МИНОБРНАУКИ РОССИИ

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования

«САРАТОВСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ Н.Г.ЧЕРНЫШЕВСКОГО»

Кафедра математического и компьютерного моделирования

Задача о разгоне космического аппарата с малой тягой до параболической скорости

АВТОРЕФЕРАТ БАКАЛАВРСКОЙ РАБОТЫ

студента 4 курса 411 группы

направление 01.03.02 — Прикладная математика и информатика

механико-математического факультета

Тычко Егора Анатольевича

Научный руководитель
доцент, к.т.н., доцент ____________ И.А. Панкратов

Зав. кафедрой
зав. каф., д.ф.-м.н., доцент ____________ Ю.А. Блинков

Саратов 2025

Введение. Современная космонавтика ставит перед учёными и инженерами сложные задачи, связанные с оптимизацией движения космических аппаратов (КА). Одной из ключевых проблем является эффективный разгон КА до параболической скорости, необходимой для межпланетных перелётов, выхода на высокоэнергетические орбиты и выполнения гравитационных манёвров. Особую значимость эта задача приобретает при использовании двигательных установок малой тяги (ионных, плазменных, солнечно-парусных и других перспективных систем), которые, несмотря на высокий удельный импульс, требуют длительного времени работы и точного управления для достижения целевых параметров орбиты.

Применение малой тяги в космических миссиях позволяет значительно сократить расход рабочего тела и увеличить срок активного существования аппарата. Однако сложность управления таким разгоном заключается в необходимости оптимального выбора направления вектора тяги, минимизации времени манёвра и учёта изменяющейся массы КА. Эти факторы обуславливают важность применения методов оптимального управления, математического моделирования и численных расчётов.

Решение данной задачи имеет как фундаментальное значение для развития теории космического полёта, так и практическую ценность для проектирования реальных миссий, таких как полёты к Луне, Марсу, астероидам и другим объектам Солнечной системы. В связи с этим исследование процессов разгона КА с малой тягой остаётся актуальным направлением в космической динамике и системах управления.

Целью работы разработка теоретико-прикладного подхода к оптимизации разгона космического аппарата с двигательной установкой малой тяги до параболической скорости. Для достижения поставленной цели необходимо решить следующие задачи:

1. Формализация задачи оптимального управления – строгое математическое описание динамики космического аппарата с учётом переменной массы, гравитационных ограничений и нелинейного характера уравнений движения.
2. Синтез оптимального управления – определение законов изменения направления вектора тяги, обеспечивающих минимальное время достиже-

ния параболической скорости на основе принципа максимума Понтрягина.

3. Верификация математической модели – проведение комплексного численного анализа полученных решений с оценкой их чувствительности к изменению начальных условий и параметров двигательной установки.

Данное исследование призвано обеспечить связь между фундаментальными принципами оптимального управления и их практическим применением при разработке реальных схем выведения космических аппаратов с двигательными установками малой тяги.

Структура бакалаврской работы. В бакалаврской работе содержится введение, 5 разделов и заключение.

В первом разделе обзор литературы по механике космического полёта и проблемам управления движением КА

Во втором разделе приведена математическая модель движения КА при использовании малой тяги и дана постановка краевой задачи для оптимального управления.

В третьем разделе найдено оптимальное управление с помощью принципа максимума Понтрягина.

В четвёртом разделе разработана программа для численного моделирования процесса разгона КА.

В пятом разделе приведены примеры рассчётов для различных параметров разгона КА и анализ результатов

Основное содержание работы.

Общие принципы низкотяговой траектории и оптимального управления стали ключевыми в современных космических миссиях. Система электрического или ионного двигателя (с высоким удельным импульсом) позволяет постепенно разгонять КА до высокой скорости с меньшими затратами топлива, хотя время полёта при этом значительно возрастает.

Основные задачи литературы последних лет —-моделирование и оптимизация подобных разгонов в центральном поле притяжения, выбор управлений в условиях малой тяги и разработка численных методов решения таких задач.

Задача разгона космического аппарата до параболической скорости (скорости ухода) при малой тяге сводится к многооборотному наращиванию энергии орбиты. Типовым сценарием является вывод КА из геостационарного переходного орбита (GTO) или околоземной круговой орбиты к гиперболе относительно Земли. Как правило, оптимальный режим тока топлива близок к тангенциальному (по скорости), но оптимальное управление может содержать несколько горящих и безимпульсных фаз.

Модели движения КА в рамках задачи разгона учитывают центральное (двухтел) притяжение, а также возмущающие силы – притяжение других тел, дискретные периоды отсутствия тяги (бастования), сопротивление атмосферы для низких орбит, солнечное давление и изменение массы двигателя.

Пусть КА стартует с начальной круговой орбиты и совершает разгон в центральном поле тяготения под действием малой тяги P постоянной величины:

$$P = c\beta,$$

где c – скорость истечения, β – секундный расход массы. Следовательно, секундный расход массы определяется по формуле:

$$\beta = P/c.$$

С другой стороны, $P = a_0 m_0$, где a_0 – начальное ускорение, а m_0 – начальная масса КА.

Математическая модель основана на системе дифференциальных уравнений движения в полярных координатах:

$$\dot{r} = u,$$

$$\dot{\varphi} = \frac{w}{r},$$

$$\dot{u} = \frac{w^2}{r} + \frac{1}{r^2} + \alpha \cos \lambda,$$

$$\dot{w} = \frac{uw}{r} + \alpha \sin \lambda.$$

Здесь u и w – радиальная и трансверсальная составляющие скорости, λ – угол между радиусом-вектором и вектором тяги.

В конечный момент времени необходимо достигнуть параболической скорости; при этом удельная механическая энергия поступательного движения центра масс аппарата равна нулю. Запишем граничные условия:

$$t = t_0 : r_0 = 1, \quad \varphi_0 = 0, \quad u_0 = 0, \quad w_0 = 1,$$

$$t = t_k : h_k = \frac{u_k^2 + w_k^2}{2} - \frac{1}{r_k} = 0.$$

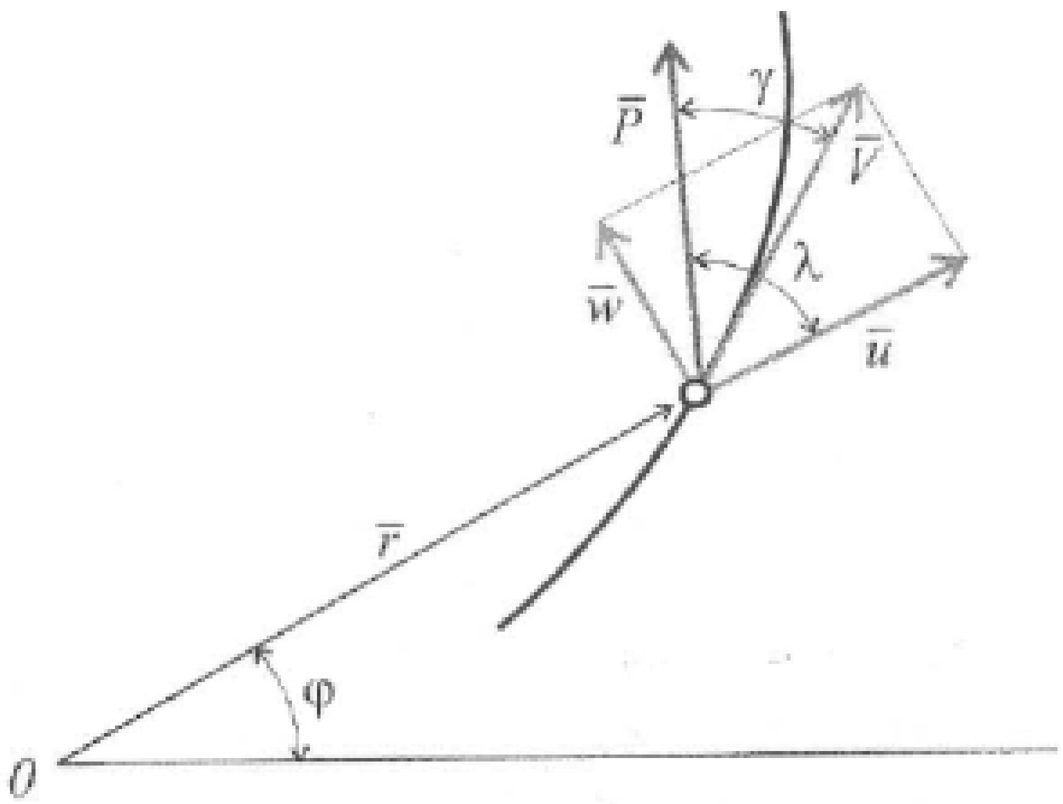

Рисунок 1 — Полярные координаты

Решается данная задача на основе принципа максимума Понтрягина. Введем сопряженную вектор-функцию ψ и запишем выражение для гамильтониана:

$$\psi = (\psi_r, \psi_\varphi, \psi_w, \psi_r)^T,$$

$$H = \psi_r u + \psi_\varphi \frac{w}{r} + \psi_w \left(\frac{w^2}{r} - \frac{1}{r^2} + a(t) \cos\lambda \right) + \psi_w \left(-\frac{uw}{r} + a(t) \sin\lambda \right) - 1.$$

Независимость системы от времени не вносит изменений в алгоритм решения задачи. В соответствии с принципом максимума необходимое условие оптимальности имеет вид

$$\frac{dH}{d\lambda} = -\psi_r a(t) \sin\lambda + \psi_w a(t) \cos\lambda = 0$$

Оптимальный угол управления определяется соотношением:

$$tg\lambda_{\text{opt}} = \frac{\psi_r}{\psi_u}$$

Запишем условия трансверсальности, учитывая связь между параметрами в конце траектории:

Для $\psi_r(t_k)$:

$$\psi_r(t_k) = \nu(u^2 + w^2)\Big|_{t_k}$$

Для $\psi_\varphi(t_k)$:

$$\psi_\varphi(t_k) = \nu \left(\frac{\partial g}{\partial \varphi} \right)\Big|_{l_k} = 0,$$

Для $\psi_u(t_k)$:

$$\psi_u(t_k) = \nu 2 r_k u_k\Big|_{t_k}$$

Для $\psi_w(t_k)$:

$$\psi_w(t_k) = \nu 2 r_k w_k\Big|_{t_k}$$

Используя терминальное условие $r_k(u_k^2 + w_k^2) = 2 \Rightarrow u_k^2 + w_k^2 =$ $= 2/r_k$ упрощаем :

$$\psi_u(t_k) = \psi_r(t_k) u_k r_k^2,$$

$$\psi_w(t_k) = \psi_r(t_k) w_k r_k^2.$$

Полная система уравнений, замкнутая оптимальным законом управления, принимает вид

$$\dot{r} = u,$$

$$\dot{u} = \frac{w^3}{r} + \frac{1}{r^2} + \frac{a_0}{1 - a_0 t/c} \cdot \frac{\psi_u}{\sqrt{\psi_u^2 + \psi_w^2}},$$

$$\dot{w} = -\frac{uw}{r} + \frac{a_0}{1 - a_0 t/c} \cdot \frac{\psi_w}{\sqrt{\psi_w^2 + \psi_w^2}},$$

$$\psi_r = \psi_u \frac{w^2}{r^2} - \psi_u \frac{2}{r} - \psi_w \frac{uw}{r},$$

$$\psi_u = -\psi_r + \psi_w \frac{w}{r},$$

$$\psi_w = -\psi_u \frac{2w}{r} + \psi_w \frac{u}{r}.$$

Для решения краевой задачи необходимо подобрать начальные значения $\psi_r(t_0)$, $\psi_u(t_0)$, $\psi_w(t_0)$ так, чтобы при $t = t_k$ удовлетворить трем условиям трансверсальности:

$$\psi_u(t_k) = \psi_r(t_k) u_k r_k^2, \quad \psi_w(t_k) = \psi_r(t_k) w_k r_k^2,$$

$$r_k \left(u_k^2 + w_k^2\right) = 2.$$

Таким образом, для выполнения двух условий трансверсальности необходимо подобрать начальные значения двух сопряженных переменных, т.е. решить краевую задачу второго порядка. Выразим их через величины, имеющие простой физический смысл:

$$tg\lambda = \psi_w/\psi_u, \text{ но } \overline{\psi}_w(t_0) = 1, \text{ поэтому } \overline{\psi}_u(t_0) = ctg\lambda(t_0).$$

$$\psi_r(t_0) = \frac{1 + \cos^2\lambda(t_0) + \dot{\lambda}(t_0)}{\sin^2\lambda(t_0)}.$$

Предположим, что в начале разгона угол λ близок к 90°, а скорость его изменения близка к 0, получим

$$\overline{\psi}_u^0(t_0) = 0,$$

$$\overline{\psi}_r^0(t_0) = 1.$$

Из условий трансверсальности следует, что

$$\frac{u(t_k)}{w(t_k)} = \frac{\psi_u(t_k)}{\psi_w(t_k)} = ctg\lambda(t_k).$$

Решив краевую задачу,получим оптимальный закон управления направлением вектора тяги.

Разработана программа, представляющая комплексное решение для моделирования оптимального разгона космического аппарата с двигателем малой тяги. Программа реализована на языке Python с использованием современных научных библиотек: NumPy для численных вычислений, SciPy для решения дифференциальных уравнений и оптимизации, а также Matplotlib для визуализации результатов. Основу программы составляет класс OptimalSpacecraftControl, который инкапсулирует логику моделирования движения аппарата, включая уравнения динамики, сопряженную систему, расчет гамильтониана и условия трансверсальности.

Класс содержит методы для задания уравнений движения, где радиальная и трансверсальная скорости, а также сопряженные переменные описываются системой дифференциальных уравнений. Оптимальное управление направлением вектора тяги определяется через отношение сопряженных переменных, что соответствует принципу максимума Понтрягина.

Метод *acceleration* вычисляет текущее ускорение двигателя в зависимости от времени. Формула учитывает изменение массы аппарата: ускорение уменьшается по мере расхода топлива.

Метод *equations_of_motion* определяет систему дифференциальных уравнений, описывающих движение аппарата и динамику сопряженных переменных. Здесь рассчитываются производные радиуса, угла, радиальной и трансверсальной скоростей, а также сопряженных переменных. Управление направлением тяги вычисляется через отношение сопряженных переменных, что автоматически обеспечивает выполнение принципа максимума.

Метод *energy* рассчитывает удельную механическую энергию аппарата на основе текущих значений радиуса и скоростей. Энергия используется для проверки достижения параболической скорости.

Метод *transversality_conditions* проверяет выполнение условий трансверсальности в конечной точке. Эти условия связывают сопряженные переменные с параметрами движения, гарантируя оптимальность траектории.

Метод *objective_function* служит целевой функцией для оптимизации. Он запускает интегрирование уравнений движения с пробными значениями сопряженных переменных, проверяет отклонения от условий трансверсальности и возвращает суммарную ошибку, которую необходимо минимизировать.

Метод *solve* управляет процессом оптимизации. Он использует алгоритм Нелдера-Мида для поиска оптимальных начальных значений сопряженных переменных, выполняет финальное интегрирование с найденными параметрами и возвращает все результаты: временные ряды координат, скоростей, энергии, угла управления и сопряженных переменных.

Метод *plot_results* визуализирует результаты моделирования. Он строит графики траектории в полярных и декартовых координатах, изменения энергии, компонент скорости, угла управления, гамильтониана и сопряженных переменных.

После запуска программы с параметрами $a_0 = 0.05$(начальное ускорение) и $c = 20.0$ (скорость истечения) можно ожидать получения результатов. Которые покажут траекторию движения КА в полярных координатах, скорости и изменение удельной энергии.

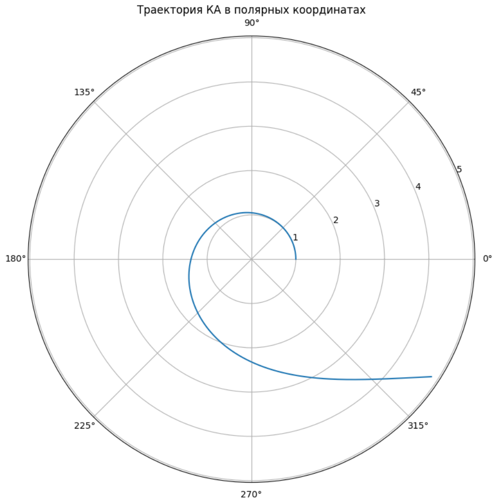

Рисунок 2 — Траектория движения КА в полярных координатах

Заключение. В ходе проведенного исследования была решена задача оптимального разгона космического аппарата с двигателем малой тяги до параболической скорости. На основе принципа максимума Понтрягина разработана математическая модель движения, учитывающая изменение массы аппарата и позволяющая определить оптимальный закон управления направлением вектора тяги. Разработанна программа представляющай эффективный инструмент для моделирования оптимального разгона космического аппарата с двигателем малой тяги. Реализация на Python с использованием современных научных библиотек обеспечивает высокую точность вычислений и наглядное представление результатов. Применение принципа максимума Понтрягина в сочетании с численными методами решения краевых задач позволило получить оптимальные траектории движения и законы управления вектором тяги.