

МИНОБРНАУКИ РОССИИ

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования

**«САРАТОВСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ Н.Г.ЧЕРНЫШЕВСКОГО»**

Кафедра математического и компьютерного моделирования

**Задача о минимуме затрат энергии на управление
ориентацией наноспутника**

АВТОРЕФЕРАТ БАКАЛАВРСКОЙ РАБОТЫ

студента 4 курса 411 группы

направление 01.03.02 — Прикладная математика и информатика

механико-математического факультета

Яценко Дмитрия Андреевича

Научный руководитель
доцент, к.т.н., доцент

И.А Панкратов

Зав. кафедрой
зав. каф., д.ф.-м.н., доцент

Ю.А. Блинков

Введение. Развитие малых космических аппаратов, в том числе наноспутников, является одним из приоритетных направлений развития современной космической техники. Особенности таких аппаратов — малая масса, ограниченные энергетические ресурсы и компактные размеры — предъявляют высокие требования к системам управления, в особенности к системам ориентации. Одной из ключевых задач при эксплуатации наноспутников становится минимизация энергетических затрат на выполнение манёвров ориентации при сохранении высокой точности и надёжности управления.

Данная бакалаврская работа посвящена разработке методов оптимального управления ориентацией наноспутника, основанных на применении принципа максимума Понтрягина. Особое внимание уделяется построению математической модели динамики движения с учётом внешних воздействий, таких как аэродинамический момент и момент гравитационной стабилизации.

В рамках исследования анализируются существующие методы управления ориентацией, формулируется задача оптимального управления, проводится вывод сопряжённой системы уравнений и предлагается численная схема решения задачи. Для проверки работоспособности метода выполнена программная реализация алгоритма на языке Python с использованием библиотек SciPy и NumPy, что позволило провести точное моделирование процесса переориентации спутника и исследовать влияние различных параметров модели на качество управления.

Актуальность работы. Развитие наноспутников приводит к росту требований к энергоэффективности и автономности систем ориентации. Поскольку наноспутники обладают крайне ограниченными ресурсами аккумуляторной энергии, времени связи с Землей и вычислительными ресурсами на борту, необходимо применять такие методы управления, которые обеспечивают высокую эффективность работы системы ориентации без перерасхода энергии. Минимизация затрат на маневрирование позволяет не только увеличить срок службы спутника, но и повысить надёжность выполнения миссии в целом, что критически важно для малых исследовательских и образовательных космических проектов.

В современных условиях, когда всё большее число миссий предполагает использование групп наноспутников (например, в рамках концепции спутни-

ковых созвездий), требования к оптимальности управления становятся ещё более жёсткими. Таким образом, разработка и исследование методов оптимального управления движением и ориентацией наносистем имеет несомненную научную и практическую значимость.

Цель работы. Целью настоящей работы является построение математической модели управления ориентацией наноспутника с учётом внешних аэродинамических и гравитационных воздействий, а также разработка эффективного алгоритма оптимального управления, минимизирующего энергетические затраты на маневр ориентации за фиксированный промежуток времени.

Для достижения поставленной цели решаются следующие задачи:

- анализ существующих методов управления ориентацией малых космических аппаратов и их применимости к наноспутникам;
- формулировка математической модели вращения спутника с учётом внешних возмущений;
- построение задачи оптимального управления с заданными граничными условиями и критерием минимизации интегральных затрат энергии;
- применение принципа максимума Понтрягина и вывод сопряжённой системы уравнений;
- разработка численного метода решения задачи оптимального управления (метод стрельбы);
- реализация алгоритма на языке Python с использованием научных библиотек для точного численного моделирования;
- проведение параметрического анализа влияния коэффициентов внешних моментов и инерционных характеристик на поведение системы.

Постановка задачи. Рассматривается задача перевода системы из заданного начального состояния $(\alpha_1(0), \alpha_2(0))$, где $\alpha_1(0)$ — начальный угол ориентации, $\alpha_2(0)$ — начальная угловая скорость, в заданное конечное состояние $(\alpha_1(T), \alpha_2(T))$ за фиксированное время T . При этом требуется минимизировать функционал затрат энергии:

$$J = \int_0^T u^2(t) dt \rightarrow \min,$$

где $u(t)$ — управляющий момент, формируемый системой ориентации спутника. Функционал J выражает интегральные затраты энергии за время выполнения манёвра. Следовательно, минимизация J позволяет оптимизировать энергопотребление системы управления ориентацией.

Структура бакалаврской работы. Бакалаврская работа состоит из введения, пяти глав основного содержания, заключения, списка использованных источников и приложений. Каждая из частей имеет свою роль в логическом построении исследования и достижении поставленной цели — разработки алгоритма оптимального управления ориентацией наноспутника с минимальными энергетическими затратами.

Первая глава содержит обзор современных подходов к управлению ориентацией космических аппаратов. Описываются как классические пассивные методы стабилизации, так и активные системы управления, включая линейно-квадратичные регуляторы (LQR), применение принципа максимума Понтрягина (ПМП) и численные алгоритмы оптимизации. Отдельное внимание уделено особенностям ориентации малых спутников типа CubeSat.

Вторая глава содержит построение математической модели вращения наноспутника вокруг одной главной оси. Представлена система дифференциальных уравнений, учитывающая аэродинамический момент $k_a \sin \alpha_1$, гравитационный момент $k_g \sin 2\alpha_1$, а также управляющее воздействие $u(t)$. Проведено физическое обоснование каждого члена модели. Даны граничные условия задачи и введён функционал энергетических затрат, подлежащий минимизации:

$$J = \int_0^T u^2(t) dt.$$

Также рассмотрено приближение малых углов и приведена линеаризованная модель системы.

В третьей главе осуществляется постановка задачи оптимального управления на основе принципа максимума Понтрягина. Сформирован гамильтониан:

$$H = \psi_1 \alpha_2 + \psi_2 \frac{1}{J_p} (k_a \sin \alpha_1 + k_g \sin 2\alpha_1 + u) - \frac{u^2}{2},$$

выведены уравнения сопряжённых переменных, получено выражение для оптимального управления:

$$u^*(t) = \frac{\psi_2(t)}{J_p}.$$

Проведён анализ стационарных решений, исследована устойчивость равновесий, определена зависимость характера равновесия от параметров k_a , k_g , J_p .

Четвёртая глава посвящена разработке численного алгоритма решения задачи оптимального управления. Реализован метод стрельбы с использованием библиотеки `SciPy`. Подбор начальных условий сопряжённых переменных осуществляется с применением функции `fsolve`. Осуществлена верификация модели по соблюдению граничных условий. Построены графики фазовых переменных, оптимального управления и фазовых портретов.

В пятой главе проводится численный эксперимент по исследованию влияния параметров модели на процесс переориентации спутника. Рассматриваются вариации момента инерции J_p , коэффициентов k_a и k_g . Для каждого случая рассчитано оптимальное время манёвра, профиль управляющего воздействия и энергетические затраты. Представлены таблицы и графики зависимости характеристик управления от параметров модели. Сделаны выводы о влиянии внешних моментов и инерционных характеристик на эффективность управления.

Таким образом, структура работы обеспечивает логичное и последовательное раскрытие темы — от постановки задачи и анализа теоретических основ до практической реализации и анализа полученных результатов.

Основное содержание работы. Основу исследования составляет задача оптимального управления ориентацией наноспутника при учёте внешних аэродинамических и гравитационных моментов. В работе рассматривается вращательное движение наноспутника вокруг одной из главных осей инерции в условиях низкой околоземной орбиты.

Динамика вращения наноспутника описывается системой нелинейных дифференциальных уравнений второго порядка, учитывающей влияние внешних моментов и управляющего воздействия. Система уравнений имеет

следующий вид:

$$\begin{aligned}\dot{\alpha}_1 &= \alpha_2, \\ \dot{\alpha}_2 &= \frac{1}{J_p} (k_a \sin \alpha_1 + k_g \sin 2\alpha_1 + u(t)),\end{aligned}$$

где:

- $\alpha_1(t)$ — угол ориентации наноспутника относительно базового направления;
- $\alpha_2(t)$ — угловая скорость вращения;
- k_a — коэффициент, характеризующий аэродинамический момент;
- k_g — коэффициент гравитационного момента (момента гравитационной стабилизации);
- J_p — приведённый момент инерции аппарата;
- $u(t)$ — управляющий момент, определяемый системой управления.

Целью является перевод спутника из заданного начального состояния $(\alpha_1(0), \alpha_2(0))$ в конечное $(\alpha_1(T), \alpha_2(T))$ за фиксированный промежуток времени T при минимальных энергетических затратах. В качестве критерия оптимальности используется функционал:

$$J = \int_0^T u^2(t) dt,$$

который представляет собой интеграл от квадрата управляющего воздействия, пропорциональный расходу энергии или ресурса исполнительных механизмов.

Для решения поставленной задачи применяется метод оптимального управления на основе принципа максимума Понтрягина. В рамках этого подхода вводятся сопряжённые переменные $\psi_1(t)$ и $\psi_2(t)$, соответствующие фазовым переменным $\alpha_1(t)$ и $\alpha_2(t)$, и формируется гамильтониан:

$$H = \psi_1 \alpha_2 + \psi_2 \frac{1}{J_p} (k_a \sin \alpha_1 + k_g \sin 2\alpha_1 + u) - \frac{u^2}{2}.$$

Согласно принципу максимума, оптимальное управление $u^*(t)$ определяется из условия максимизации гамильтониана по переменной u . Решая урав-

нение $\frac{\partial H}{\partial u} = 0$, получаем выражение для оптимального управляющего момента:

$$u^*(t) = \frac{\psi_2(t)}{J_p}.$$

Подстановка этого выражения в исходную систему приводит к так называемой канонической системе уравнений, включающей как фазовые переменные, так и сопряжённые:

$$\begin{aligned}\dot{\alpha}_1 &= \alpha_2, \\ \dot{\alpha}_2 &= \frac{1}{J_p} \left(k_a \sin \alpha_1 + k_g \sin 2\alpha_1 + \frac{\psi_2}{J_p} \right), \\ \dot{\psi}_1 &= -\frac{\psi_2}{J_p} (k_a \cos \alpha_1 + 2k_g \cos 2\alpha_1), \\ \dot{\psi}_2 &= -\psi_1.\end{aligned}$$

Таким образом, задача оптимального управления сведена к решению нелинейной краевой задачи для системы из четырёх дифференциальных уравнений первого порядка с граничными условиями на фазовые переменные. Найденное решение определяет не только поведение спутника во времени, но и оптимальный закон управления $u(t)$, обеспечивающий минимальные энергетические затраты при выполнении манёвра ориентации. Анализ полученной системы и её численная реализация являются ключевыми элементами последующих глав работы.

Численная реализация задачи. Для практической реализации задачи оптимального управления ориентацией наноспутника используется метод стрельбы, основанный на принципе максимума Понтрягина. Основная идея метода заключается в подборе начальных значений сопряжённых переменных $\psi_1(0)$ и $\psi_2(0)$ таким образом, чтобы при интегрировании расширенной системы уравнений фазовые переменные $\alpha_1(t)$ и $\alpha_2(t)$ в момент времени T достигли заданных конечных значений.

Процесс численного решения включает следующие этапы:

- Формирование полной системы дифференциальных уравнений, включающей фазовые переменные α_1 , α_2 и сопряжённые переменные ψ_1 , ψ_2 ;

- Задание начальных условий для фазовых переменных $(\alpha_1(0), \alpha_2(0))$ и начального приближения для сопряжённых переменных $(\psi_1(0), \psi_2(0))$;
- Численное интегрирование системы на интервале $[0, T]$ методом Рунге–Кутты 5-го порядка с адаптивным шагом, обеспечивающим высокую точность за счёт параметров $\text{rtol}=1\text{e-}10$ и $\text{atol}=1\text{e-}10$;
- Расчёт невязки между фактически достигнутыми и заданными конечными значениями фазовых переменных;
- Использование метода Ньютона–Рафсона (через `fsolve`) для коррекции начальных значений сопряжённых переменных до достижения необходимой точности.

Управляющее воздействие на каждом шаге определяется по формуле:

$$u(t) = \frac{\psi_2(t)}{J_p},$$

что соответствует условию максимума гамильтониана.

В соответствии с рисунком 1 представлено изменение угла ориентации $\alpha_1(t)$ во времени. Видно, что система плавно достигает заданного конечного положения за фиксированное время, что свидетельствует об эффективности предложенного алгоритма:

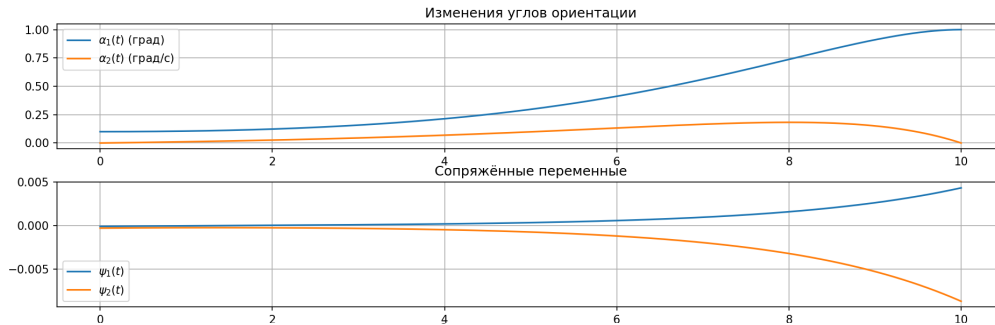


Рисунок 1 — Изменение угла ориентации наноспутника во времени

В соответствии с рисунком 2 изображено оптимальное управляющее воздействие $u(t)$, формируемое в процессе управления. Оно демонстрирует плавный характер, без резких скачков, что благоприятно с точки зрения реального функционирования исполнительных механизмов:

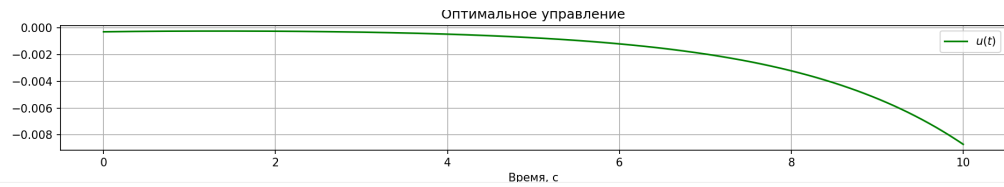


Рисунок 2 — Оптимальное управляющее воздействие во времени

В соответствии с рисунком 3 представлен фазовый портрет системы (α_1, α_2) , позволяющий визуализировать эволюцию фазовых переменных и оценить динамику переориентации в пространстве состояний. Кривая демонстрирует устойчивую траекторию, без колебательных процессов:

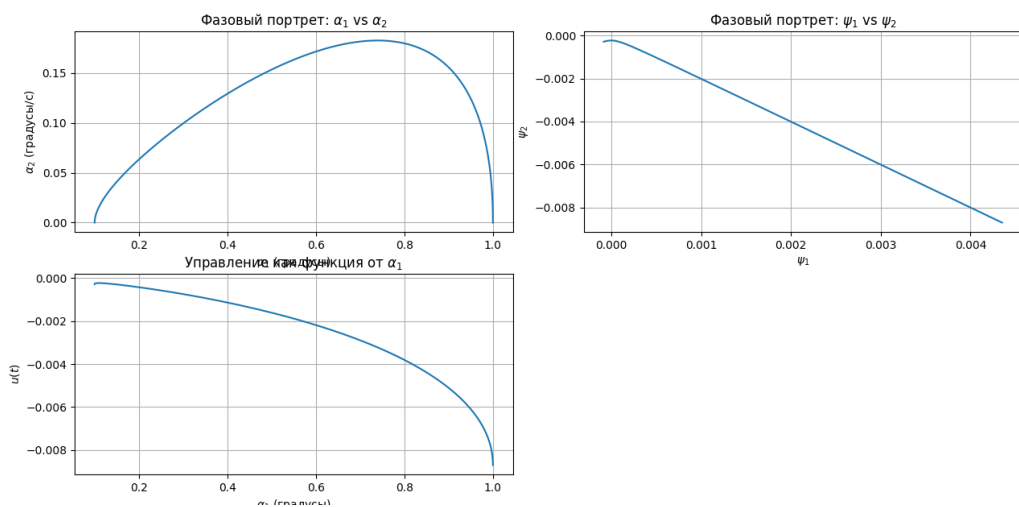


Рисунок 3 — Фазовый портрет системы (α_1, α_2)

Таким образом, численная реализация задачи подтверждает работоспособность предложенной математической модели и применимость метода Понтрягина для получения энергооптимальных траекторий управления ориентацией наноспутника.

Заключение. В рамках данной бакалаврской работы была разработана математическая модель оптимального управления ориентацией наноспутника, учитывающая аэродинамические и гравитационные внешние воздействия. Для решения сформулированной задачи применён принцип максимума Понтрягина, что позволило аналитически определить вид оптимального управляющего воздействия в виде зависимости от сопряжённой переменной.

Рассмотренная динамическая модель вращения спутника в одной степени свободы позволила свести задачу к интегрированию расширенной системы

из четырёх дифференциальных уравнений. Численная реализация решения задачи осуществлялась методом стрельбы с использованием функций численного интегрирования и поиска корней нелинейных уравнений. Программная реализация проведена на языке Python с применением библиотек SciPy и NumPy, что обеспечило высокую точность результатов.

Численные эксперименты подтвердили работоспособность предложенного алгоритма: удалось получить траектории переориентации, минимизирующие энергетические затраты, а также обеспечить высокую точность достижения заданных конечных состояний. Полученные результаты позволяют судить о возможности практического применения метода для управления реальными малогабаритными космическими аппаратами.

Проведённый параметрический анализ показал существенное влияние моментов аэродинамического сопротивления и гравитационной стабилизации на процесс переориентации. Было установлено, что увеличение коэффициента гравитационного момента способствует ускорению процесса ориентации, тогда как рост момента инерции спутника приводит к увеличению продолжительности манёвра. Эти результаты важны для этапа проектирования характеристик систем ориентации наноспутников.

Практическая ценность работы заключается в разработке энергоэффективных законов управления, которые могут быть использованы в современных и перспективных миссиях малых космических аппаратов. Разработанные алгоритмы также могут быть адаптированы для задач группового управления наносателлитами в составе спутниковых созвездий.

Возможными направлениями дальнейших исследований могут стать:

- Расширение математической модели на случай трёхмерного вращения;
- Учёт дополнительных внешних возмущающих факторов, таких как солнечное давление или магнитные моменты;
- Разработка робастных методов оптимального управления с учётом неопределённостей в параметрах модели;
- Реализация алгоритмов оптимального управления в реальном времени с использованием ограниченных вычислительных ресурсов на борту наноспутника.

Таким образом, результаты работы демонстрируют эффективность использования методов оптимального управления для энергосберегающих систем ориентации МКА и создают базу для дальнейших исследований в данной области.