МИНОБРНАУКИ РОССИИ

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования

«САРАТОВСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ Н.Г.ЧЕРНЫШЕВСКОГО»

Кафедра математического и компьютерного моделирования

Численное исследование задачи о естественной конвекции вблизи тонкой вертикальной пластины при малых значениях Прандтля

АВТОРЕФЕРАТ БАКАЛАВРСКОЙ РАБОТЫ

студента 4 курса 411 группы

направление 01.03.02 — Прикладная математика и информатика

механико-математического факультета

Никифорова Даниила Владимировича

Научный руководитель
зав. каф., д.ф.-м.н., доцент ____________ Ю.А. Блинков

Зав. кафедрой
зав. каф., д.ф.-м.н., доцент ____________ Ю.А. Блинков

Саратов 2025

Введение. В последние десятилетия исследование естественной конвекции стало одной из актуальных тем в области теплообмена и гидродинамики. Этот процесс играет ключевую роль в различных природных и инженерных системах, таких как атмосферные явления, океанские течения, а также в системах отопления и вентиляции. Понимание механизмов естественной конвекции имеет важное значение для оптимизации теплообменных процессов, повышения энергоэффективности и разработки новых технологий.

Естественная конвекция может быть охарактеризована различными параметрами, среди которых особое внимание уделяется числу Рейнольдса и числу Прандтля. Эти безразмерные числа позволяют оценить соотношение между инерционными и вязкими силами, а также между вязкостью и теплопроводностью жидкости соответственно. В частности, число Прандтля, которое определяется как отношение кинематической вязкости к теплопроводности, играет важную роль в анализе конвективных потоков, особенно в условиях малых значений, когда вязкость становится доминирующим фактором в динамике потока.

Данная тема имеет важное значение как в теоретическом, так и в практическом аспектах. В теоретическом плане исследование естественной конвекции способствует углублению знаний о механизмах теплообмена и гидродинамики, а также позволяет разрабатывать новые математические модели и численные методы для их анализа. Практическое применение результатов таких исследований охватывает широкий спектр областей, включая энергетику, климатологию, биомедицину и многие другие. Например, в системах отопления и вентиляции понимание процессов естественной конвекции может привести к более эффективному распределению тепла и улучшению качества воздуха в помещениях.

Естественными конвективными течениями называются течения, единственной причиной которых является неодинаковость плотности, вызванная разностью температур.

В работе рассматривается случай, когда естественное конвективное течение возникает около тонкой вертикально поставленной равномерно нагретой пластинки. Это течение обладает свойствами, характерными для пограничного слоя.

Пограничный слой - это область течения вязкой жидкости (газа), образующаяся у поверхности обтекаемого твёрдого тела или на границе раздела двух потоков жидкости с различными скоростями, температурами или химическим составом. Он характеризуется резким изменением в поперечном направлении скорости, температуры, или же концентраций отдельных химических компонентов. На формирование течения в пограничном слое основное влияние оказывают вязкость, теплопроводность и диффузионная способность жидкости (газа). Внутри пограничного слоя происходит плавное изменение скорости от её значения во внешнем потоке до нуля на стенке вследствие прилипания вязкой жидкости к твёрдой поверхности. Аналогично внутри пограничного слоя плавно изменяются температура и концентрация. Развитие температурного пограничного слоя определяется числом Рейнольдса, а также числом Прандтля, которое характеризует соотношение между толщинами динамического и температурного пограничного слоя.

В случае вертикально поставленной нагретой пластины давление в каждой горизонтальной плоскости равно весовому давлению и, следовательно, постоянно. Причиной движения является исключительно разность между весом и архимедовой подъёмной силой, обусловленная силой притяжения Земли. Тепло, возникшее вследствие трения, не учитывается.

Таким образом, исследование естественной конвекции не только углубляет наши знания о физических процессах, но и открывает новые горизонты для практического применения в различных отраслях. В этом контексте особый интерес представляет изучение естественной конвекции вблизи вертикальных поверхностей, таких как тонкие пластины.

Целью бакалаврской работы является решение задачи о естественной конвекции вблизи тонкой вертикальной пластины при малых числах Прандтля с помощью методов возмущений, метода Рунге - Кутты для обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ) и первого дифференциального приближения.

Для достижения данной цели были поставлены следующие задачи:

1) изучить течение на поверхности пластины при малых значениях чисел Прандтля

2) описать переход к автомодельным перемнным, сформулировать краевую задачу для численного решения методом Рунге-Кутты

3) представить результаты расчетов в виде графиков и таблицы для визуализации решения

Работа состоит из введения, пяти разделов и заключения.

Во введении рассматриваются основные понятия темы бакалаврской работы, ставится цель работы и описывается её содержание.

В первом разделе рассматривается общая постановка задачи.

Во втором разделе выводятся уравнения в автомодельных переменных.

В третьем разделе уравнения в автомодельных переменных решаются с помощью внешних и внутренних разложений методом возмущений.

В четвертом разделе представлено численное решение задачи с помощью метода Рунге - Кутты.

В пятом разделе представлено численное решение задачи с помощью первого дифференциального приближения.

В заключении указаны полученные результаты.

Содержание бакалаврской работы. Введём систему координат в соответствии с рисунком 1.

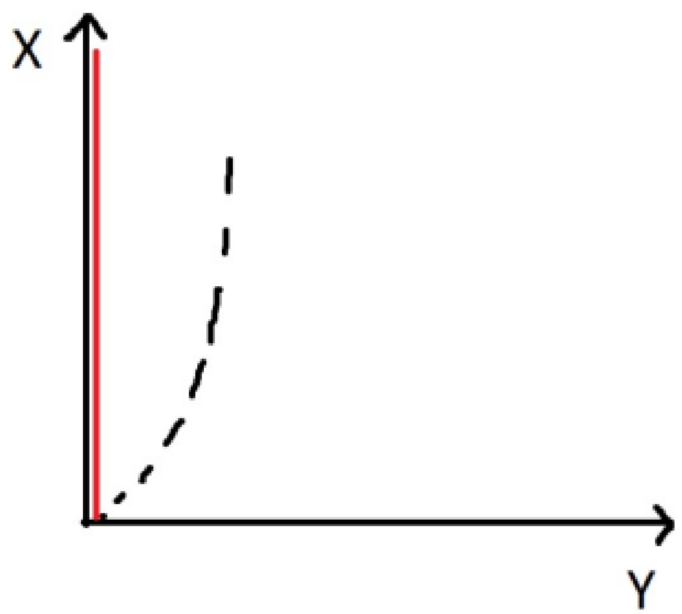

Рисунок 1 – Система координат Oxy

Запишем уравнения пограничного слоя, учитывая, что

$$\frac{dP}{dx} = 0, \tag{1}$$

β – коэффициент теплового расширения, безразмерная температура

$$\theta = \frac{T - T_\infty}{T_W - T_\infty}, \tag{2}$$

где T_∞ – температура на бесконечности, T_W – температура на стенке.

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x} + \dfrac{\partial v}{\partial y} = 0, \\ u\dfrac{\partial u}{\partial x} + v\dfrac{\partial v}{\partial y} = v\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} + g\beta(T_W - T_\infty)\theta, \\ u\dfrac{\partial \theta}{\partial x} + v\dfrac{\partial \theta}{\partial y} = a\dfrac{\partial^2 \theta}{\partial y^2}, \\ u(0) = v(0) = u(\infty) = \theta(\infty) = 0, \\ \theta(0) = 1, \end{cases} \tag{3}$$

где $a = \lambda/(C_P\rho)$ – коэффициент температуропроводности.

В таком случае после введения функции тока и безразмерных переменных

$$\begin{gathered} u = \frac{\partial \psi}{\partial y},\ v = -\frac{\partial \psi}{\partial x}, \\ x \sim L,\ u \sim U, \\ y\frac{L}{\sqrt{Re_L}} = \delta = \frac{L}{\sqrt{\dfrac{UL}{V}}},\ v \sim V. \\ \psi \sim \Psi = U\delta. \end{gathered} \tag{4}$$

можно перейти к автомодельным переменным.

Устремляя y к бесконечности имеем:

$$\psi = 4\nu c x^{\frac{3}{4}} \varphi(\eta). \tag{5}$$

Тогда система в автомодельных переменных имеет вид:

$$\begin{cases} \varphi''' + 3\varphi\varphi'' - 2\varphi'^2 + \theta = 0, \\ \theta'' + 3Pr\varphi\theta' = 0, \\ \varphi(0) = \varphi'(0) = \varphi'(\infty) = \theta(\infty) = 0, \\ \theta(0) = 1. \end{cases} \tag{6}$$

Получим решение для случаев, когда числа Прандтля малые. Задачи с малыми параметрами решаются с помощью методов возмущений, подробно описанных в трудах А. Х. Найфэ. В случае малых чисел Прандтля температурный пограничный слой намного больше динамического. Тогда во всей области течения можно выделить внутреннюю область, расположенную вблизи пластины и в которой силы вязкости сравнимы с силами инерции, и внешнюю область, расположенную вне некоторой окрестности поверхности пластины и в которой силы вязкости малы по сравнению с силами инерции и архимедовой подъемной силой.

Далее определим масштабы внутренней области и составим уравнения во внутренних и внешних переменных.

Система в автомодельных переменных будет в данном случае системой внутренних переменных, так как вязкие силы по порядку совпадают с инерциальными и поток тепла за счет конвекции меньше потока за счет теплопроводности. Она имеет вид:

$$\begin{cases} \varphi''' + 3\varphi\varphi'' - 2\varphi'^2 + \theta = 0, \\ \theta'' + 3Pr\varphi\theta' = 0, \\ \varphi(0) = \varphi'(0) = 0, \\ \theta(0) = 1. \end{cases} \tag{7}$$

Для получения системы во внешних переменных делается замена:

$$\begin{cases} \eta = Pr^{K_1}\overline{\eta}, \\ \varphi = Pr^{K_2}\overline{\varphi}, \\ \theta = \overline{\theta}, \end{cases} \tag{8}$$

где η, φ, θ – внутренние переменные, $\overline{\eta}, \overline{\varphi}, \overline{\theta}$ – внешние переменные, K_1, K_2 – безразмерные параметры подобия.

K_1 и K_2 находятся из условий, что поток тепла по порядку совпадает с конвективным, а вязкие члены малы по сравнению с инерциальными:

$$K_1 = K_2 = -\frac{1}{2}. \tag{9}$$

Получим систему уравнений во внешних переменных

$$\begin{cases} \bar{\varphi}'''Pr + 3\bar{\varphi}\bar{\varphi}'' - 2\bar{\varphi}'^2 + \bar{\theta}' = 0, \\ \bar{\theta}'' + 3\bar{\varphi}\bar{\theta}' = 0, \\ \varphi'(\infty) = \theta(\infty) = 0. \end{cases} \tag{10}$$

Внутренние разложение будем искать в виде:

$$\varphi = \varphi_0 + Pr^{\frac{1}{2}}\varphi_1 + Pr\varphi_2, \tag{11}$$

$$\theta = \theta_0 + Pr^{\frac{1}{2}}\theta_1 + Pr\theta_2. \tag{12}$$

Связь между внешними и внутренними переменными имеет вид:

$$\begin{cases} \bar{\eta} = Pr^{\frac{1}{2}}\eta, \\ \bar{\varphi} = Pr^{\frac{1}{2}}\varphi, \\ \bar{\theta} = \theta. \end{cases} \tag{13}$$

Приравнивая члены с числами Прандтля в одинаковых степенях получим уравнения для коэффициентов внутреннего разложения.

Для определения главных членов внутреннего разложения имеем:

$$\begin{cases} \varphi_0''' + 3\varphi_0\varphi_0'' - 2\varphi_0'^2 + \theta_0' = 0, \\ \bar{\theta}_0'' = 0. \end{cases} \tag{14}$$

Для определения главных членов внешнего разложения имеем:

$$\begin{cases} 3\bar{\varphi}_0\bar{\varphi}_0'' - 2\bar{\varphi}_0'^2 + \bar{\theta}_0' = 0, \\ \bar{\theta}_0'' + 3\bar{\varphi}_0\bar{\theta}_0' = 0. \end{cases} \tag{15}$$

С учетом условий сращивания окончательная система уравнений для главных членов внутреннего разложения имеет вид:

$$\begin{cases} \varphi_0''' + 3\varphi_0\varphi_0'' - 2\varphi_0'^2 + 1 = 0, \\ \theta_0 = 1. \\ \varphi_0(0) = \varphi_0'(0) = 0, \\ \varphi_0''(0) = C_1. \end{cases} \tag{16}$$

Данная система решается по схеме Рунге - Кутты в соответствии с рисунком 2.

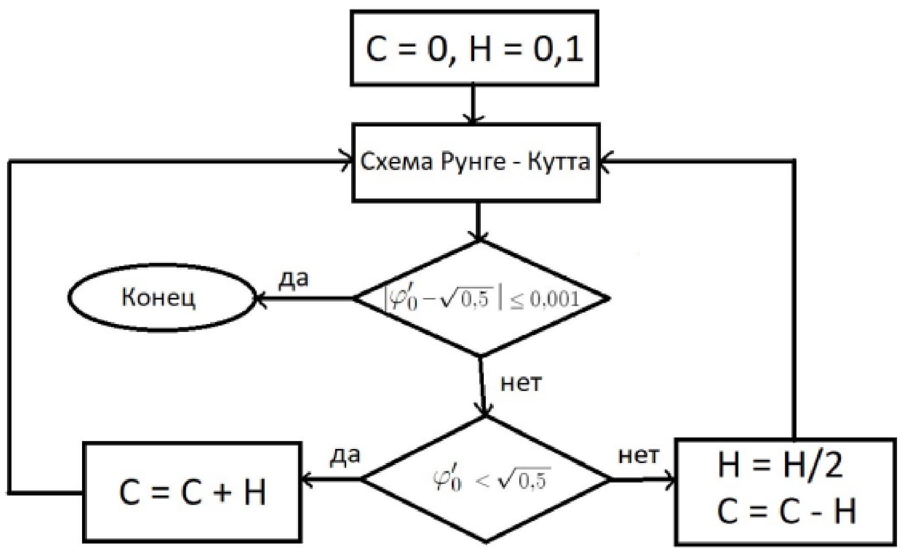

Рисунок 2 – Блок-схема программы расчёта главных коэффициентов внутреннего разложения

Код реализации численного метода и представлен в приложении к бакалаврской работе. Схема Рунге - Кутты написана на языке Python. Графики построены с помощью библиотеки matplotlib в соответствии с рисунком 3. Результаты расчёта приведены в соответствии с таблицей 1.

Таблица 1 — Численное решение ОДУ 3-го порядка $\varphi''' = f(\eta, \varphi, \varphi', \varphi'')$

η	φ	φ'	φ''	η	φ	φ'	φ''
0.1	0.005	0.102	0.970	1.6	0.776	0.693	0.051
0.2	0.020	0.194	0.871	1.7	0.845	0.697	0.037
0.3	0.044	0.276	0.775	1.8	0.915	0.700	0.026
0.4	0.075	0.349	0.682	1.9	0.985	0.702	0.018
0.5	0.113	0.413	0.593	2.0	1.055	0.704	0.013
0.6	0.157	0.468	0.510	2.1	1.126	0.705	0.009
0.7	0.207	0.515	0.433	2.2	1.196	0.706	0.006
0.8	0.260	0.555	0.363	2.3	1.267	0.706	0.004
0.9	0.317	0.588	0.300	2.4	1.338	0.707	0.002
1.0	0.378	0.615	0.244	2.5	1.408	0.707	0.001
1.1	0.440	0.637	0.196	2.6	1.479	0.707	0.001
1.2	0.505	0.655	0.155	2.7	1.550	0.707	0.000
1.3	0.571	0.668	0.120	2.8	1.620	0.707	0.000
1.4	0.638	0.679	0.092	2.9	1.691	0.707	0.000
1.5	0.707	0.687	0.069	3.0	1.762	0.707	0.000

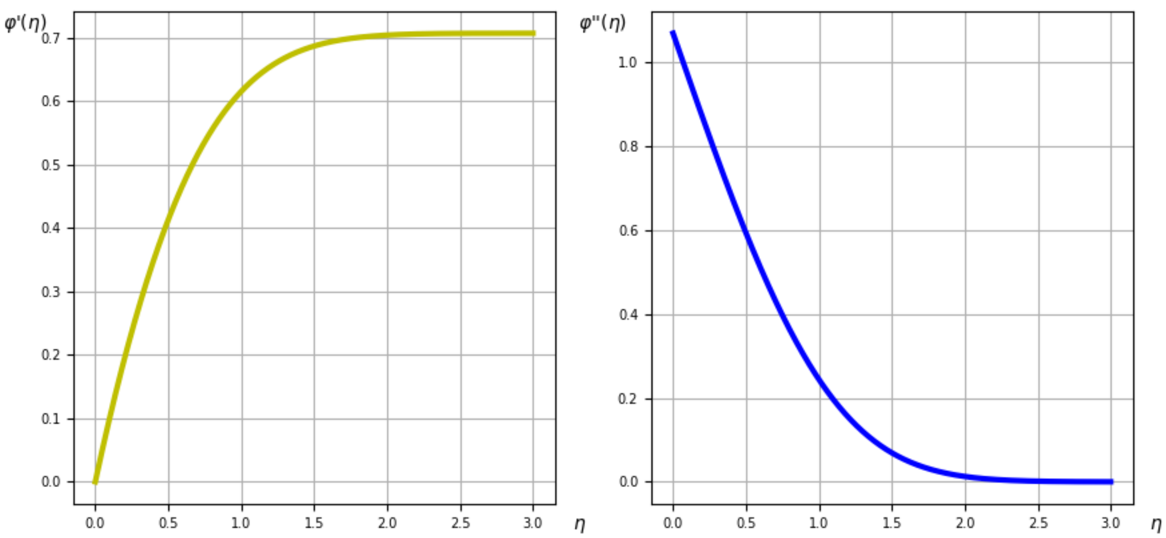

Рисунок 3 – График $\varphi'(\eta)$ и $\varphi''(\eta)$

Заключение. В бакалаврской работе были получены численные решения внутреннего разложения уравнения естественной конвекции вблизи тонкой вертикальной пластины при малых значениях чисел Прандтля, а именно

– получена система уравнений естественной конвекции в автомодельных переменных

– с помощью методов возмущений получены системы уравнений для главных членов внешнего и внутреннего разложений при малых числах Прандтля;

– с помощью численного метода Рунге - Кутты для обыкновенных дифференциальных уравнений получены численные решения для главных членов внутреннего разложения при малых числах Прандтля;

– с помощью первого дифференциального приближения получены численные решения для главных членов внутреннего разложения при малых числах Прандтля.

Таким образом все задачи были выполнены, а поставленная цель достигнута.