МИНОБРНАУКИ РОССИИ

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования

«САРАТОВСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ Н.Г.ЧЕРНЫШЕВСКОГО»

Кафедра математического и компьютерного моделирования

Сильная сходящаяся ударная волна в идеальном газе переменной плотности

АВТОРЕФЕРАТ БАКАЛАВРСКОЙ РАБОТЫ

студента 4 курса 411 группы

направление 01.03.02 — Прикладная математика и информатика

механико-математического факультета

Алексеева Максима Алексеевича

Научный руководитель
старший преподаватель ______________ В.С. Кожанов

Зав. кафедрой
зав. каф., д.ф.-м.н., доцент ______________ Ю.А. Блинков

Саратов 2025

Введение. Изучение ударных волн имеет широкое применение в таких областях, как аэродинамика, астрофизика, ядерная физика и физика плазмы. Особый интерес представляют ударные волны, создаваемые сходящимся движением сферических или цилиндрических поршней в газовой среде. За последние десятилетия данное направление привлекло значительное внимание исследователей. Сходящиеся ударные волны, особенно в контексте идеального газа, представляют собой важный объект как физического, так и математического анализа, начиная с 1940-х годов. Эти волны позволяют генерировать экстремальные значения давления и температуры в точке (или вдоль оси) фокусировки, что делает их полезными в ряде прикладных задач: от моделирования ядерных процессов и поведения плазмы до медицинских применений, например, ударно-волновой литотрипсии для разрушения почечных камней. Также сходящиеся ударные волны играют ключевую роль в явлении сонолюминесценции — испускании света пузырьком газа, находящимся в жидкости и сжимаемым акустическими колебаниями. Первые теоретические исследования поведения ударных волн вблизи центра схождения были выполнены Гудерлеем в 1942 году. Классическое автомодельное решение для этой задачи было получено К. П. Станюковичем и опубликовано в 1945 году. Существенный вклад в дальнейшее развитие теории внесли Лазарус и Рихтмайер, Ван-Дайк и Гуттман, Хафнер, Ву и Робертс, Мадхумита и Шарма, а также Сакураи. В частности, работы Ву и Робертса показали, что в случае идеального газа существует единственная ветвь самоподобных решений, аналогичная решениям Гудерлея и хорошо описываемая приближением CCW (Chester–Chisnell–Whitham).

Целью работы является исследование динамики сходящихся ударных волн в идеального газа переменной плотности, вычисление параметров течения для плоского, цилиндрического и сферического поршней при различных значениях плотности.

В работе успешно применен метод Ван-Дайка и Гуттмана к проблеме схождения ударной волны идеального газа, что позволило получить глобальное решение задачи схождения ударной волны. Плоский, сферический или цилиндрический поршень, который заполнен идеальным газом переменной плотности поршень движется к оси/центру симметрии с постоянной скоростью, превышающей скорости звука, генерируя сильную ударную волну, сходящуюся к центру/оси симметрии.

Задача состоит в решении уравнений одномерного адиабатического движения идеального газа для случая переменной плотности с граничными условиями Ренкина-Гюгонио непосредственно за ударной волной.

Структура бакалаврской работы. Бакалаврская работа состоит из введения, 5 разделов и заключения.

В введении рассматриваются основные понятия, использованные в бакалаврской работе, дается краткая история начала исследований в данной области, ставится цель работы и описывается ее содержание.

В первом разделе рассматривается движение идеального газа с переменной плотностью, заключённого в цилиндрический или сферический поршень с начальным радиусом R_0. Учитывая заданные начальные условия и закон движения стенки поршня, определяются траектория ударной волны $R(t)$ и параметр k, характеризующий скорость сжатия. Для этого используются дифференциальные уравнения адиабатического течения идеального газа, условия Рэнкина–Гюгонио и соответствующие граничные условия. Для упрощения системы производится переход к безразмерным переменным, что позволяет получить дифференциальную систему в нормализованном виде.

Во втором разделе исследуется определение положений ударной волны X_n для плоских, цилиндрических и сферических геометрий при различных значениях показателя адиабаты и начальной плотности. Выполняется численный расчёт для разных параметров, что позволяет оценить влияние этих величин на эволюцию ударного фронта.

В третьем разделе анализируется поведение ударной волны при приближении к центру (в плоском и сферическом случае) или оси симметрии (в цилиндрическом случае). Исследуется сходимость волны и поведение коэффициентов, полученных из таблицы значений X_n. С помощью таблиц Невилла производится интерполяция значений времени, соответствующих моменту коллапса ударной волны. Рассматриваются различные параметры плотности и адиабатического показателя.

В четвёртом разделе изучается асимптотическое поведение решения в окрестности момента коллапса. Особое внимание уделяется сингулярному автомодельному решению Гудерлея, описывающему динамику радиуса ударной волны при стремлении времени к моменту схлопывания.

В пятом разделе приводятся численные результаты, описывающие траекторию ударной волны, а также распределения скорости, плотности и давления при переменной плотности идеального газа. Расчёты выполнены для различных значений показателя адиабаты как в плоской, сферической, так и в цилиндрической постановках. Отдельно анализируются значения физических величин на фронте и за фронтом ударной волны.

В заключении перечислены достигнутые результаты и сформулированы основные выводы, сделанные по итогам выполнения бакалаврской работы.

Основное содержание работы. Рассматриваем плоский, цилиндрический или сферический поршень начального радиуса R_0, ограничивающий идеальный газ, плотность которого изначально меняется по степенному закону.

Пусть начальное состояние задаётся выражением:

$$p = p_0, \quad \rho = \rho_c \left(\frac{r}{R_0}\right)^{\delta}, \quad v = 0;$$

где r, p, ρ, v расстояние частицы от центра/оси симметрии, давление, плотность и радиальная скорость, направленная наружу, соответственно, а ρ_c, p_0 и δ подходящие положительные константы.

В момент времени $t = 0$, поршень начинает сжиматься с постоянной скоростью V, где V превышает скорость звука среды. Это генерирует сильную ударную волну плоской, цилиндрической или сферической геометрии, положение которой необходимо определить.

Уравнения одномерного адиабатического движения идеального газа имеют вид:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial r} + \frac{(m\rho v)}{r} = 0,$$
$$\frac{\partial v}{\partial t} + v\frac{\partial v}{\partial r} + \left(\frac{1}{\rho}\right)\frac{\partial p}{\partial r} = 0,$$
$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + v\frac{\partial}{\partial r}\right)\frac{p}{\rho^{\gamma}} = 0.$$

где t – время, $\gamma-$ коэффициент адиабаты; j принимает значения 0, 1 или 2 в зависимости от того, является ли поршень плоским, цилиндрическим или сферическим, соответственно.

Граничные условия непосредственно за ударной волной, $r = R(t)$, задаются соотношениями Ренкина-Гюгонио:

$$v = \frac{2}{\gamma+1}\dot{R}, \quad \rho = \frac{\gamma+1}{\gamma-1}\rho_0, \quad p = \frac{2}{\gamma+1}\rho_0(\dot{R})^2, \quad \text{при} \quad r = R(t).$$

Далее решаем систему до третьего приближения включительно и определяем положение ударной волны.

$$X(t) = \frac{(\gamma+1)t}{2} + \frac{(\gamma+1)(\gamma-1)}{8(2\gamma-1)}\left[m\gamma + \frac{\delta}{2}(\gamma+1)\right]t^2$$
$$+\frac{(\gamma-1)(\gamma+1)}{48(7\gamma-5)}\left[m^2\frac{(13\gamma^3-21\gamma^2+13\gamma-1)}{(2\gamma-1)^2}\right.$$
$$+m(\gamma+1)(3\gamma+1) + m\frac{\delta(\gamma+1)(28\gamma-43\gamma^2+26\gamma-1)}{2(2\gamma-1)^2}$$
$$\left.+\frac{\delta^2(\gamma+1)^2(47\gamma^2-54\gamma+19)}{4(2\gamma-1)^2} - 4\delta(\delta-1)(\gamma+1)^2\right]t^3 + O(t^4).$$

Во втором разделе приведены таблицы коэффициентов X_n для идеального газа(положение ударной волны в момент времени), где n находится в диапазоне от 1 до 41. Были выполнены расчеты для плоских ($m = 0$), цилиндрических ($m = 1$) и сферических ($m = 2$) поршней с адиабатическим коэффициентом газа $\gamma = 5/3, 7/5$ и для переменной плотности при значениях показателя степени в выражении для плотности $\delta = 1, 2$.

В соответствии с таблицей 1 приведен пример расчетов для $\gamma = 7/5$ и $\delta = 2$.

Таблица 1 – Данные при $\delta = 2$, $\gamma = 7/5$

n	$m = 0$	$m = 1$	$m = 2$
1	1.2000000000	1.2000000000	1.2000000000
2	0.1600000000	0.2533333333	0.3466666667
3	0.1671111111	0.3178271605	0.5107160494
4	0.1630315789	0.3469109812	0.6185564652
5	0.1638466793	0.3932738653	0.7867568571
6	0.1796834093	0.5077715751	1.1841539474
7	0.2137478433	0.7112297400	1.8997112997
8	0.2668863210	1.0216723340	3.0535683107
9	0.3424024448	1.4959862933	5.0343632277
10	0.4484562679	2.2461075540	8.5817893781
11	0.5985648980	3.4437899204	14.8639659684
12	0.8121228803	5.3535423388	25.9718576024
13	1.1165547281	8.4129455841	45.9340644302
14	1.5516823929	13.3577713979	82.2049199682
15	2.1762624020	21.4062361815	148.2897845080
16	3.0770449362	34.5669052550	269.1890346529
17	4.3818343229	56.1810645158	491.8810448225
18	6.2791588776	91.8460368463	904.2528027083
19	9.0480696896	150.9510571945	1670.4017627494
20	13.1028582538	249.2615415819	3098.8285981249
21	19.0599051051	413.3269168265	5772.4563648207
22	27.8379100832	687.9959883660	10793.1924267165
23	40.8087289861	1149.1901098325	20246.6587197881
24	60.0247595537	1925.6556275638	38093.4932325107
25	88.5619801671	3236.1414522054	71873.5593743392
26	131.0379619635	5453.0388988241	135958.6674396858
27	194.3951135924	9211.3821989565	257787.1016532197
28	289.0864808676	15595.7690393697	489848.1671670678
29	430.8730083305	26461.4117622380	932715.7333276601
30	643.5503417487	44986.2704314936	1.7793467390×10^6
31	963.0900293347	76621.5527236714	3.4004516754×10^6
32	1443.9348807752	130729.7087716954	6.5092430715×10^6
33	2168.5779514315	223410.2389459268	1.2479568626×10^7
34	3262.1508064152	382379.5820508346	2.3960827115×10^7
35	4914.6594874221	655405.9676724828	4.6067991660×10^7
36	7414.9050263000	1.1249019504×10^6	8.8686799953×10^7
37	11202.2691003173	1.9331917892×10^6	1.7094256428×10^8
38	16945.8336214274	3.3262988600×10^6	3.2987082882×10^8
39	25665.3495404215	5.7298872601×10^6	6.3725555035×10^8
40	38916.3194824767	9.8810685552×10^6	1.2323535927×10^9
41	59073.3650486468	1.7057336166×10^7	2.3855393759×10^9

В третьем разделе определяется радиу сходимости для ударной волны, аппроксимированной с использованием сингулярного поведения, описанного решением Гудерлея. В начале отмечается, что все коэффициенты, вычисленные на основе значений X_n (положений фронта ударной волны в различные моменты времени), положительны. Это свидетельствует о положительности ближайшей сингулярности функции $X(t)$, описывающей положение ударной волны, и указывает на существование конечного времени схлопывания к оси или центру фокусировки.

Далее предполагается, что поведение ударной волны вблизи момента коллапса можно аппроксимировать выражением:

$$R(t) = 1 - X(t) = 1 - \sum_{n=1}^{\infty} X_n t^n \sim A_1 \left(1 - \frac{t}{t_c}\right)^{\alpha_1}, \quad \text{при} \quad t \to t_c.$$

где α_1 – ведущая экспонента, A_1 – амплитуда, а t_c – момент времени, соответствующий схлопыванию ударной волны в модели идеального газа. С физической точки зрения это время характеризует момент, когда плотность и давление за фронтом ударной волны стремятся к бесконечности.

Анализ отношения последовательных коэффициентов X_n/X_{n-1} показывает, что радиус сходимости полученного степенного ряда меньше единицы, что подтверждает наличие сингулярности при конечном времени. Для более точного определения радиуса сходимости применяется метод Невилла, позволяющий получить численные оценки для $1/t_c$ при больших n по следующей асимптотической формуле:

$$\frac{X_n}{X_{n-1}} \sim \frac{1}{t_c}\left(1 - \frac{1+\alpha_1}{t_c}\right), \quad \text{при} \quad n \to \infty.$$

В работе представлены три таблицы Невилла, содержащие оценки параметров $1/t_c, \alpha_1$ и t_c для различных наборов входных данных. Эти таблицы построены на основе итерационного алгоритма Невилла, применяемого к последовательностям коэффициентов X_n.

В завершении раздела приводятся значения времени схлопывания t_c, полученные с использованием метода Невилла, а также проводится их сравнение для различных параметров, таких как показатель адиабаты γ, масса m, и начальная плотность. Анализ показывает, что изменение параметров существенно влияет на динамику схлопывания: увеличение γ приводит к более раннему коллапсу ударной волны, в то время как увеличение начальной плотности замедляет этот процесс. Также в соответствии с таблицей 2, представлено влияние параметров на время схлопывания в различных режимах течения при постоянной и переменной плотности.

Таблица 2 – Значения времени схлопывания t_c, полученные с использованием метода Невилла, при $\gamma = 7/5$, $5/3$ и $\delta = 1, 2$.

γ	δ	t_c(Плоской)	t_c(Цилиндрической)	t_c(Сферической)
7/5	1	0.80000000	0.62560203	0.55225840
7/5	2	0.63117280	0.55627570	0.49695567
5/3	1	0.63322227	0.53692216	0.46570332
5/3	2	0.54694133	0.47269876	0.41615948

В четвёртом разделе рассматривается локальное автомодельное решение, предложенное Гудерлеем, которое описывает поведение течения в непосредственной близости к моменту схлопывания ударной волны. В то время как глобальное решение, ранее представленное в работе, охватывает всю область до момента коллапса, оно теряет точность вблизи сингулярности, где требуется особый подход.

Согласно гипотезе Гудерлея, в окрестности времени схлопывания t_c поведение радиуса ударной волны может быть выражено в виде ряда по степеням $\left(1 - \dfrac{t}{t_c}\right)$. Изначально был известен лишь ведущий показатель α_1, вычисленный самим Гудерлеем. Однако значения последующих показателей α_j и соответствующих амплитуд A_j оставались неизвестными. Формально разложение имеет следующий вид:

$$R(t) = 1 - X(t) \sim \sum_{i=1}^{\infty} A_i \left(1 - \frac{t}{t_c}\right)^{\alpha_i}.$$

Позднее Ван Дайк и Гуттманн с использованием метода Бейкера–Хантера провели вычисление всех действительных показателей α_j и соответствующих коэффициентов A_j для модели идеального газа. При этом использовались оценки значения t_c, полученные в предыдущем разделе методом Невилла.

Для упрощения анализа ряд по времени t был переписан через новую переменную τ, где время выражалось в виде:

$$t = t_c(1 - exp(-\tau)).$$

Далее умножаем $n-$й член ряда на $n!$ и суммируем по n, чтобы получить ряд для вспомогательной функции.

$$R(\tau) = \sum_{i=1}^{\infty} A_i/(1 + \alpha_i \tau),$$

которая имеет полюсы в точках $-1/\alpha_i$ с соответствующими вычетами A_i/α_i и представлена в форме аппроксиманта Паде типа $[(N-1)/N]$. Это действительно рациональная функция-аппроксимант для разложения в ряд Тейлора, выраженная как отношение двух многочленов, коэффициенты которых строятся из решения в виде ряда.

Поскольку имеем ряд примерно из 40 членов, параметр N можно изменять вплоть до 20. Меняя N от 3 до 20, получаем последовательные аппроксиманты $[(N-1)/N]$ для вспомогательной функции $R(\tau)$. Разлагая эти аппроксиманты на простейшие дроби, получаем значения α_i и A_i, формирующие список допустимых показателей подобия и соответствующих амплитуд, восстановленных в окрестности схлопывания.

В пятом разделе исследуется общее решение задачи о сходящейся ударной волне в идеальном газе, основанное на методе, предложенном Ван Дайком и Гуттманом. Из этого глобального решения извлекается локальное автомодельное поведение, описываемое моделью Гудерлея в окрестности момента схлопывания.

В то время как локальное решение Гудерлея предоставляет лишь первый автомодельный показатель α_1, методика Ван Дайка и Гуттмана позволяет вычислить дополнительные три показателя автомодельности и соответствующие амплитуды. Эти значения представлены в таблице 5.1 работы.

Значения ведущего показателя α_1 были рассчитаны для цилиндрической и сферической геометрии при различных значениях показателя адиабаты $\gamma = 5/3, 7/5$. Полученные результаты приведены в таблице 5.2 и находятся в хорошем согласии с ранее опубликованными данными Шарма и Радха, Хафнера, Сакурая, подтверждая достоверность применённого подхода.

В рамках данного раздела также представлены распределения скорости, плотности, давления и траектории ударной волны для различных значений γ и m. Как видно из таблиц 5.1, 5.2, увеличение параметра m, а также уменьшение γ, приводит к снижению ведущего показателя автомодельности α_1, что, в свою очередь, означает усиление ускорения ударной волны по мере приближения к центру/оси схлопывания.

Поскольку значение $\alpha_1 < 1$, ударная волна непрерывно ускоряется, стремясь к сингулярному режиму $t \to t_c$, хотя её скорость растёт медленнее, чем $(t - t_c)^{-1}$. Наблюдается, что увеличение любого из параметров m, γ или δ приводит к уменьшению ведущего показателя подобия α_1 и, как следствие, к росту ускорения ударной волны при её приближении к центру/оси.

Заключение В данной работе было получено решение системы уравнений одномерного адиабатического движения идеального газа для случая переменной плотности при условиях Ренкина-Гюгонио за ударной волной.

Были выполнены построения для различных вариантов распределения скорости, плотности и давления при различных показателях адиабаты на фронте ударной волны и перед ней, что помогло выявить особенности прохождения ударной волны и изучить её динамические характеристики.

Полученные в результате исследования данные имеют широкий потенциал применения, включая понимание процессов, происходящих в сильно сходящихся ударных волнах, а также разработку новых технологий и материалов, учитывающих свойства неидеальных газов переменной плотности. Это открывает новые горизонты для научных и инженерных исследований и может привести к значительным инновациям в различных областях науки и техники.