

МИНОБРНАУКИ РОССИИ

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования

**«САРАТОВСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ИМЕНИ Н. Г. ЧЕРНЫШЕВСКОГО»**

Кафедра дифференциальных уравнений и математи-
ческой экономики

**РЕЗОЛЬВЕНТНЫЙ ПОДХОД В МЕТОДЕ ФУРЬЕ ДЛЯ
НЕОДНОРОДНОГО ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ**

АВТОРЕФЕРАТ БАКАЛАВРСКОЙ РАБОТЫ

студента 4 курса 411 группы
направления 01.03.02 — Прикладная математика и информатика

механико-математического факультета

Громова Михаила Дмитриевича

Научный руководитель

доцент, к. ф.-м. н., доцент

В. В. Корнев

Заведующий кафедрой

д. ф.-м. н., профессор

С. И. Дудов

Саратов 2025

Введение. Область исследования функционального анализа чрезвычайно обширна. Обычно под функциональным анализом понимают раздел математики, основным предметом изучения которого являются векторные (линейные) пространства, наделённые некоторой дополнительной структурой (скалярное произведение, норма, топология и т.д.), и линейные функции (операторы), определённые на этих пространствах и удовлетворяющие заданной структуре в некотором особом смысле. Своё начало функциональный анализ находит в изучении пространств функций и свойств функциональных преобразований, таких, например, как преобразование Фурье.

Резольвентный подход, интегрирующий методы функционального анализа и спектральной теории операторов, открывает новые возможности для анализа неоднородных гиперболических уравнений. Его суть заключается в сведении исходной задачи к изучению резольвенты оператора, порождающего уравнение, что позволяет эффективно работать с неоднородностями и исследовать свойства решений в терминах спектральных данных. Сочетание резольвентного подхода с методом Фурье создаёт гибридную методику, объединяющую преимущества спектральных разложений и аналитической теории операторов. Это особенно актуально для задач с переменными коэффициентами, нерегулярными границами или нелокальными условиями, где классические методы становятся малоэффективными.

Целью работы является исследование резольвентного подхода к методу Фурье получения классического решения в смешанных задачах для неоднородного волнового уравнения с закрепленными концами. Этот подход позволяет дать строгое обоснование метода Фурье, используя меньше требований на начальные условия.

Актуальность работы обусловлена потребностями современной математической физики в точных аналитических методах исследования начально-краевых задач для дифференциальных уравнений в частных производных.

Рассматривается смешанная задача:

$$\frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} - q(x)u(x, t) + f(x, t), \quad (x, t) \in Q = [0, 1] \times (-\infty, \infty), \quad (1)$$

$$u(0, t) = u(1, t) = 0 \quad (2)$$

$$u(x, 0) = \varphi(x), \quad u'_t(x, 0) = \psi(x), \quad (3)$$

где все функции предполагаются комплекснозначными, причем $f(x, t)$ непрерывна в Q

$$q(x) \in C[0, 1], \quad \varphi(x) \in C^2[0, 1], \quad \psi(x) \in C^1[0, 1] \quad (4)$$

Для существования классического решения (1) - (3) необходимо выполнение:

$$\varphi(0) = \varphi(1) = \psi(0) = \psi(1) = 0, \quad (5)$$

$$\varphi''(0) + f(0, 0) = \varphi''(1) + f(1, 0) = 0. \quad (6)$$

Также потребуем:

$$f'_t(x, t) \in C(Q) \quad (7)$$

Задача состоит в обосновании резольвентного подхода для метода Фурье в смешанной задаче для неоднородного волнового уравнения с закрепленными краевыми условиями при минимальных требованиях на исходные данные.

Структура бакалаврской работы. Бакалаврская работа состоит из введения, 4 разделов и заключения.

В первом разделе вводится понятие резольвенты, описываются её аналитические свойства. Также приводится связь между проекторами Рисса и резольвентой. Дается теорема о формальном решении через резольвенту и спектральные данные.

Во втором разделе рассматриваются случаи однородного и неоднородного уравнений. Анализируется влияние неоднородности на решение.

В третьем разделе приводится доказательство существования классического решения и его представление через резольвенту.

В четвёртом разделе приводятся результаты поиска R_λ , где для R_λ имеет место формула $R_\lambda g = z_2(x, \rho)(g, z_1) - v(x, \rho)(g, z_2) + M_\rho g$,
 $(g, z) = \int_0^1 g(x)z(x)dx$, $v(x, \rho) = z_2(x, \rho)z_1(1, \rho)z_2^{-1}(1, \rho)$,
 $M_\rho g = \int_0^1 M(x, \xi, \rho)g(\xi)d\xi$, $M(x, \xi, \rho) = \begin{vmatrix} z_1(x, \rho) & z_2(x, \rho) \\ z_1(\xi, \rho) & z_2(\xi, \rho) \end{vmatrix}$.

В заключении перечислены достигнутые результаты и сформулированы основные выводы, сделанные по итогам выполнения бакалаврской работы.

Основное содержание работы. Резольвентой Фредгольма интегрального оператора A называется следующая оператор-функция:

$$R_\lambda(A) = (E - \lambda A)^{-1}A,$$

где E - единичный оператор, λ - комплексный параметр.

Комплексное число λ называется *регулярной точкой*, если оператор $(E - \lambda A)^{-1}$ ограничен.

Теорема 1.7. Если A — оператор Гильберта-Шмидта, то резольвента $R_\lambda(A)$ есть мероморфная оператор-функция параметра λ .

При изучении свойств резольвенты изучаются свойства проекторов. Оператор проектирования P обладает следующими свойствами:

- а) $P^2 = P$ (идемпотентность)
- б) $P^* = P$ (самосопряжённость)
- в) $\|P\| = 1$ (норма)
- г) $(Pf, f) \geq 0$ (положительная полуопределённость)

Теорема 1.14 (Критерий проектора). Линейный самосопряжённый оператор T в гильбертовом пространстве R является проектором тогда и только тогда, когда $T^2 = T$

Пусть γ - какой-нибудь контур в λ -плоскости, не проходящий через характеристические значения. Оператор

$$P = -\frac{1}{2\pi i} \int_\gamma R_\lambda d\lambda$$

называется *проектором Рисса*.

Теорема 1.19. $P^2 = P$.

Теорема 1.20. $AP = PA$.

Лемма 1.26. Имеет место следующая формула:

$$P_{\lambda_0} f = \sum_{j=1}^p (f, \psi_j) \varphi_j,$$

где $\{\psi_j\}_{j=1}^p$ — система биортогональная к $\{\varphi_j\}_{j=1}^p$.

Теорема 1.28. Имеет место формула

$$S_r(f, x) = -\frac{1}{2\pi i} \int_{|\lambda|=r} R_{\lambda} f d\lambda, \quad S_r(f, x) = \sum_{|\lambda_k| < r} (f, \psi_k) \varphi_k,$$

$\{\varphi_k\}_{k=1}^{\infty}$ — системы всех собственных и присоединённых функций для тех λ_k , для которых $|\lambda_k| < r$, $\{\psi_k\}_{k=1}^{\infty}$ — система биортогональная всей системе $\{\varphi_k\}_{k=1}^{\infty}$.

Нумерация $\{\varphi_k\}$ идёт в порядке возрастания модулей характеристических чисел с учётом кратности (т.е. каждому φ_k соответствует теперь только одно λ_k , или иначе, одно и то же λ_k повторяется столько раз, сколько ему соответствует линейно независимых собственных и присоединённых функций).

Замечание 2. Утверждение теоремы даёт важное представление частичной суммы $S_r(f, x)$ ряда Фурье по собственным и присоединённым функциям через интеграл по контуру от резольвенты. Это представление играет значительную роль в спектральной теории операторов.

Формальное решение задачи (1) — (3) методом Фурье возьмем в виде:

$$u(x, t) = -\frac{1}{2\pi i} \left(\int_{|\lambda|=r} + \sum_{n \geq n_0} \int_{\Gamma_n} \right) \left[(R_{\lambda} \varphi)(x) \cos \rho t + \right. \\ \left. + \frac{1}{\rho} (R_{\lambda} \psi)(x) \sin \rho t + \int_0^t (R_{\lambda} f)(x, \tau) \frac{\sin \rho(t - \tau)}{\rho} d\tau \right] d\lambda, \quad (8)$$

где:

- $R_\lambda f$ — значение резольвенты R_λ на функции $f(x, \tau)$ как функции x
- $r > 0$ — фиксированный параметр
- Контур $|\lambda| = r$ содержит внутри только те λ_n , номера которых меньше n_0
- На самом контуре $|\lambda| = r$ собственных значений нет
- Γ_n — контуры, окружающие отдельные собственные значения λ_n при $n \geq n_0$
- $\rho = \rho(\lambda)$ — некоторая функция спектрального параметра

Теорема 1.29. Если $u(x, t)$ — классическое решение задачи (1) - (3), то для него справедлива формула (8), причём ряд сходится равномерно по $x \in [0, 1]$ при каждом фиксированном t . [?]

Во втором разделе рассматриваются случаи однородного и неоднородного уравнений:

Случай однородного уравнения

Теорема 1.29. Для $z_2(x, \rho)$ имеет место формула:

$$z_2(x, \rho) = \frac{\sin px}{\rho} + \int_0^x K(x, t) \frac{\sin pt}{\rho} dt, \quad (9)$$

где $K(x, t)$ непрерывно дифференцируема по x и t , и $K(x, 0) \equiv 0$ ($K(x, t)$ не зависит от ρ).

Замечание 3. Формула (9) — это известная формула оператора преобразования.

Теорема 2.2. В полосе $|\Im \rho| \leq h$ ($h > 0$ и любое) имеют место асимптотические формулы:

$$\begin{aligned} z_1(x, \rho) &= \cos px + O(l/p), \\ z_1'(x, \rho) &= -\sin px + O(l), \\ z_2(x, \rho) &= \frac{\sin px}{\rho} + O(l/p^2), \\ z_2'(x, \rho) &= \cos px + O(l/p), \end{aligned}$$

где оценки $O(\dots)$ равномерны по $x \in [0, 1]$.

Лемма 2.5. Ряды

$$\sum a_{n,x}^{(j)}(x, t), \quad \sum a_{n,y}^{(j)}(x, t), \quad j = 0, 1, 2, \quad (10)$$

сходятся абсолютно и равномерно по $x \in [0, 1]$ и $t \in [-T, T]$, где $T > 0$ — любое фиксированное число.

Теорема 2.6. Пусть в задаче (1)–(3) $f(x, t) = 0$. Тогда ряд (8) сходится абсолютно и равномерно в $Q_T = [0, 1] \times [-T, T]$, где $T > 0$ — произвольное фиксированное число, и формальное решение (8) есть классическое решение этой задачи.

Случай неоднородного уравнения

Лемма 2.8. Пусть $F(t) \in C^2(\mathbb{R})$. Тогда существует функция $H(t) \in C^2(\mathbb{R})$, такая что

$$H(t+1) - H(t) = F(t), \quad t \in \mathbb{R}. \quad (11)$$

Теорема 2.9. При выполнении условия

$$f(0, 0) = f(1, 0) = 0$$

классическое решение задачи (1)–(3) в случае $q(x) = \varphi(x) = \psi(x) = 0$ существует и дается формулой

$$u(x, t) = -\frac{1}{2\pi i} \left(\int_{|\lambda|=r} + \sum_{n \geq m_0} \int_{\gamma_n} \right) \times \left(\int_0^t (R_\lambda^0 f)(x, \tau) \frac{\sin \rho(t - \tau)}{\rho} d\tau \right) d\lambda, \quad (12)$$

где $R_\lambda^0 f$ — значение R_λ^0 на функции $f(x, \tau)$ как функции x , причем ряд сходится равномерно по $x \in [0, 1]$ при любом фиксированном t .

В третьем разделе рассматривается основной случай. Для доказательства основной теоремы нам потребуются следующие факты.

Лемма 3.1. При $\rho \in \gamma_n$ имеют место асимптотические формулы

$$v^{(j)}(x, \rho) = v^{0(j)}(x, \rho) + O(\rho^{j-1}), \quad j = 0, 1, 2, \quad (13)$$

где оценки $O(\dots)$ равномерны по $x \in [0, 1]$.

Лемма 3.2. При $\rho \in \gamma_n$ имеют место формулы

$$\begin{aligned} (g, z_2) &= (n\pi + \mu)^{-1} [(g_1(\xi) \cos \mu\xi, \sin n\pi\xi) + (g_1(\xi) \sin \mu\xi, \cos n\pi\xi)], \\ (g, z_2 - z_2^0) &= (n\pi + \mu)^{-2} [(g_2(\xi) \cos \mu\xi, \cos n\pi\xi) - (g_2(\xi) \sin \mu\xi, \sin n\pi\xi)], \end{aligned}$$

где $\rho = n\pi + \mu$, $\mu \in \gamma_0$,

$$\begin{aligned} g_1(\xi) &= g(\xi) + \int_{\xi}^1 K(s, \xi) g(s) ds, \\ g_2(\xi) &= -g(\xi) K(\xi, \xi) + \int_{\xi}^1 K'_{\xi}(s, \xi) g(s) ds, \end{aligned}$$

$K(s, \xi)$ непрерывно дифференцируема по $s, \xi \in [0, 1]$.

Запишем формальное решение (8) в виде

$$u(x, t) = u_1(x, t) + u_2(x, t) + u_3(x, t) + u_4(x, t),$$

где

$$\begin{aligned} u_1(x, t) &= -\frac{1}{2\pi i} \left(\int_{|\lambda|=r} + \sum_{n \geq n_0} \int_{\gamma_n} \right) \left(\int_0^t (R_{\lambda} f_1) \frac{\sin \rho(t - \tau)}{\rho} d\tau \right) d\lambda, \\ u_2(x, t) &= -\frac{1}{2\pi i} \left(\int_{|\lambda|=r} + \sum_{n \geq n_0} \int_{\gamma_n} \right) (R_{\lambda} \psi) \frac{\sin \rho t}{\rho} d\lambda, \\ u_3(x, t) &= -\frac{1}{2\pi i} \left(\int_{|\lambda|=r} + \sum_{n \geq n_0} \int_{\gamma_n} \right) \left(\int_0^t (R_{\lambda} f_1 - R_{\lambda}^0 f_1) \frac{\sin \rho(t - \tau)}{\rho} d\tau \right) d\lambda, \\ u_4(x, t) &= -\frac{1}{2\pi i} \left(\int_{|\lambda|=r} + \sum_{n \geq n_0} \int_{\gamma_n} \right) \left(R_{\lambda} \varphi \cos \rho t + \int_0^t (R_{\lambda} f_2) \frac{\sin \rho(t - \tau)}{\rho} d\tau \right) d\lambda, \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} f_1(x, \tau) &= f(x, \tau) - f_2(x), \\ f_2(x) &= -\varphi''(x) + q(x)\varphi(x). \end{aligned}$$

Теорема 3.9. Если выполняются условия (4) - (7), то при любых $x \in [0, 1]$ и $t \in \mathbb{R}$ формальный ряд (8) сходится, и его сумма $u(x, t)$ является классическим решением задачи (1) - (3).

В четвёртом разделе вычисляется R_λ , где $z_1(x, \rho)$ и $z_2(x, \rho)$ решения уравнения $y'' - q(x)y + \rho^2 y = 0$ с начальными условиями $z_1(0, \rho) = z_2'(0, \rho) = 1$ и $z_1'(0, \rho) = z_2(0, \rho) = 0$. Функции $z_j(x, \rho)$ целые по ρ и даже по λ , где $\lambda = \rho^2$, а для R_λ имеет место формула

$$\begin{aligned} R_\lambda g &= z_2(x, \rho)(g, z_1) - v(x, \rho)(g, z_2) + M_\rho g, \\ (g, z) &= \int_0^1 g(x)z(x)dx, v(x, \rho) = z_2(x, \rho)z_1(1, \rho)z_2^{-1}(1, \rho), \\ M_\rho g &= \int_0^1 M(x, \xi, \rho)g(\xi)d\xi, \quad M(x, \xi, \rho) = \begin{vmatrix} z_1(x, \rho) & z_2(x, \rho) \\ z_1(\xi, \rho) & z_2(\xi, \rho) \end{vmatrix}. \end{aligned}$$

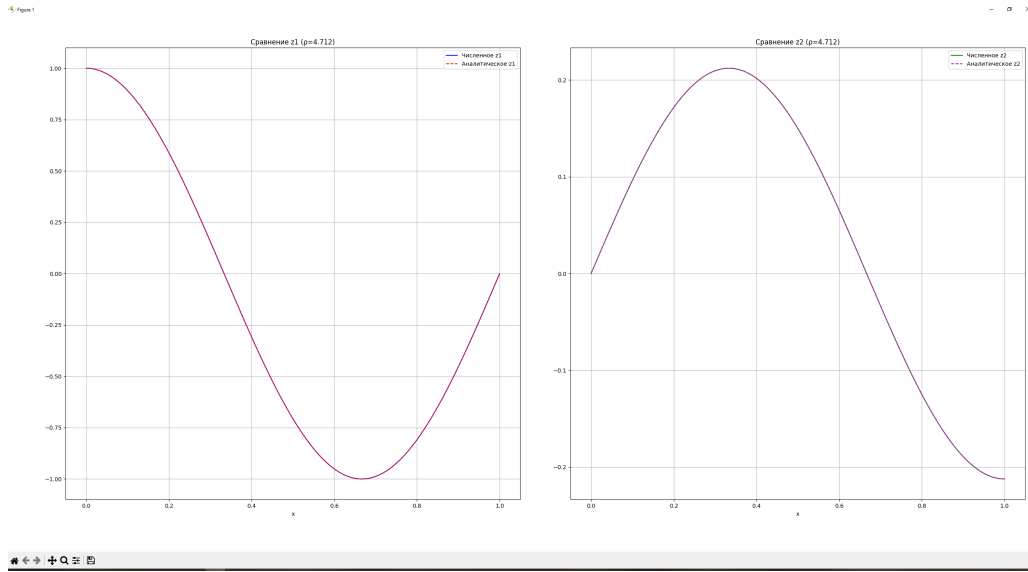


Рисунок 1 — Визуализация отладочного примера для проверки корректности работы программы. Численное решение для z_1 — синяя сплошная линия, аналитическое для z_1 — красная пунктирная. Численное решение для z_2 — зеленая сплошная линия, аналитическое для z_2 — фиолетовая пунктирная.

Заключение В данной работе был обоснован резольвентный подход для метода Фурье в смешанной задаче для неоднородного волнового уравнения

с комплексным потенциалом и закрепленными краевыми условиями при минимальных требованиях на исходные данные.

Были выполнены построения для R_λ и показано, что резольвента ведет себя ожидаемо при разных значениях ρ и $q(x)$. Например, при увеличении ρ амплитуда может уменьшаться, или меняться форма кривой.

Резольвентный подход демонстрирует универсальность для широкого класса гиперболических задач, сочетая аналитическую строгость с вычислительной эффективностью. Результаты работы открывают возможности для моделирования волновых процессов в сложных средах, что подтверждается успешным тестированием на модельных примерах.