короткий срок повторить, освежить в памяти, а кому-то и выучить заново теоретический материал, попрактиковаться с задачами разного уровня сложности и оценить полученный результат. Более того воспользоваться данным курсом учащиеся могли бы самостоятельно, без помощи педагога, так как структура курса достаточна проста и понятна.

После апробации пришли к выводу, что разработанный курс заданий по теме: «Координатный метод решения геометрических задач», предназначенный для уроков математики, а также элективных курсов по математике, послужит хорошей основой для усвоения данной темы на более глубоком уровне.

Таким образом, практическое значение данной темы заключается в том, что этот электронный образовательный курс могут использовать учащиеся средних общеобразовательных школ, студенты средних специальных учебных заведений, студенты педагогических вузов и преподаватели.