МИНОБРНАУКИ РОССИИ
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«САРАТОВСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ Н.Г. ЧЕРНЫШЕВСКОГО

кафедра математического анализа

ЭЛЕКТРОННЫЙ ОБРАЗОВАТЕЛЬНЫЙ КУРС «ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТИ В ШКОЛЬНОЙ МАТЕМАТИКЕ»

АВТОРЕФЕРАТ МАГИСТЕРСКОЙ РАБОТЫ

студентки 3 курса 322 группы

направления **44.04.01 – Педагогический образование**

механико-математического факультета

Трофименко Таисии Сергеевны

Научный руководитель
доцент, к.ф.-м. н, доцент ________________ Е.В.Разумовская

Заведующий кафедрой
и.о.зав.кафедрой, к.ф.-м.н.,
доцент ________________ Е.В.Разумовская

Саратов 2024

Введение. Магистерская работа представляет собой материалы для разработки электронного образовательного курса «Элементы теории вероятности в школьной математике». Данный образовательный курс предназначен для учащихся 7- 11 классов и содержит элементы, относящиеся как к обучению на базовом уровне, так и в классах с углубленным изучением математики. Некоторые аспекты также могут быть рассмотрены на факультативных занятиях.

Актуальность работы объясняется тем, что теория вероятностей занимает важное место в процессе обучения математике. Эта область математики связана с решением множества практических задач, встречающихся в статистике, физике, экономике и других науках.

Изучение теории вероятностей способствует формированию у учащихся аналитического мышления, способности оценивать степень неопределённости в реальной жизни и принимать взвешенные решения.

Навыки решения задач на основе теории вероятностей имеют огромное значение, и их развитие требует серьёзных усилий как со стороны учеников, так и со стороны преподавателей.

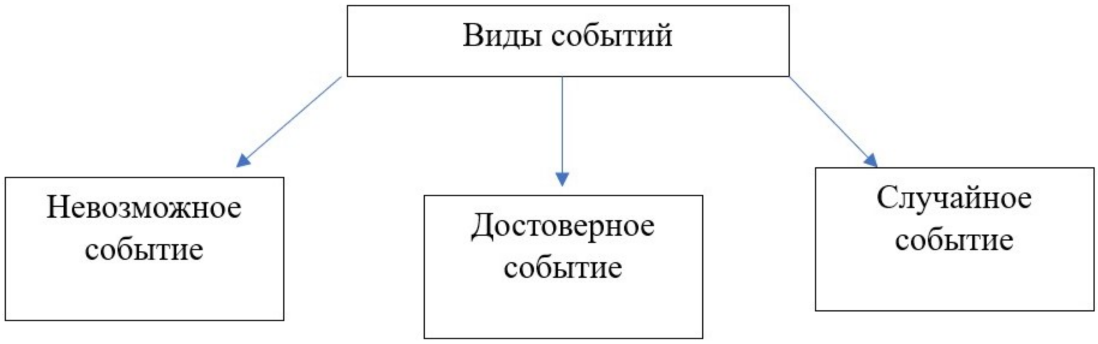
Элементы теории вероятностей вводятся уже в начальной школе через знакомство с простыми играми случая и задачами на подсчёт вариантов. Однако основное внимание уделяется этой теме начиная с 7 класса, когда школьники начинают изучать комбинаторику и основы статистики. Важным моментом является глубокое понимание базовых понятий, таких как классическая вероятность, условная вероятность и независимость событий. Недостаточные знания в этих областях могут значительно усложнить дальнейшее усвоение материала и понимание более сложных тем.

Основное содержание работы. Рассмотрим важные определения.

Определение 1. Теория вероятностей – это раздел математики, в котором изучаются закономерности случайных событий.

Понятие события является основным, не определяемым. Его можно охарактеризовать как некоторое явление, которое происходит в результате осуществления какого-либо определённого комплекса условий (опыта, испытания).

Принято различать три типа событий.



Определение 2. Невозможное событие - это такое событие, которое не может произойти в результате данного испытания.
Определение 3. Достоверное событие - это такое событие, которое обязательно происходит в результате данного испытания.
*Определение 4.*Случайное событие - это такое событие, которое может произойти или не произойти в результате данного испытания. Другими словами: появление случайного события можно предсказать только с некоторой долей уверенности, которую можно выразить вполне определенным положи- тельным числом меньшим 1.
Определение 5. Пусть опыт S имеет N равновозможных исходов $\omega_1, \omega_2, ..., \omega_N$, исчерпывающих все возможные элементарные исходы данного опыта. Пусть событию A благоприятствуют ровно m этих исходов. Тогда вероятностью события A называется отношение $\frac{m}{N}$:

$$P(A) = \frac{m}{N},$$

где
m — число исходов, благоприятствующих событию A,
N — общее число исходов опыта.

Из этого определения следует, что для произвольного события A выполняются следующие утверждения.

1. Если A - случайное событие, то $0 \leq P(A) \leq 1$.
2. Если $A = \varnothing$ - невозможное событие, то $P(\varnothing) = 0$.
3. Если $A = \Omega$ - достоверное событие, то $P(\Omega) = 1$.

Это определение вероятности называется классическим. Достоинство определения — вероятность события можно определить до опыта.

При решении задач на классическую вероятность приходится подсчитывать число способов (комбинаций), с помощью которых может осуществиться некоторое событие (действие). Задачи такого рода называют комбинаторными.

Рассмотрим основные понятия в комбинаторике.

Определение 6. Перестановкой из n называют комбинацию, имеющую n элементов, взятых из наперед заданных n элементов без повторений.

$$P_n = n!,$$

где $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot ... \cdot (n-1) \cdot n$ - называют факториалом.

Замечание. $1! = 1,\ 0! = 1$.

Определение 7. Размещением n по m называют комбинацию, имеющую m элементов, взятых из наперед заданных n элементов без повторений.

$$A_n^m = \frac{n!}{(n-m)!}$$

Определение 8. Сочетание из n по m называют комбинацию, имеющую m элементов, взятых из наперед заданных n элементов без повторений.

$$C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!}$$

Замечание. Стоит отметить, что в комбинаторике существуют также формулы для случаев, когда элементы могут повторяться. Рассмотрим несколько важных формул. Данные формулы представлены в соответствии с рисунком 1.

Замечание. Отметим, что данные формулы с повторением обозначают, как $\overline{P_n},\ \overline{A_n^m},\ \overline{C_n^m}$.

Определение 9. Если возможность появления точки внутри некоторой области или пространства определяется не положением этой области и ее границами, а только ее мерой, т.е. длиной, площадью, объемом, то вероятность появления случайной точки внутри некоторой области находится как отно-

	Перестановки	**Размещения**	**Сочетания**
Без повторов	$P_n = n!$	$A_n^m = \frac{n!}{(n-m)!}$	$C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!}$
С повторами	$\overline{P_n} = \frac{n!}{k_1!\cdot k_2!\cdot \ldots \cdot k_p!}$ $k_1 + k_2 + \ldots + k_p = n$	$\overline{A_n^m} = n^m$	$\overline{C_n^m} = C_{n+m-1}^m = \frac{(n+m-1)!}{m!(n-1)!}$

Рисунок 1 — Формулы в комбинаторике с повторениями

шение меры этой области к мере всей области, в которой может появиться данная точка:

$$P(A) = \frac{Mes(A)}{Mes(\Omega)},$$

где $Mes(A)$ - мера множества A, $Mes(\Omega)$ - мера множества элементарных исходов.

Теорема 1. (Произведение вероятностей)

Вероятность произведения двух событий А и В равна произведению вероятности события А на вероятность события В, при условии, что событие А уже наступило: $P(A \cdot B) = P(A) \cdot P_A(B)$.

Если события А и В независимы, то

$$P_B(A) = P(A); P_A(B) = P(B) \quad \text{и} \quad P(AB) = P(A)P(B).$$

Теорема 2. (Сложение вероятностей)

Пусть А и В — совместные события. Тогда вероятность появления хотя бы одного из этих событий (т.е. вероятность суммы событий А и В) равна сумме вероятностей этих событий без вероятности произведения этих событий

$$P(A + B) = P(A) + P(B) - P(AB)$$

Если события А и В не могут произойти одновременно, то есть если $AB = \varnothing$, то события А и В называют несовместными событиями.

В этом случае теорема сложения имеет более простой вид:

$$P(A+B) = P(A) + P(B).$$

*Определение 10.*Случайная величина — это величина, значение которой зависит от того, каким элементарным событием закончился данный случайный опыт. Разным элементарным событиям при этом могут соответствовать разные значения случайной величины.

Определение 11. Распределение Бернулли - это дискретное распределение вероятностей, которое моделирует случайный эксперимент с двумя возможными исходами: успех или неудача. Вероятность успеха обозначается через p, а вероятность неудачи через $q = 1 - p$. Случайная величина X, имеющая распределение Бернулли, принимает значение 1 в случае успеха и 0 в случае неудачи. Функция вероятности и функция распределения X имеют вид:

$$P(X = k) = \begin{cases} q, & \text{если } k = 0, \\ p, & \text{если } k = 1. \end{cases}$$

$$F(X) = P(X \leq k) = \begin{cases} 0, & \text{если } k < 0, \\ q, & \text{если } 0 \leq k < 1, \\ 1, & \text{если } k \geq 1. \end{cases}$$

Среди основных свойств распределения Бернулли можно выделить следующие:

- Математическое ожидание X равно $M(X) = p$.
- Дисперсия X равна $D(X) = pq$.

Замечание.

$$P_n(m) = C_n^m p^m (1-p)^{n-m} \tag{1}$$

Эта формула 1 называется формулой Бернулли.

Определение 12. Математическим ожиданием случайной величины X определяется как

$$M(X) = x_1p_1 + x_2p_2 + x_3p_3 + \cdots + x_np_n$$

Математическое ожидание $M(X)$ называет также ожидаемым значением случайной величины X, средним значением случайной величины X.

Свойства математического ожидания:

Решение некоторых задач элементарного анализа легче провести, если воспользоваться свойствами математического ожидания.

Отметим наиболее важные свойства.

Свойство 1. Пусть X — случайная величина, a — некоторое число. Рассмотрим случайную величину $Y = aX$. Тогда

$$M(Y) = aM(X).$$

Свойство 2. Пусть U и V — две случайные величины. Тогда $U + V$ — также случайная величина, и при этом:

$$M(U + V) = M(U) + M(V).$$

Это значит, что математическое ожидание случайных величин равно сумме их математических ожиданий.

Определение 13.

Дисперсией случайной величины X называют математическое ожидание случайной величины $(X - M(X))^2$.

Обозначают дисперсию случайной величины через $D(X)$. Итак, по определению

$$D(X) = M((X - M(X))^2).$$

Очевидно, что $D(X) \geq 0$. Чем меньше дисперсия, тем более кучно значения случайной величины группируются около математического ожидания $M(X)$. Поэтому слово «дисперсия» происходит от латинского dispersio, что означает «рассеяние», «разброс».

Если же $D(X) = 0$, то случайная величина X принимает единственное значение.

В таком случае говорят, что случайная величина постоянна.

Определение 14. Вместо дисперсии часто используется мера рассеивания, которая называется средним квадратичным или стандартным отклонением и равна арифметическому квадратному корню из дисперсии. Стандартное отклонение часто обозначают греческой буквой σ (сигма).

$$\sigma = \sqrt{D(X)}$$

После изучение пройденного материала ученикам предлагается решить тесты трех уровней сложности: базовый, повышенный и высокий.

В качестве примера приведем один тест повышенного уровня сложности.

Вариант 1

1. Каждому из трех определений в левом столбце соответствует одно из утверждений из правого столбца.

Установите соответствие между ними.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ	ПОНЯТИЕ
А) Невозможное событие	1) событие, которое может произойти или не произойти в результате данного испытания.
Б) Случайное событие	2) событие, которое обязательно происходит в результате данного испытания.
В) Достоверное событие	3) событие, которое не может произойти в результате данного испытания.

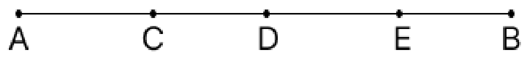
Запишите в ответ цифры, расположив их в порядке, соответствующим буквам.

Ответ:

А	Б	В

2. На экзамене 35 билетов, Денис не выучил 7 из них. Найдите вероятность того, что ему попадется выученный билет.

3. Отрезок AB разбит точками на 4 равных отрезка.



Случайным образом точка X помещают на отрезке AB. Найдите вероятность того, что точка $X \in BE$.

4. Опыт состоит в том, что из множества $U = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ наугад выбирают 1 элемент. В этом опыте рассматривают следующие события:

- A - выбранный элемент принадлежит множеству $\{1, 3\}$.
- B - выбранный элемент принадлежит множеству $\{1, 2, 5\}$.
- C - выбранный элемент принадлежит множеству $\{4, 5\}$.

Какой элемент мог быть выбран, если произошло событие:

а) $A \cap B$

б) $\overline{B}$

в) $A \cup B \cup C$

5. Найдите вероятность того, что в схеме Бернулли с параметрами n и p число успешных исходов равно m, если:

а) $n = 8$, $p = 0.5$, $m = 6$.

6. Помещение освещается фонарём с 2 лампами. Вероятность перегорания одной лампы в течение года равна 0.03. Найдите вероятность того, что в течение года обе лампы перегорят.

7. Игральную кость бросали до тех пор, пока сумма всех выпавших очков не превысила число 3. Какова вероятность того, что для этого потребовалось ровно два броска? Ответ округлите до сотых.

8. Распределение случайной величины z задано таблицей, в которой пропущено 1 значение:

Значение z	1	3	7	8	10
Вероятность	0.1	0.35	0.25	z	0.15

Найти вероятности:

а) $p(z < 6)$

б) $p(z = 8)$

Заключение. Электронный образовательный курс по теме «Элементы теории вероятности в школьной математике» предлагает эффективный подход к обучению, основанный на целенаправленной и контролируемой самостоятельной работе учащихся. Такой формат позволяет ученикам заниматься в удобное для них время, по индивидуальному графику, пользуясь специально разработанным набором учебных материалов и поддерживая контакт с преподавателем по мере необходимости.

Практическую значимость данного электронного образовательного курса определяет его доступность для широкого круга пользователей: учащихся средних школ, студентов колледжей, будущих педагогов и действующих учителей. Теоретический материал курса содержит информацию, отсутствующую в стандартных школьных учебниках. Изучение темы «Элементы теории вероятности в школьной математике» важно на всех этапах школьного образования, так как она служит основой для решения множества прикладных задач.