

МИНОБРНАУКИ РОССИИ

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования

**«САРАТОВСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ Н.Г.ЧЕРНЫШЕВСКОГО»**

Кафедра математического и компьютерного моделирования

**Моделирование конвективного течения, вызванного
стационарным линейным источником тепла**

АВТОРЕФЕРАТ БАКАЛАВРСКОЙ РАБОТЫ

студента 4 курса 411 группы

направление 01.03.02 — Прикладная математика и информатика

механико-математического факультета

Чернявского Михаила Львовича

Научный руководитель
старший преподаватель

В.С. Кожанов

Зав. кафедрой
зав. каф., д.ф.-м.н., доцент

Ю.А. Блинков

Саратов 2025

Введение

Изучение конвективных течений, которые возникают из-за тепловых источников, является важной частью гидродинамики и теплообмена. Основы этой науки были заложены Л. Прандтлем, который в 1904 году разработал теорию пограничного слоя, а Г. Блазиус применил её для анализа трения. Позже Т. Карман в 1921 году предложил приближенные методы решения уравнений пограничного слоя, что сделало теорию более удобной для практического использования. Это помогло моделировать различные задачи, в том числе конвективные течения от стационарных источников тепла.

Особый интерес представляет анализ конвекции, вызванной линейными источниками, такими как длинные нагревательные элементы, геотермальные структуры или промышленные установки. В отличие от точечных источников, линейные создают неоднородные температурные поля, и это приводит к сложным взаимодействиям между теплопередачей и движением жидкости. Несмотря на достижения в вычислительной гидродинамике, вопросы моделирования стационарных линейных источников всё ещё требуют внимания, особенно в связи с влиянием среды и форм системы.

Актуальность работы связана с необходимостью предсказывать тепловые и гидродинамические характеристики систем, где линейные источники играют главную роль. Такие задачи возникают в различных областях, включая энергетику (например, охлаждение реакторов или проектирование теплообменников), экологию и климатическое моделирование. Понимание закономерностей конвективных потоков может помочь в экономии энергии, повышении надежности оборудования и снижении рисков аварий.

Цель исследования — разработка математической модели и анализ конвективного течения от стационарного линейного источника тепла. Для достижения поставленной цели необходимо решить следующие задачи:

- Обзор современных методов моделирования свободной конвекции и теории пограничного слоя.
- Формулировка уравнений Навье-Стокса и условий для стационарного линейного источника.
- Реализация численного алгоритма с использованием языка Python.

- Проверка модели через сопоставление с известными решениями и экспериментальными данными.

- Изучение влияния мощности источника, вязкости, теплопроводности и ориентации системы на движение жидкости и температурное поле.

Практическая значимость заключается в возможностях применения результатов в проектировании систем охлаждения и других технологий. Модель поможет в прогнозировании тепловых нагрузок, оптимизации форм нагревательных элементов и предотвращении перегрева в промышленных процессах.

Методология исследования включает аналитический анализ уравнений пограничного слоя и численное моделирование с использованием современных вычислительных инструментов. Применение алгоритмов на Python позволяет модели быть гибкой и масштабируемой для различных задач.

Структура работы отражает этапы научного исследования: введение, теоретические основы конвекции от стационарных линейных источников тепла, постановка задачи, описание численных методов, анализ результатов и заключение. Каждый раздел нацелен на достижение целей исследования.

Бакалаврская работа состоит из трех разделов.

В первом разделе описывается физическое явление.

Рассматривается механизм формирования течения:

Проводится анализ взаимодействия тепловых и гидродинамических процессов:

- Тепловое возмущение от источника ($\nabla^2 T = -\frac{Q}{\lambda} \delta(y)$)
- Градиент плотности ($\rho = \rho_0[1 - \beta(T - T_0)]$)
- Архимедова сила ($\vec{F}_b = \rho_0 \beta(T - T_0) \vec{g}$)

Далее строится математическая модель:

Система уравнений пограничного слоя в приближении Буссинеска описывается в следующем виде:

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} &= 0 \\ u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} &= \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + g\beta(T - T_0) \\ u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} &= \alpha \frac{\partial^2 T}{\partial y^2}\end{aligned}$$

Также описаны следующие стадии развития течения

- Тепловая стадия (нестационарный нагрев)
- Гидродинамическая стадия (развитие пограничного слоя)
- Стационарный режим (баланс плавучести и вязкости)

И подробно разобрана структура пограничного слоя:

Определены:

- Толщина динамического слоя ($\delta_v = 5.0xRa_x^{-1/4}$)
- Толщина термического слоя ($\delta_T = \delta_v \cdot Pr^{-1/2}$)
- Профили скорости и температуры

Во втором разделе рассмотрен случай ньютоновской жидкости.

В вязкую теплопроводную несжимаемую жидкость с температурой T_∞ вертикально помещена теплоизолированная пластина. Требуется изучить течение вблизи поверхности пластины, когда набегающая жидкость является:

1. ньютоновской,
2. степенной неньютоновской с нелинейной теплопроводностью.

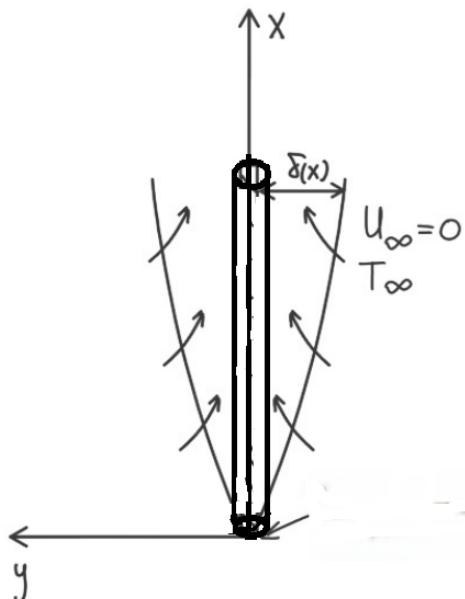


Рисунок 1 — Схема конвективного течения, индуцированного стационарным линейным источником тепла

Ось Ox направим вдоль поверхности цилиндра вверх, ось Oy направим перпендикулярно цилиндуру влево. Вдоль оси Oz течение будет считаться неограниченным, поэтому от координаты z решение зависеть не будет. Тре-

буется изучить поля скорости и температуры в пограничном слое. При этом пограничный слой показан сплошной линией а стрелка указывает, на линейный источник тепла. Схема течения изображена в соответствии с рисунком 1.

Также решена задача, в которой окружающая пластину жидкость является обычной ньютоновской несжимаемой жидкостью, течение в температурном пограничном слое с учетом тепла, которое выделяется вследствие работы сил вязкости, описывается системой уравнений:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} &= 0, \\ \rho \left(u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right) &= \mu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \rho g \beta (T - T_\infty), \\ \rho c \left(u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} \right) &= \lambda \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2. \end{aligned} \quad (1)$$

Границные условия:

– На поверхности пластины ($y = 0, x \geq 0$):

$$u = v = 0, \quad \frac{\partial T}{\partial y} = 0. \quad (2)$$

– Вдали от пластины ($y \rightarrow \infty$):

$$u \rightarrow 0, \quad T \rightarrow 0. \quad (3)$$

Интегральное условие (стационарный источник):

$$\rho c \int_0^{+\infty} u T dy = q = \text{const.} \quad (4)$$

Переходим к автомодельным переменным:

$$x = L \bar{x}, \quad y = Y \bar{y}, \quad (5)$$

$$u = U \bar{u}, \quad v = V \bar{v}, \quad (6)$$

$$T = \theta \bar{T}. \quad (7)$$

Необходимо ввести функцию тока:

$$\psi = \psi(\bar{x}, \bar{y}). \quad (8)$$

Вычислим компоненты вектора скорости через функцию тока:

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad (9)$$

$$v = -\frac{\partial \psi}{\partial x}. \quad (10)$$

После преобразований получим:

$$u = \left(\frac{qg\beta}{\rho c_p \sqrt{\vartheta}} \right)^{\frac{2}{5}} x^{\frac{1}{5}} f'(\xi), \quad (11)$$

$$v = \frac{1}{5} \left(\frac{qg\beta \vartheta^2}{\rho c_p} \right)^{\frac{1}{5}} x^{-\frac{2}{5}} [2\xi f'(\xi) - 3f(\xi)]. \quad (12)$$

После подстановки получаем систему уравнений для определения f и t

$$f''' + \frac{3}{5} f f'' - \frac{1}{5} (f')^2 + t = 0, \quad (13)$$

$$t'' + \frac{3}{5} Pr f t' = 0, \quad (14)$$

где $Pr = \frac{\lambda}{\rho C_p \mu}$ — число Прандтля.

– При $\xi = 0$:

$$f(0) = f'(0) = t'(0) = 0, \quad (15)$$

– При $\xi \rightarrow \infty$:

$$\left. \frac{df}{d\xi} \right|_{\xi \rightarrow \infty} \rightarrow 0, \quad t(\xi) \rightarrow 0, \quad (16)$$

– Интегральное условие:

$$\int_0^\infty t f' d\xi = 1. \quad (17)$$

Обсудим численное решение системы уравнений (13) и (14). ОДУ (1) является ОДУ 3-го порядка относительно функции f , а ОДУ (1) ОДУ 2-го порядка относительно функции t . Для численного интегрирования этих уравнений на полуинтервале $[0, \infty]$, необходимо наличие пяти начальных условий, а именно, при $\xi = 0$ необходимо знать:

– Начальные условия при $\xi = 0$:

$$\begin{aligned} f(0) &= f_{00}, \quad \left. \frac{df}{d\eta} \right|_{\eta=0} = f_{10}, \\ &\quad \left. \frac{d^2 f}{d\xi^2} \right|_{\xi=0} = f_{20}, \\ t(0) &= t_{00}, \quad \left. \frac{dt}{d\xi} \right|_{\xi=0} = t_{10}. \end{aligned} \tag{18}$$

– Известны только три условия. Значения f_{20} и t_{10} необходимо подобрать так, чтобы выполнялись:

$$\begin{aligned} f' \Big|_{\xi \rightarrow \infty} &\rightarrow 0, \\ \int_0^\infty t f' d\xi &= 1. \end{aligned}$$

– Условие $t' \Big|_{\xi \rightarrow \infty} \rightarrow 0$ не используется, так как оно не является независимым.

Для реализации вместо бесконечного интервала $[0, \infty)$ рассматривается конечный интервал $[0, \eta_m]$, где $\eta_m \gg 1$:

$$\eta = \eta_m : \quad \left. \frac{df}{d\xi} \right|_{\xi=\xi_m} = f_{1m} = 0. \tag{19}$$

Интегральное условие заменяется на:

$$I_m = \int_0^{\xi_m} t f' d\xi = 1. \tag{20}$$

Обозначим:

- f_{1m}^i — значение производной $\left. \frac{df}{d\xi} \right|_{\xi=\xi_m}$ на i -й итерации,

- I_m^i — значение интеграла I_m на i -й итерации.

Цель: найти f_{20}^i и t_{10}^i , минимизирующие невязки:

$$N_1^i = f_{1m}^i - 0 = f_{1m}^i,$$

$$N_2^i = I_m^i - 1.$$

Разности между расчетными и целевыми значениями:

$$N_1^i(f_{20}^i, t_{00}^i) = f_{1m}^i - f_{1m} = f_{1m}^i, \quad (21)$$

$$N_2^i(f_{20}^i, t_{10}^i) = I_m^i - I_m = I_m^i - 1. \quad (22)$$

Эти величины будем называть *невязками*. Введем норму невязок:

$$R^i = \sqrt{(N_1^i)^2 + (N_2^i)^2}. \quad (23)$$

Решение краевой задачи сводится к минимизации R^i . Итерационный процесс прекращается при выполнении условия:

$$R^i < \varepsilon, \quad (24)$$

где ε — заданная точность решения.

Для решения системы (13)-(14) применен комбинированный метод:

- Метод Ньютона — для уточнения начальных условий,
- Метод Рунге-Кутты 4-го порядка — для интегрирования уравнений.

В третьем разделе рассмотрена задача, в которой течение степенной неньютоновской жидкости с нелинейной теплопроводностью вблизи поверхности пластины с учетом тепла, которое выделяется вследствие работы сил

вязкости, описывается системой уравнений:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} &= 0, \\ \rho \left(u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right) &= \mu^* \frac{\partial}{\partial y} \left(\left| \frac{\partial u}{\partial y} \right|^{n-1} \frac{\partial u}{\partial y} \right) + \rho g \beta (T - T_\infty), \\ \rho c \left(u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} \right) &= \lambda^* \frac{\partial}{\partial y} \left(\left| \frac{\partial T}{\partial y} \right|^{m-1} \frac{\partial T}{\partial y} \right) + \mu^* \left| \frac{\partial u}{\partial y} \right|^{n+1}. \end{aligned} \quad (25)$$

Границные условия:

– На поверхности пластины ($y = 0, x \geq 0$):

$$u = v = 0, \quad \frac{\partial T}{\partial y} = 0. \quad (26)$$

– Вдали от пластины ($y \rightarrow \infty$):

$$u \rightarrow 0, \quad T \rightarrow 0. \quad (27)$$

Интегральное условие:

$$\rho c \int_0^{+\infty} u T dy = q = \text{const.} \quad (28)$$

Переходим к автомодельным переменным:

$$x = L\bar{x}, \quad y = Y\bar{y}, \quad (29)$$

$$u = U\bar{u}, \quad v = V\bar{v}, \quad (30)$$

$$T = \theta\bar{T}. \quad (31)$$

Введем функцию тока:

$$\psi = \psi(\bar{x}, \bar{y}). \quad (32)$$

Выразим компоненты скорости через функцию тока:

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad (33)$$

$$v = -\frac{\partial \psi}{\partial x}. \quad (34)$$

Получим

$$u = \rho^{-\frac{2n-1}{4n+1}} C_p^{-\frac{2n-1}{4n+1}} q^{\frac{2n-1}{4n+1}} g^{\frac{2n-1}{4n+1}} \beta^{\frac{2n-1}{4n+1}} \xi^{\frac{2n+1}{4n+1}} \nu^{*\frac{2n}{4n+1}} \eta^{\frac{2n}{4n+1}}, \quad (35)$$

$$v = Ax^{\frac{2n+1}{4n+1}} \frac{\partial \varphi}{\partial \xi} \frac{n+1}{4n+1} Byx^{-\frac{n+1}{4n+1}-1} - \frac{2n+1}{4n+1} Ax^{\frac{2n+1}{4n+1}} \varphi(\xi), \quad (36)$$

где

$$A = C_p^{\frac{1-2n}{4n+1}} \nu^{*\frac{2}{4n+1}} \rho^{\frac{1-2n}{4n+1}}, \quad B = \left(\left(\frac{gq\beta}{C_p\rho} \right)^{\frac{n-2}{4n+1}} \nu^{*\frac{3}{4n+1}} \right)^{-1}.$$

Выполнив преобразования, получим дифференциальные уравнения:

$$\frac{\left(\frac{d^2 f}{d\eta^2} \right) (2n+1)f}{1+4n} + \left(\frac{d^2 f}{d\eta^2} \right)^{n-1} \left(\frac{d^3 f}{d\eta^3} \right) - \frac{n \left(\frac{df}{d\eta} \right)^2}{1+4n}, \quad (37)$$

$$(2n+1)f \left(\frac{dt}{d\eta} \right) + (2n+1)t \left(\frac{df}{d\eta} \right) + \frac{(1+4n)^2 \rho^{-\frac{4+n}{3n+2}}}{3n+2}. \quad (38)$$

$$\frac{c_p^{-\frac{4+n}{3n+2}} q^{-\frac{2(n-1)}{3n+2}} g^{-\frac{3(n-1)}{3n+2}} \beta^{-\frac{3(n-1)}{3n+2}} \nu^{*\frac{5}{3n+2}} \eta^{-\frac{5}{3n+2}} \left(\frac{dt}{d\eta} \right)^{\frac{n-1}{3n+2}} \left(\frac{d^2 t}{d\eta^2} \right) \lambda^*}{3n+2} \quad (39)$$

$$\xi = 0 : \quad f(0) = f'(0) = t'(0) = 0, \quad (40)$$

$$\xi \rightarrow \infty : \quad \left. \frac{df}{d\xi} \right|_{\xi \rightarrow \infty} \rightarrow 0, \quad t(\xi) \rightarrow 0, \quad (41)$$

$$\int_0^\infty t f' d\xi = 1. \quad (42)$$

В итоге получим:

$$\int_0^\infty t(\xi, Ec)f'(\xi, Ec)d\xi = 1 + 0.18Ec. \quad (43)$$

Заключение Решена задача о конвективном течении, вызванным стационарным линейным источником тепла, как для случая ньютоновских, так и для случая неニュтоновских сред. Эта задача является автомодельной. Выполнен переход к автомодельным переменным и сформулирована краевая задача в автомодельных переменных. После ряда преобразований, решение задачи сводится к решению системы ОДУ для автомодельных представителей функции тока. Для решения задачи применен численный метод, представляющий собой комбинацию метода Ньютона и метода Рунге-Кутты 4-го порядка