МИНОБРНАУКИ РОССИИ

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования
«САРАТОВСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ Н. Г. ЧЕРНЫШЕВСКОГО»

Кафедра дифференциальных уравнений и математической экономики

О БАЗИСАХ РИССА ИЗ СОБСТВЕННЫХ ФУНКЦИЙ НЕКОТОРЫХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ

АВТОРЕФЕРАТ МАГИСТЕРСКОЙ РАБОТЫ

студента 2 курса 217 группы
направления 01.04.02 — Прикладная математика и информатика

механико-математического факультета
Алейникова Владислава Александровича

Научный руководитель
доцент, к.ф.-м.н., доцент _____________ В. П. Курдюмов

Заведующий кафедрой
зав. каф., д.ф.-м.н., профессор _____________ С. И. Дудов

Саратов 2025

Введение. Исследование интегральных и интегро-дифференциальных операторов остается одной из актуальных и перспективных тем в спектральной теории операторов. Такие операторы находят широкое применение в математической физике, теории управления, численных методах и многих других областях, что обусловлено их способностью моделировать сложные динамические процессы. Одним из важных аспектов изучения таких операторов является вопрос о базисности Рисса системы их собственных и присоединенных функций.

Актуальность темы обусловлена ключевой ролью интегральных операторов в современном математическом анализе и их приложениях в физике, технике и вычислительных науках. Исследование базисов Рисса из собственных и присоединённых функций таких операторов позволяет решать задачи спектрального синтеза, анализа устойчивости систем и моделирования процессов с распределёнными параметрами.

Целью работы является доказательство базисности Рисса системы собственных и присоединенных функций интегрального оператора с переменным пределом интегрирования и разработка программы численного решения интегрального уравнения для нахождения обратного к исходному оператору.

Моя магистерская работа базируется на работе В.П. Курдюмова и А.П. Хромова «О базисах Рисса из собственных функций интегрального оператора с переменным пределом интегрирования», опубликованной в журнале математические заметки, том 76, выпуск 1, на страницах 97-110 в 2004 году. В этой статье рассматривался случай с порядком производной $4q$, где q — натуральное число. В моей работе порядок производной равен единице. То есть рассматривается задача о базисности Рисса системы собственных и присоединенных функций интегрального оператора

$$Af(x) = \int_0^{1-x} A(1-x,t)f(t)dt, \quad x \in [0,1], \tag{1}$$

ядро которого удовлетворяет условиям: при $0 \leqslant t \leqslant x \leqslant 1$ существуют и непрерывны производные

$$\frac{\partial^{j+s}}{\partial x^j \partial t^s} A(x,t), \quad (j,s = 0,1),$$

и, кроме того,

$$\frac{\partial^j}{\partial x^j} A(x,t)\Big|_{t=x} = \delta_{0,j}, \quad j = 0, 1, \tag{2}$$

где $\delta_{i,j}$ — символ Кронекера.

Для достижения поставленной цели необходимо выполнить следующие задачи:

1. Привести исходный интегральный оператор к интегро-дифференциальной форме;
2. Построить резольвенту интегро-дифференциального оператора;
3. Доказать базисность Рисса системы собственных и присоединенных функций для рассматриваемого оператора;
4. Разработать программное обеспечение для численного решения интегрального уравнения, для нахождения обратного оператора;
5. Провести тестирование программы и проанализировать полученные результаты.

Работа состоит из введения, четырех разделов, заключения, списка использованных источников и приложения, содержащего код программы.

Основное содержание работы. Первый раздел работы посвящен приведению интегрального оператора с переменным пределом интегрирования к эквивалентному интегро-дифференциальному оператору в пространстве вектор-функций.

Сведение к интегро-дифференциальному оператору в пространстве вектор-функций. Вводится интегральный оператор N, связанный с производной ядра:

$$Nf(x) = \int_0^x N(x,t) f(t) dt, \quad N(x,t) = A_x(x,t),$$

где

$$A_x f(x) = \int_0^x A'_x(x,t) f(t) dt, \quad A'_x(x,t) = \frac{\partial}{\partial x} A(x,t).$$

В лемме 1 доказывается обратимость оператора $E+N$, где E — тождественный оператор, и явный вид обратного оператора $(E+N)^{-1} = E + N_1$, где $N_1 f(x) = \int_0^x N_1(x,t) f(t) dt$. Устанавливается связь между оператором N и N_1 через интегральное уравнение.

После этого следует теорема 1, устанавливающая существование и вид обратного к оператору A. Проверяется, что указанный вид оператора A^{-1} действительно является обратным к A, путем подстановки и использования свойств ядра. По теореме 1 оператор A^{-1} существует и имеет вид

$$A^{-1}y(x) = -y'(1-x) - \int_0^x N_{1,t}(x,t)y(1-t)dt,$$

$$y(1) = 0,$$

где $N_1 = (E+N)^{-1} - E, \quad N(x,t) = A_x(x,t), \quad N_{1,t} = \frac{\partial N_1(x,t)}{\partial t}, y'(1-x) = y'_\xi(\xi)\big|_{\xi=1-x}$. Этот результат принципиально важен, поскольку позволяет свести исходную задачу об интегральном операторе A к исследованию более удобного интегро-дифференциального оператора, что открывает путь к применению методов спектральной теории.

После теоремы 1 следует ряд обозначений, необходимых для упрощения формул в дальнейшем исследовании.

$$B = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}, \Gamma = \begin{pmatrix} 1 & i \\ i & 1 \end{pmatrix},$$

$$\widetilde{N}(x,t) = \begin{pmatrix} \varepsilon(t,x)N_{1,t}(\frac{1}{2}-x,\frac{1}{2}-t) & 0 \\ -N_{1,t}(\frac{1}{2}+x,\frac{1}{2}-t) & -\varepsilon(x,t)N_{1,t}(\frac{1}{2}+x,\frac{1}{2}+t) \end{pmatrix},$$

$$N = B\Gamma^{-1}\widetilde{N}\Gamma, \quad P = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad Q = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & i \end{pmatrix}.$$

Вводятся новые переменные $z_1(x) = y(\frac{1}{2}+x)$ и $z_2(x) = y(\frac{1}{2}-x)$, после чего исходное уравнение записывается как система уравнений

$$z_2'(x) - \int_0^{\frac{1}{2}} N_{1,t}\left(\frac{1}{2}+x,\frac{1}{2}-t\right)z_1(t)dt - \int_0^x N_{1,t}\left(\frac{1}{2}+x,\frac{1}{2}+t\right)z_2(t)dt = \lambda z_1(x),$$

$$z_1'(x) + \int_x^{\frac{1}{2}} N_{1,t}\left(\frac{1}{2}-x,\frac{1}{2}-t\right)z_1(t)dt = -\lambda z_2(x),$$

при граничном условии $z_1(0) = z_2(0)$.

Таким образом, интегральное уравнение сводится к краевой задаче для интегро-дифференциальной системы первого порядка с параметром λ, действующей в пространстве вектор-функций $L_2([0, \frac{1}{2}]) \times L_2([0, \frac{1}{2}])$. Это преобразование закладывает основу для дальнейшего спектрального анализа.

Через L обозначается интегро-дифференциальный оператор $Bu' + Nu$, $x \in [0, \frac{1}{2}]$, $U(u) = Pu(0) + Qu(\frac{1}{2}) = 0$. В следующей теореме доказывается эквивалентность собственных функций $y(x)$ оператора А и собственных функций $u(x)$ оператора L, что позволяет совершить переход от интегрального оператора A к рассмотрению интегро-дифференциального оператора L.

В теореме 2 доказывается, что если $y(x)$ является собственной функцией оператора A, для характеристического значения λ, то

$$u(x) = \Gamma^{-1} \begin{pmatrix} y(\frac{1}{2} + x) \\ y(\frac{1}{2} - x) \end{pmatrix}, x \in \left[0, \frac{1}{2}\right],$$

является собственной функцией оператора L для собственного значения λ и обратно: если $u(x)$ является собственным значением оператора L, то

$$y(x) = \begin{cases} (\Gamma u(x - \frac{1}{2}))_1, & x \in [\frac{1}{2}, 1], \\ (\Gamma u(\frac{1}{2} - x))_2, & x \in [0, \frac{1}{2}], \end{cases}$$

где $(u(x))_i$ — i-я координата $u(x)$, является собственной функцией оператора A. Данная теорема устанавливает фундаментальную связь между спектральными свойствами исходного интегрального оператора A и преобразованного интегро-дифференциального оператора L, показывая взаимно-однозначное соответствие между их собственными функциями. Этот результат критически важен для всей работы, так как позволяет перенести задачу исследования базисности Рисса для сложного интегрального оператора A на существенно более простой оператор L, для которого стандартные методы спектральной теории оказываются применимы. Теорема 2 дает явные формулы преобразования собственных функций между операторами через матрицу Γ, что обеспечивает возможность доказательства основного результата о базисности в исходном пространстве.

Во втором разделе работы строится резольвента интегро-дифференциального оператора L, исследуется её асимптотическое поведение при больших $|\lambda|$ и доказываются ключевые оценки, необходимые для последующего доказательства базисности Рисса системы собственных функций интегрального оператора A. Для построения резольвенты оператора L сначала строится резольвента более простого оператора L_0, а резольвента оператора L находится методом возмущений.

Резольвента оператора L. Вводится оператор L_0, который имеет следующий вид $L_0 y = By'(x)$, где вектор-функция $y(x)$ удовлетворяет условию $U(y) = 0$.

Далее следует ряд обозначений, которые упрощают дальнейшие выкладки.

$$\omega_1 = -i, \quad \omega_2 = i,$$

$$\sigma_1(x,\lambda) = e^{\lambda\omega_1(x-\frac{1}{2})}, \quad \sigma_2(x,\lambda) = e^{\lambda\omega_2 x},$$

$$g_1(x,t,\rho) = -\omega_1\varepsilon(t,x)e^{\lambda\omega_1(x-t)}, \quad g_2(x,t,\rho) = \omega_2\varepsilon(x,t)e^{\lambda\omega_2(x-t)},$$

$$Y(x,\lambda) = \begin{pmatrix} \sigma_1(x,\lambda) & 0 \\ 0 & \sigma_2(x,\lambda) \end{pmatrix},$$

$$g(x,t,\lambda) = \begin{pmatrix} g_1(x,t,\lambda) & 0 \\ 0 & g_2(x,t,\lambda) \end{pmatrix}.$$

После приведенных обозначений приводится лемма 2, которая устанавливает явный вид общего решения системы дифференциальных уравнений $By'(x,\lambda) - \lambda y(x,\lambda) = f(x)$, как $y(x,\lambda) = Y(x,\lambda)C + \int_0^{\frac{1}{2}} g(x,t,\lambda)f(t)dt$. Ключевым моментом является разделение системы на два независимых уравнения, что позволяет явно выписать решения для каждой компоненты y_1 и y_2 через экспоненциальные функции и интегралы с функциями-индикаторами $\varepsilon(t,x)$, обеспечивающими выполнение краевых условий. Этот результат служит основой для последующего построения резольвенты и анализа спектральных свойств оператора.

В лемме 3 устанавливается, что для резольвенты $R_{0,\lambda}$ оператора L_0 имеет место формула

$$R_{0,\lambda} = \int_0^{\frac{1}{2}} g(x,t,\lambda)f(t)dt - Y(x,\lambda)U^{-1}(Y(x,\lambda)) \int_0^{\frac{1}{2}} U_x(g(x,t,\lambda))f(t)dt,$$

где U применяется к $g(x,t,\lambda)$ по x. Это представление позволяет контролировать асимптотику резольвенты при $|\lambda| \to \infty$ и доказывать её равномерную ограниченность в выделенных областях комплексной плоскости, что является ключевым для последующего анализа спектральных свойств оператора L.

Обозначим через S_1 область вида $S_1 = \{\ \lambda\ |Re\ i\lambda \leqslant 0\}$. Через $S_{1,\delta}$ обозначим область, получающуюся из S_1 удалением всех точек $\lambda_m = -i\,ln\,i + 2m\pi$, являющихся собственными значениями оператора L_0, вместе с круговыми окрестностями γ_n одного и того же радиуса δ.

В лемме 4 доказывается, что определитель $\Delta(\lambda)$ матрицы $U(Y)$ имеет вид $\Delta(\lambda) = 1 + ie^{i\lambda}$. Лемма устанавливает фундаментальную связь между краевыми условиями и спектральными свойствами оператора.

Далее следует лемма 5, где доказывается, что в области S_1, δ при достаточно больших $|\lambda|$ для $G_0(x,t,\lambda)$ имеет место асимптотическая формула

$$G_0(x,t,\lambda) = g(x,t,\lambda) + T(x,t,\lambda),$$

где компоненты матрицы $T(x,t,\lambda)$ являются линейными комбинациями $\sigma_i(x,\lambda)\sigma_l(\frac{1}{2}-t,\lambda)$ с коэффициентами являющимися ограниченными функциями λ. Этот результат принципиально важен, так как позволяет контролировать рост резольвенты при $|\lambda| \to \infty$ и обосновывает равномерную ограниченность операторных норм.

В теореме 3 устанавливается, что в области $S_{1,\delta}$ для резольвенты оператора L при больших $|\lambda|$ справедливо представление

$$R_\lambda = R_{0,\lambda} - R_{0,\lambda}N(E+K)^{-1}R_{0,\lambda},$$

где $K = R_{0,\lambda}N$. Теорема 3 имеет фундаментальное значение для всего исследования, так как устанавливает явную связь между резольвентами оператора L и L_0.

Через $\sigma(x,\lambda,m)$ обозначается одна из функций $\sigma_i(x,\lambda+2m\pi)$ $(i=1,2)$; через $\omega(x,t,\lambda,m)$ — функция $\varepsilon(x,t)e^{(\rho+2m\pi)\omega_2(x-t)}$.

Операторы $P_m g(x) = \int_0^{\frac{1}{2}} p(x,t,\lambda,m)g(t)dt$, где $p(x,t,\lambda_m) = \sigma(x,\lambda,m) \times \sigma(t,\lambda,m)$ или $p(x,t,\lambda,m) = \omega(x,t,\lambda,m)$ будем называть элементарными.

В лемме 6, утверждается, что если ядра всех операторов P_m отличаются лишь параметром m и λ принадлежит ограниченной области, то

$$\sum_{m=1}^{\infty} ||P_m g||^2 \leqslant C||g||^2,$$

где C не зависит от λ и нормы берутся в $L_2[0, \frac{1}{2}]$. Данная лемма является технически важным результатом, который позволяет эффективно оценивать поведение бесконечных сумм, возникающих при анализе спектральных свойств оператора.

Пусть $\lambda \in S_{1,\delta}, \lambda = \lambda_1 + 2m\pi$ и λ_1 принадлежит ограниченной области комплексной плоскости.

Лемма 7 устанавливает, что каждая компонента вектор-функции $R_{0,\lambda} f$ есть конечная сумма с ограниченными по λ_1 и m коэффициентами элементарных операторов при всевозможных вариантах ядер $p(x, t, \lambda, m)$, причем, если $p(x, t, \lambda_1, m) = \omega(x, t, \lambda_1, m)$, то коэффициенты $P_m g$ являются постоянными числами, не зависящими от λ_1 и m; $g(x)$ — одна из компонент вектора $f(x) = (f_1(x), f_2(x))^T$.

В леммах 8,9 и теореме 4 доказывается, что имеют место оценки

$$\left\| \sum_{m \in I} \int_{\gamma_n} R_{0,\lambda} d\lambda \right\| \leqslant C, \quad \left\| \sum_{m \in I} \int_{\gamma_n} R_{0,\lambda} N(E+K)^{-1} R_{0,\lambda} d\lambda \right\| \leqslant C,$$

$$\left\| \sum_{m \in I} \int_{\gamma_n} R_{\lambda} d\lambda \right\| \leqslant C,$$

где C не зависит от I и нормы берутся в пространстве операторов $L_2^2[0, \frac{1}{2}]$, I — любой конечный набор достаточно больших номеров m.

В лемме 10 было доказано, что все достаточно большие по модулю собственные значения оператора L однократны. Для доказательства этой леммы используется теорема 3. Результат этой леммы существенно упрощает анализ, поскольку гарантирует, что в асимптотической области спектр оператора не имеет сложных кратных корней. Это позволяет работать с резольвентой и спектральными проекторами в более удобной форме.

В лемме 11 устанавливается, что если $f(x) \in L_2^2\left[0, \frac{1}{2}\right]$ и $E\left(\lambda_m\right) f = 0, m = 1, 2, \ldots$ то $f(x) = 0$ почти всюду. Этот результат принципиально важен, так как гарантирует, что нулевая функция является единственной функцией, ортогональной всем собственным и присоединённым функциям оператора L, что составляет необходимое условие полноты системы.

В следующем разделе описывается доказательство базисности Рисса собственных и присоединенных функций интегрального оператора с переменным пределом интегрирования. Доказательство опирается на приведенные выше леммы и теоремы.

Теорема о базисности Рисса собственных функций оператора A. В первой лемме этого раздела представлен ключевой технический результат, позволяющий переносить свойство базисности Рисса с системы вектор-функций $\{\varphi_k\}$ в пространстве $L_2^2[0, \frac{1}{2}]$ на соответствующую систему $\{g_k\}$ в $L_2[0, 1]$, построенную путем отражения компонент φ_k относительно точки $x = \frac{1}{2}$; этот результат критически важен для доказательства основной теоремы о базисности, так как позволяет свести задачу к исследованию более простого векторного оператора в пространстве половинной размерности, сохраняя при этом все необходимые спектральные свойства.

Лемма 12 устанавливает, что если система вектор-функций $\{(\varphi_k(x))\}_1^\infty$, где

$$\varphi_k(x) = (\varphi_{1,k}(x), \varphi_{2,k}(x))^T ,$$

образует базис Рисса в $L_2^2[0, \frac{1}{2}]$, то система $\{g_k(x)\}_1^\infty$, где $g_k(x) = \varphi_{2,k}(\frac{1}{2} - x)$ при $x \in [0, \frac{1}{2}]$ и $g_k(x) = \varphi_{1,k}(x - \frac{1}{2})$ при $x \in [\frac{1}{2}, 1]$, образует базис Рисса в $L_2[0, 1]$.

Теорема 5 является ключевым результатом работы. В ней доказывается, что система собственных и присоединенных функций оператора A образует базис Рисса в $L_2[0, 1]$. Этот результат имеет фундаментальное значение, так как: доказывает возможность разложения произвольной функции из $L_2[0, 1]$ в сходящийся ряд по собственным функциям оператора A; гарантирует устойчивость такого разложения; позволяет применять спектральные методы для решения соответствующих интегральных уравнений. Доказательство основывается на построении специального преобразования, связывающего оператор A с диагональным оператором L, и последующем анализе резольвенты.

Реализация программы для построения обратного к оператору A. В рамках исследования базисов Рисса из собственных функций интегральных операторов с переменным пределом интегрирования, возникала задача нахождения обратного оператора. Для нахождения обратного к исходному оператору A требовалось решить интегральное уравнение вида:

$$y(x) = f(x) + \int_0^1 N_1(x,t)y(t)\,dt,$$

где функция $f(x)$ задана на отрезке $[0,1]$, $N_1(x,t)$ — ядро интегрального оператора, $y(x)$ — искомая функция.

Устанавливается, что рассматриваемое выше уравнение есть частный случай уравнения Фредгольма второго рода.

$$y(x) = f(x) + \lambda \int_\alpha^\beta N_1(x,t)y(t)dt,$$

Рассматривается случай, когда ядро интегрального оператора — вырожденное, то есть допускает представление:

$$N_1(x,t) = \sum_{k=1}^{n} a_k(x)b_k(t),$$

где $\{a_k(x)\}_{k=1}^n$ и $\{b_k(t)\}_{k=1}^n$ — системы линейно независимых функций.

Для решения интегрального уравнения с вырожденным ядром применяется метод сведения к системе линейных алгебраических уравнений.

Для нахождения решения используются следующие методы численного интегрирования: метод трапеций, Симпсона, Гаусса. В реализованной программе возможен выбор одного из трех методов. Система линейных алгебраических уравнений решается с помощью LU-разложения.

Программа для численного решения интегрального уравнения для нахождения обратного к исходному оператору была реализована на языке программирования Python, поскольку он обладает широким набором специализированных библиотек для научных вычислений, обеспечивает читаемость кода и гибкость при реализации сложных математических алгоритмов.

Для программы был реализован интерфейс с помощью фреймворка Streamlit, который сделал использование программы более удобным и наглядным.

Было проведено тестирование программы на примере с известным точным решением. Программа корректно строит графики решений (численного и точного), графики ошибок, тепловую карту ядра, 3D-визуализацию ядра. Результатом работы программы являются выводимые значения отклонений численных решений от точных, а так же таблица, содержащая значения точных и численных решений для элементов сетки дискретизации.

Проведенное тестирование выявило устойчивость алгоритма к вариации параметров. Программа корректно обрабатывает весь диапазон входных данных: пределы интегрирования $[\alpha, \beta]$, значения параметра λ, функциональные компоненты ядра $\{a_k(x)\}$ и $\{b_k(t)\}$, функцию $f(x)$. Визуализация ошибок показала отсутствие систематических отклонений, а графики сходимости подтвердили монотонное уменьшение погрешности при увеличении числа узлов сетки для всех реализованных методов. Особенно важно отметить, что при использовании квадратур Гаусса погрешность быстро достигает пределов машинной точности, что делает метод подходящим для задач, требующих высокой точности.

Практическая значимость разработанной программы заключается в ее универсальности и интерактивности. Веб-интерфейс на базе Streamlit делает программу доступной для пользователей без навыков программирования и использования сред разработки. Если настроить исполняемый файл для запуска программы, то приложение может быть запущено из любого стандартного браузера без необходимости установки дополнительных инструментов. Это открывает возможности для использования системы в учебном процессе и в решении некоторых прикладных задач.

Заключение. В работе исследовалась базисность Рисса собственных функций интегрального оператора с переменным пределом интегрирования и описывалась реализация программы для решения интегрального уравнения, для нахождения обратного оператора.

Была достигнута основная цель работы — доказана теорема о базисности Рисса системы собственных и присоединенных функций интегрального оператора с переменным пределом интегрирования в пространстве $L_2[0, 1]$, и разработана программа численного решения интегрального уравнения для нахождения обратного к исходному оператору. Все задачи, необходимые для достижения поставленной цели, были выполнены.

Полученные в настоящей работе результаты вносят вклад в теорию интегральных операторов, расширяя класс задач, для которых доказана базисность Рисса собственных и присоединенных функций. Проведенная работа открывает перспективы для изучения подобных операторов.

Разработанная программа демонстрирует высокую эффективность при решении некоторых интегральных уравнений с вырожденным ядром. Перспективы практической части работы связаны с обобщением результатов на операторы с невырожденными ядрами через аппроксимацию сингулярными разложениями, а также оптимизацией вычислительных алгоритмов. Внедрение адаптивных методов интегрирования и распределенных вычислений повысит эффективность решения задач большой размерности. Разработанное программное обеспечение может быть адаптировано для более сложных научных задач.