МИНОБРНАУКИ РОССИИ

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования

«САРАТОВСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ Н.Г.ЧЕРНЫШЕВСКОГО»

Кафедра математического и компьютерного моделирования

Решение задачи Дирихле для уравнения Лапласа компактными разностными схемами

АВТОРЕФЕРАТ БАКАЛАВРСКОЙ РАБОТЫ

студентки 4 курса 411 группы

направление 01.03.02 — Прикладная математика и информатика

механико-математического факультета

Семеновой Александры Андреевны

Научный руководитель
зав. каф., д.ф.-м.н., доцент ____________ Ю.А. Блинков

Зав. кафедрой
зав. каф., д.ф.-м.н., доцент ____________ Ю.А. Блинков

Саратов 2025

Введение. Изучение физических процессов приводит к построению математических моделей. Для их описания используют дифференциальные уравнения. Для стационарных процессов, описывающих, например, тепловое поле, где распределение температуры не меняется с течением времени или потенциальное течение жидкости без источника, существует особый тип дифференциальных уравнений с частными производными — эллиптический. Уравнение Лапласа является одним из наиболее распространенных уравнений этого типа. При определенных граничных условиях мы можем получить задачу Дирихле или задачу Неймана.

Поскольку решение подобных задач — весьма трудоемкий процесс, то были найдены методы, позволяющие выполнять эти же вычисления с помощью компьютера. Конкретно для работы с дифференциальными уравнениями используют разностные схемы.

Актуальность работы. Уравнение Лапласа широко применяется в прикладной математике, а задача Дирихле позволяет представить поведение функции на границе, что часто бывает необходимо в практических задачах. Процесс решения таких задач весьма трудоемкий, поэтому возникает потребность в численном решении. Стандартные методы конечных разностей, хотя и просты для реализации, но обладают низкой точностью, что может привести к значительным ошибкам, особенно когда используются грубые вычислительные сетки.

Компактные разностные схемы, в свою очередь, достигают более высокой точности. Одним из ключевых преимуществ является возможность их использования для решения задач с высокой точностью даже на грубых сетках. Это происходит за счет того, что компактные схемы обеспечивают лучшие свойства сглаживания и конвергенции, а также делают возможным применение методов анализа ошибок, что является необходимым для оценки качества численного решения. Что особенно важно в задачах, где точность решения сильно зависит от граничных условий, например, в задаче Дирихле.

Помимо этого, компактные разностные схемы еще хороши тем, что обладают большей вычислительной эффективностью по сравнению с другими высокоточными методами, что особенно важно при больших объемах вычислений.

Таким образом, применение компактных разностных схем для решения задачи Дирихле для уравнения Лапласа является актуальной проблемой.

Целью работы является нахождение компактной разностной схемы и применение её для решения задачи Дирихле для уравнение Лапласа. Для достижения цели нам понадобится: рассмотреть выбранную задачу, составить для нее компактную разностную схему, написать программу, считающую точное и приближенное значения, проанализировать результаты.

Структура бакалаврской работы. В бакалаврской работе содержится введение, 2 раздела и заключение.

В первом разделе содержатся основные термины и определения, относящиеся к уравнению Лапласа и задаче Дирихле. Приводится физическая постановка задачи. Формулируются подходы для получения аналитического решения поставленной задачи.

Во втором разделе получена компактная разностная схема. Представлено численное решение задачи Дирихле на сетке с помощью этого метода. И проведено сравнение точности компактной разностной схемы и разностной схемы.

Основное содержание работы.

Дифференциальное уравнение в частных производных вида

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} + \ldots + \frac{\partial^2 u}{\partial x_n^2} = 0$$

называется уравнением Лапласа, а Δu — оператором Лапласа. Его относят к простейшим уравнениям эллиптического типа.

Если при этом функция u удовлетворяет граничному условию $u = f_i$ на S, то такую задачу называют первой краевой задачей или задачей Дирихле.

Задачу Дирихле, в свою очередь, можно разделить на внутреннюю и внешнюю.

Пусть S — некоторая замкнутая поверхность. Обозначим через C_i конечную область, ограниченную этой поверхностью, а через C_e — бесконечную область, внешнюю к C_i. Пусть на поверхности S заданы функции $f_1(P),\ f_2(P)$.

Внутренняя задача Дирихле ставится следующим образом: необходимо найти функцию $u(M)$, гармоническую в области C_i и непрерывную в замкнутой области $\overline{C_i}$. Так же необходимо, чтобы искомая функция принимала на поверхности S заданные значения

$$u|_S = f_1(P).$$

Внешняя задача Дирихле так же состоит в нахождении функции, являющейся гармоничной в C_e, а так же непрерывной в $\overline{C_e}$ соответственно. Помимо этого, функция должна удовлетворять условию

$$u|_S = f_2.$$

Теорема 1. Решение задачи Дирихле, внутренней или внешней, единственно.

Аналитическое решение задачи Дирихле. Пусть $u(M)$ — гармоническая функция внутри конечной области C — непрерывна вместе с производными первого порядка вплоть до границы S области C. Тогда, имеет место формула

$$u(M_0) = \frac{1}{4\pi} \iint\limits_S \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial n} - u\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{r}\right) \, dS, \tag{1}$$

где r — расстояние от некоторой точки M_0, лежащей внутри C, до переменной точки M на поверхности S.

Пусть существует функция $g(M, M_0)$, которая удовлетворяет следующим условиям:

1. она является гармонической внутри области C как функция от переменной точки M и имеет непрерывные первые производные вплоть до поверхности S;
2. на поверхности S функция $g(M, M_0)$ принимает граничные значения — $1/(4\pi r)$.

Рассмотрим формулу Грина

$$\iiint\limits_C (u\Delta v - v\Delta u) \, d\tau = \iint\limits_S \left(u\frac{\partial v}{\partial n} - v\frac{\partial u}{\partial n}\right) \, dS,$$

где $u(x, y, z)$ и $v(x, y, z)$ — некоторые функции и примнем её к гармоническим функциям $u(M)$ и $g(M, M_0)$. Получаем

$$\iint\limits_S \Big[u(M)\frac{\partial g(M, M_0)}{\partial n} - g(M, M_0)\frac{\partial u(M)}{\partial n}\Big]\, dS = 0$$

или, в силу граничных значения для функции $g(M, M_0)$,

$$\iint\limits_S \Big[u(M)\frac{\partial g(M, M_0)}{\partial n} + \frac{1}{4\pi r}\frac{\partial u(M)}{\partial n}\Big]\, dS = 0.$$

Вычитая это равенство из (1), найдем

$$u(M_0) = -\iint\limits_S u(M)\frac{\partial}{\partial n}\Big[\frac{1}{4\pi r} + g(M, M_0)\Big]\, dS.$$

Положим

$$G(M, M_0) = \frac{1}{4\pi r} + g(M, M_0).$$

Эта функция называется функцией Грина задачи Дирихле для уравнения Лапласа.

Построение функции Грина сходится к нахождению ее регулярной части $g(M, M_0)$, которая определяется из решения задачи Дирихле:

$$\Delta g(M, M_0) = 0,\ \ g(M, M_0)|_S = -\frac{1}{4\pi r}\ (M_0 \in G).$$

Предположим существование некоторой функции $u(M)$ — решения внутренней задачи Дирихле с граничными значениями $f(M)$, непрерывного вместе с первыми производными вплоть до границы S. Искомая функция в задаче Дирихле должна быть гармонической внутри области C и непрерывной в замкнутой области $\overline{C}$. Теперь с помощью функции Грина решение внутренней задачи Дирихле, если оно существует, дается формулой

$$u(M_0) = -\iint\limits_S f(M)\frac{\partial G(M, M_0)}{\partial n} dS,\ \ u(M)\Big|_S = f(M).$$

Сетки. При численном решении задачи нет возможности использовать разностное решение для всех значений аргумента, изменяющегося внутри некоторой области евклидова пространства. Поэтому задачу немного упрощают — выбирают некоторое конечное множество точек и приближенное решение ищется уже на них. Множество всех таких точек называется сеткой, а отдельные точки — узлами сетки.

Разобьем единичный отрезок $[0, 1]$ на N равных частей. Расстояние между соседними узлами $x_i - x_{i-1} = h = \frac{1}{N}$ назовем шагом сетки. Точки деления $x_i = ih$ — узлы сетки. Множество таких узлов $\omega_h = \{x_i = ih,\ i = 1, 2, \ldots, N-1\}$ и составляет сетку.

В это множество так же можно включить граничные точки $x_0 = 0, x_N = 1$. Множество с граничными точками обозначим $\overline{\omega_h} = \{x_i = ih,\ i = 0, 1, \ldots, N-1, N\}$.

Полученная сетка аппроксимирует решение дифференциального уравнения на отрезке.

Если же выбранная область — прямоугольник $\overline{D} = \{0 \leq x \leq 1,\ 0 \leq t \leq T\}$, то разобьем оси x и T на отрезки $[0, 1]$, и $0, T$ на N_1 и N_2 частей соответственно. Получим $h = 1/N_1$ — шаг по оси x и $\tau = T/N_2$ — шаг по оси t. Если сетка равномерная, то $N_1 = N_2 = N$. Из полученных точек проведем прямые, параллельные осям. В результате получим узлы x_i, t_j, образующие сетку

$$\overline{\omega}_{h\tau} = \{(x_i, t_j) \in \overline{D}\}.$$

Таким образом, задача о численном решении исходного дифференциального уравнения была сведена к вопросу о нахождении решения полученной алгебраической системы.

Разностная схема для задачи Дирихле. Необходимо найти непрерывную в $C + S$ функцию $u(x)$, удовлетворяющую уравнению Лапласа

$$\Delta u = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} = 0,\ x \in C,$$

и краевому условию

$$u|_{x \in S} = u_0,$$

где $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, C есть n — мерная конечная область с границей S. Построим для начала разностный аналог оператора Лапласа. Обозначим $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}$ как оператор $L_i u$. Теперь представим оператор Лапласа в виде

$$\Delta u = L_1 u + L_2 u. \tag{2}$$

Зафиксируем некоторую точку x оси Ox и возьмем точки $x - h$ и $x + h$, где $h > 0$. В таком случае, для аппроксимации дифференциального оператора первого порядка $L_I v$ можно воспользоваться выражениями вида

$$\begin{aligned} L_{Ih}^{+} &\equiv \frac{v(x+h) - v(x)}{h} \equiv v_x, \\ L_{Ih}^{-} &\equiv \frac{v(x) - v(x-h)}{h} \equiv v_{\overline{x}}. \end{aligned} \tag{3}$$

Разложим функцию $u(x)$ в ряд Тейлора

$$v(x \pm h) = u(x) \pm h v'(x) + \frac{h^2}{2} v''(x) \pm \frac{h^3}{6} v''' + \frac{h^4}{24} v^{IV} + O(h^5).$$

Подставляя это разложение в (3), получим

$$\begin{aligned} v_x &= \frac{v(x+h) - v(x)}{h} = v'(x) + \frac{h}{2} v''(x) + \frac{h^2}{6} v'''(x) + \frac{h^3}{24} v^{IV} + O(h^4), \\ v_{\overline{x}} &= \frac{v(x+h) - v(x)}{h} = v'(x) - \frac{h}{2} v''(x) + \frac{h^2}{6} v'''(x) - \frac{h^3}{24} v^{IV} + O(h^4). \end{aligned}$$

Для аппроксимации оператора второго второго порядка $L_i v$ достаточно взять три точки $(x - h,\ x,\ x + h)$. В таком случае, получим выражение вида

$$L_h v(x) = \frac{v(x+h) - 2v(x) + v(x-h)}{h^2}. \tag{4}$$

С помощью формулы (4) аппроксимируем операторы L_1 и L_2

$$L_1 v \sim \Lambda_1 v = v_{\overline{x_1} x_1} = \frac{1}{h_1^2} (v(x_1 + h_1, x_2) - 2v(x_1, x_2) + v(x_1 - h_1, x_2)), \tag{5}$$

$$L_2v \sim \Lambda_2 v = v_{\overline{x_2}x_2} = \frac{1}{h_2^2}(v(x_1, x_2 + h_2) - 2v(x_1, x_2) + v(x_1, x_2 - h_2)), \tag{6}$$

где $h_1 > 0,\ h_2 > 0$ — шаги по осям x_1 и x_2.

Получаем, что операторы Λ_1 и Λ_2 определены на регулярном трехточечном шаблоне

$$(x_1 - h_1, x_2), (x_1, x_2), (x_1 + h_1, x_2) \text{ и } (x_1, x_2 - h_2), (x_1, x_2), (x_1, x_2 + h_2)$$

соответственно.

С помощью (5) и (6), заменим оператор Лапласа (2) разностным оператором

$$\Lambda v = \Lambda_1 v + \Lambda_2 v = v_{\overline{x_1}x_1} + v_{\overline{x_2}x_2} = 0. \tag{7}$$

Получившийся оператор определен на пятиточечном шаблоне «крест», который состоит из узлов $(x_1 \pm h_1, x_2), (x_1, x_2), (x_1, x_2 \pm h2)$, где точка (x_1, x_2) определена в 0, а точка $(x_1 + h_1, x_2)$ определена в 1 по оси x и так далее. Подставим в (7) выражения (5) и (6), в таком случае, получим

$$\Lambda v_0 = \frac{1}{h_1^2}(v_{21} - 2v_{22} + v_{23}) + \frac{1}{h_2^2}(v_{32} - 2v_{22} + v_{12}).$$

В случае, когда $h_1 = h_2 = h$ имеем

$$\Lambda v_0 = \frac{1}{h^2}(v_{21} + v_{32} + v_{23} + v_{12} - 4v_{22}).$$

Теперь рассмотрим разность $\phi(x) = L_h u(x) - Lu(x)$ в точке x при $h \to 0$. Величина $\phi(x)$ называется погрешностью разностной аппроксимации Lu в точке x.

Можно заметить, что правая разностная производная совпадает с левой разностной производной в точке $x + h$, то есть $v_x(x) = v_x(x + h)$, тогда перепишем (4) в виде

$$L_h v(x) = \frac{v_x(x) - v_{\overline{x}}(x)}{h} = \frac{1}{h}[v_{\overline{x}}(x + h) - v_{\overline{x}}(x)] = v_{\overline{x}x}(x),$$

где

$$v_{\overline{x}x}(x) = v'' + \frac{h^2}{12}v^{IV} + O(h^4). \qquad (8)$$

Для того, чтобы вычислить погрешность аппроксимации оператора Лапласа, воспользуемся тем, что $L_1 v \sim \Lambda_1 v = v_{\overline{x_1}x_1}$ и $L_2 v \sim \Lambda_2 v = v_{\overline{x_2}x_2}$. В таком случае

$$\Lambda_1 = L_1 v + \frac{h_1^2}{12}L_1 v + O(h_1^4).$$

Для Λ_2 выражение аналогично. Подставляем в оператор (7) и находим погрешность аппроксимации

$$\Lambda v - \Delta u = \frac{h_1^2}{12}L_1^2 v + \frac{h_2^2}{12}L_2^2 + O(h_1^4 + h_2^4).$$

Отсюда следует, что

$$\Lambda v - \Delta v = O(|h|^2), |h|^2 = h_1^2 + h_2^2,$$

если $v(x)$ — любая функция, имеющая не менее четырех ограниченных производных по x_i. Таким образом, разностный оператор (7) аппроксимирует оператор Лапласа (2) со вторым порядком на регулярном шаблоне «крест».

Построение компактной разностной схемы. Вернемся к разностному оператору Лапласа (7). Подставим в этот оператор разложение функции $v_{\overline{x_1}x_1}$ и $v_{\overline{x_2}x_2}$ (8) при $h_1 = h_2 = h$ и получим

$$v_{x_1x_1} + v_{x_2x_2} = \frac{1}{h^2}(v_{21} + v_{32} + v_{23} + v_{12} - 4v_{22}) - \frac{h^2}{12}(v_{x_1}^{IV} + v_{x_2}^{IV}) + O(h^4) \qquad (9)$$

Воспользовавшись выражением (7), получим $v_{x_1}^{IV} = -v_{x_1x_1x_2x_2}$ и $v_{x_2}^{IV} = -v_{x_1x_1x_2x_2}$ и подставим в (9):

$$v_{x_1x_1} + v_{x_2} = \frac{1}{h^2}(v_{21} + v_{32} + v_{23} + v_{12} - 4v_{22}) + \frac{h^2}{6}v_{x_1x_1x_2x_2} + O(h^4). \qquad (10)$$

Теперь необходимо найти $v_{x_1x_1x_2x_2}$. Для этого разложим в ряд Тейлора функции в точках $v_{11} = (x_1 - h_1, x_2 - h_2)$, $v_{13} = (x_1 + h_1, x_2 - h_2)$, $v_{31} =$

$(x_1 - h_1, x_2 + h_2)$, $v_{33} = (x_1 + h_1, x_2 + h_2)$, а затем суммируем получившиеся разложения и получим

$$v_{11} + v_{13} + v_{31} + v_{33} = 4v_{22} + 2h_1^2 v_{x_1x_1} + 2h_2^2 v_{x_2x_2} + h_1^2 h_2^2 v_{x_1x_1x_2x_2} + O(h^5). \quad (11)$$

Теперь из (11) можно выразить $v_{x_1x_1x_2x_2}$:

$$v_{x_1x_1x_2x_2} = \frac{1}{h^4}[v_{11} + v_{13} + v_{31} + v_{33} + 4v_{22} - 2(v_{12} + v_{32} + v_{21} + v_{23})] + O(h^2). \quad (12)$$

Подставляем получившиеся выражение (12) в (9) и получим компактную разностную схему:

$$\Lambda v = \frac{1}{h^2}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & -4 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} v_{ij} + \frac{1}{6h^2}\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -2 & 4 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} v_{ij} + O(h^4) =$$
$$= \frac{1}{6h^2}\begin{pmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 4 & -20 & 4 \\ 1 & 4 & 1 \end{pmatrix} v_{ij} + O(h^4).$$

В случае компактной разностной схемы, порядок аппроксимации будет равен $O(h^4)$.

Теперь сравним графики погрешностей аппроксимации двух методов.

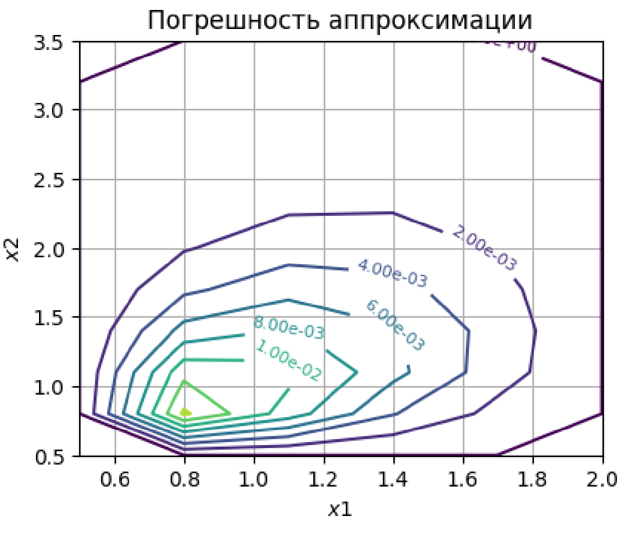

Рисунок 1 — Погрешность аппроксимации разностной схемы

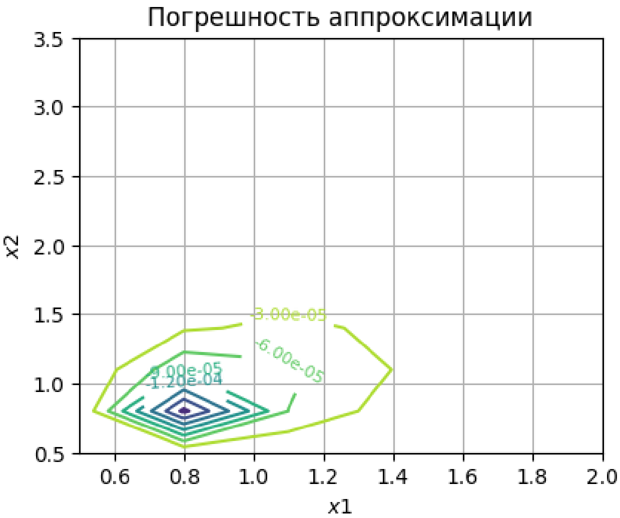

Рисунок 2 — Погрешность аппроксимации компактной разностной схемы

В соответствии с рисунком 1, с рисунком 2 представлено сравнение погрешности аппроксимации, возникшей при численном решении задачи Дирихле двумя различными методами: разностной схемой и компактной разностной схемой. Видно, что фигуры на этих графиках схожи по форме, но различны по размеру. Это указывает на то, что в первом случае погрешность аппроксимации действительно выше. И действительно, это соответствует полученным ранее порядкам аппроксимации для этих методов.

Можно сделать вывод, что при сохранении шаблона можно добиться повышения порядка аппроксимации за счет компактности.

Заключение. Решение задачи Дирихле для уравнения Лапласа представляет собой важное направление в численных методах математической физики. Оператор Лапласа, возникает во множестве областей, включая теорию потенциала, стационарную теплопроводность и электростатику.

Компактные разностные схемы представляют собой численный подход к приближению решения дифференциальных уравнений, включающий разработку схемы, которая использует конечные разности для аппроксимации производных. От обычных разностных схем они отличаются более высоким порядком аппроксимации, что делает их использование более предпочтительно, особенно в случае сложных геометрий.