

МИНОБРНАУКИ РОССИИ

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования

**«САРАТОВСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ИМЕНИ Н. Г. ЧЕРНЫШЕВСКОГО»**

Кафедра дифференциальных уравнений и математи-
ческой экономики

**СМЕШАННАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ВОЛНОВОГО УРАВНЕНИЯ С
НЕНУЛЕВОЙ НАЧАЛЬНОЙ СКОРОСТЬЮ С
СУММИРУЕМЫМ ПОТЕНЦИАЛОМ
АВТОРЕФЕРАТ МАГИСТЕРСКОЙ РАБОТЫ**

студента 2 курса 217 группы
направления 01.04.02 — Прикладная математика и информатика

механико-математического факультета
Пасечника Владимира Николаевича

Научный руководитель
доцент, к.ф.-м.н., доцент

В. П. Курдюмов

Заведующий кафедрой
зав.каф., д.ф.-м.н., профессор

С. И. Дудов

Саратов 2025

Введение. Целью работы является для смешанной задачи, определяемой волновым уравнением с суммируемым потенциалом, однопорядковыми граничными условиями с производной и нулевым начальным условием требуется получить классическое решение при $\psi(x) \in W_2^1[0, 1]$ и показать, что если $\psi(x) \in L_p[0, 1]$ ($1 \leq p \leq 2$), то формальное решение является ее обобщенным решением. В данной работе рассматривается следующая задача

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} u(x, t) = \frac{\partial^2}{\partial x^2} u(x, t) - q(x)u(x, t), \quad x \in [0, 1], t \in [0, \infty), \quad (1)$$

при условиях

$$u(x, 0) = 0, u'_t(x, 0) = \psi(x), \quad (2)$$

$$u'_x(0, t) + \alpha_1 u(0, t) + \beta_1 u(1, t) = u'_x(1, t) + \alpha_2 u(0, t) + \beta_2 u(1, t) = 0 \quad (3)$$

где $q(x) \in L[0, 1]$, $q(x)$ и $\psi(x)$ - комплекснозначные, α_i, β_i ($i = 1, 2$) - комплекснозначные числа.

В работе используется резольвентный подход с применением приема А. Н. Крылова ускорения сходимости рядов Фурье, который, в отличие от традиционных методов исследования, а также исследований В. А. Чернятина, позволяет исследовать поведение формального решения для различных краевых условий. Впервые резольвентный подход при $q(x) \in C[0, 1]$ был применен Бурлуцкой М. Ш., Хромовым А. П. для нахождения классического решения задачи, определяемой уравнением (1), начальными условиями

$$u(x, 0) = \varphi(x), \quad u'_t(x, 0) = 0 \quad (4)$$

и краевыми условиями

$$u(0, t) = u(1, t) = 0, \quad (5)$$

при минимальных требованиях на $\varphi(x)$. В дальнейшем этот результат ($q(x) \in C[0, 1]$) был перенесен для задачи (1), (4) с другими двухточечными краевыми условиями и проведено исследование формального решения при понижении требований гладкости на $\varphi(x)$ вплоть до $\varphi(x) \in L_2[0, 1]$. Новые трудности возникают для смешанной задачи с начальными условиями (2) вместо (4), но в

этом случае резольвентный подход позволяет их преодолевать. Были получены результаты, аналогичные вышеприведенным ($q(x) \in C[0, 1]$), для начальных условий (2). В частности, получено классическое решение задачи (1)-(3) при ($q(x) \in W_2^1[0, 1]$). Кроме того, показано, что в случае $\psi(x) \in L_2(0, 1)$ ряд формального решения сходится равномерно в любой ограниченной области и его сумма почти всюду удовлетворяет условиям (2), (3), а в случае, когда $\psi(x) \in L[0, 1]$, он сходится всюду, и в обоих случаях является обобщенным решением в равномерной метрике. Для наиболее трудного случая, когда $q(x) \in L[0, 1]$, исследование формального решения смешанной задачи значительно усложняется. Для задачи (1), (2), (5) с $q(x) \in L[0, 1]$ Хромовым А. П. было получено классическое решение при минимальных требованиях на $\varphi(x)$ и обобщенное решение для $\psi(x) \in L_p[0, 1] (1 \leq p \leq 2)$.

Аналогичные результаты мы здесь получим и для задачи (1)-(3) с $q(x) \in L[0, 1]$, исследование которой, по сравнению с задачей (1), (2), (5), становится сложнее: формальный ряд приходится разбивать на девять рядов и точно вычислять три из них. Работа является реферативной по статье Курдюмова, Хромова с аналогичным названием. Мы получим классическое и обобщенное решение задачи (1)-(3) при ($\psi(x) \in W_2^1[0, 1]$) (теорема 4) и покажем, что в случае ($\psi(x) \in L_p[0, 1] (1 < p \leq 2)$) ряд формального решения сходится абсолютно и равномерно и его сумма почти всюду удовлетворяет условиям (2), (3), а для $\psi(x) \in L[0, 1]$ он сходится всюду, являясь в обоих случаях обобщенным решением в равномерной метрике (теоремы 5, 6).

Основное содержание работы. В первой главе под названием «Классическое решение» мы преобразуем формальное решение, введем формулы для резольвент операторов L_0 и L и исследуем ряды $u_j(x, t)$, где $j = 1, 2, 3, 4$

Так как $q(x) \in L[0, 1]$, то классическим решением называем функцию $u(x, t)$ абсолютно непрерывную вместе с первой производной по x и t , для которой выполняются условия (2), (3), а уравнение (1) выполняется почти всюду.

Для начала предполагаем, что $\psi(x) \in W_2^1[0, 1]$. Введем оператор Штурма-Лиувилля:

$$Ly = -y'' + q(x)y,$$

$$U_1(y) = y'(0) + \alpha_1 y(0) + \beta_1 y(1) = 0,$$

$$U_2(y) = y'(1) + \alpha_2 y(0) + \beta_2 y(1) = 0,$$

связанный по методу Фурье с задачей (1)-(3). Собственные значения оператора L , достаточно большие по модулю, простые и для них имеют место асимптотические формулы:

$$\lambda_n = \rho_n^2 (\operatorname{Re} \rho_n \geq 0),$$

$$\rho_n = n\pi + o(1).$$

Обозначим

$$\tilde{\gamma}_n = \{\rho \mid |\rho - n\pi| = \delta\},$$

где $\delta > 0$ и достаточно мало, а $n \geq n_0$ и n_0 таково, что при $n \geq n_0$ внутри $\tilde{\gamma}_n$ попадает лишь по одному ρ_n . Пусть γ_n - образ $\tilde{\gamma}_n$ в λ - плоскости ($\lambda = \rho^2, \operatorname{Re} \rho_n \geq 0$). Формальное решение задачи (1)-(3) возьмем в виде [?], [?]

$$u(x, t) = -\frac{1}{2\pi i} \left(\int_{|\lambda|=r} + \sum_{n \geq n_0} \int_{\gamma_n} \right) (R_\lambda \psi) \frac{\sin \rho t}{\rho} d\lambda, \quad (6)$$

где $r > 0$ таково, что внутри $|\lambda| = r$ находятся все собственные значения λ_n , для которых $n < n_0$, а

$$R_\lambda = (L - \lambda E)^{-1}$$

является резольвентой оператора L (E - единичный оператор, λ - спектральный параметр). Представим $\psi(x)$ в виде

$$\psi(x) = \psi_1(x) + \psi_2(x),$$

где

$$\psi_1(x) \in W_2^1[0, 1],$$

$$\psi_1(0) = \psi_1(1) = 0,$$

$$\psi_2(x) \in C^2[0, 1], \psi_2(x) \in D_L,$$

где D_L область определения оператора L .

Ряд формального решения представим в виде

$$u(x, t) = \sum_{j=1}^4 u_j(x, t), \quad (7)$$

где

$$u_1(x, t) = -\frac{1}{2\pi i} \left(\int_{|\lambda|=r} + \sum_{n \geq n_0} \int_{\gamma_n} \right) (R_\lambda^0 \psi_1) \frac{\sin \rho t}{\rho} d\lambda, \quad (8)$$

$$u_2(x, t) = -\frac{1}{2\pi i} \left(\int_{|\lambda|=r} + \sum_{n \geq n_0} \int_{\gamma_n} \right) (R_\lambda \psi_1 - R_\lambda^0 \psi_1) \frac{\sin \rho t}{\rho} d\lambda, \quad (9)$$

$$u_3(x, t) = -\frac{1}{2\pi i} \left(\int_{|\lambda|=r} + \sum_{n \geq n_0} \int_{\gamma_n} \right) \frac{1}{\lambda - \mu_0} (R_\lambda^0 g) \frac{\sin \rho t}{\rho} d\lambda,$$

$$u_3(x, t) = -\frac{1}{2\pi i} \left(\int_{|\lambda|=r} + \sum_{n \geq n_0} \int_{\gamma_n} \right) \frac{1}{\lambda - \mu_0} (R_\lambda g - R_\lambda^0 g) \frac{\sin \rho t}{\rho} d\lambda,$$

$R_\lambda^0 = (L_0 - \lambda E)^{-1}$ - резольвента оператора L_0 : $L_0 y = -y''$, $y'(0) = y'(1) = 0$, μ_0 - находится вне всех контуров.

Вводятся формулы для резольвент R_λ и R_λ^0 операторов L и L_0

$$R_\lambda f = v_1(x, \rho)(f, z_1) + v_2(x, \rho)(f, z_2) - (M_\rho f)(x),$$

$$R_\lambda^0 f = v_1^0(x, \rho)(f, z_1^0) + v_2^0(x, \rho)(f, z_2^0) - (M_\rho^0 f)(x),$$

где $z_j(x, \rho)$ ($j = 1, 2$) — решения уравнения

$$y'' - q(x)y + \rho^2 y = 0$$

с начальными условиями $z_1(0, \rho) = z_2'(0, \rho) = 1$, $z_1'(0, \rho) = z_2(0, \rho) = 0$;

$$v_j(x, \rho) = \frac{(-1)^j}{\Delta(\rho)} \{ [-\beta_1 z_{3-j}(1, \rho) U_2(z_2) + (z_{3-j}'(1, \rho)$$

$$+ \beta_2 z_{3-j}(1, \rho) U_1(z_2)) z_1(x, \rho) + [\beta_1 z_{3-j}(1, \rho) U_2(z_1) - (z'_{3-j}(1, \rho) + \beta_2 z_{3-j}(1, \rho) U_1(z_1))] z_2(x, \rho)\}, \quad j = 1, 2,$$

$$\Delta(\rho) = U_1(z_1)U_2(z_2) - U_1(z_2)U_2(z_1),$$

$$(M_\rho f)(x) = \int_0^x M(x, t, \rho) f(t) dt, \quad M(x, t, \rho) = \begin{vmatrix} z_1(t, \rho) & z_2(t, \rho) \\ z_1(x, \rho) & z_2(x, \rho) \end{vmatrix};$$

$$v_j^0(x, \rho), z_j^0(x, \rho) (j = 1, 2),$$

$M_\rho^0 f$ есть $v_j(x, \rho), z_j(x, \rho) (j = 1, 2)$, $M_\rho f$, но взяты для оператора $L_0(f, g) = \int_0^1 f(x)g(x)dx$.

Обозначим

$$J_1(x, \rho) = v_1^0(x, \rho)(\psi_1, z_1^0) + v_2^0(x, \rho)(\psi_1, z_2^0),$$

$$J_2(x, \rho) = v_1(x, \rho)(\psi_1, z_1) + v_2(x, \rho)(\psi_1, z_2) - v_1^0(x, \rho)(\psi_1, z_1^0) - v_2^0(x, \rho)(\psi_1, z_2^0),$$

$$J_3(x, \rho) = \frac{1}{\lambda - \mu_0} [v_1^0(x, \rho)(g, z_1) - v_2^0(x, \rho)(g, z_2^0)],$$

$$J_4(x, \rho) = \frac{1}{\lambda - \mu_0} [v_1(x, \rho)(g, z_1) + v_2(x, \rho)(g, z_2) - v_1^0(x, \rho)(g, z_1) - v_2^0(x, \rho)(g, z_2)].$$

Поскольку $(M_\rho f)(x), (M_\rho^0 f)(x)$ – целые по λ , то

$$u(x, t) = \sum_{j=1}^4 u_j(x, t) = \sum_{j=1}^4 \left(-\frac{1}{2\pi i} \right) \left(\int_{|\lambda|=r} + \sum_{n \geq n_0} \int_{\gamma_n} \right) J_j(x, \rho) \frac{\sin \rho t}{\rho} d\lambda.$$

Далее в работе исследуются ряды $u_j(x, t), j = 1, 2, 3, 4$. Сначала исследуем ряд $u_1(x, t)$. Результаты сформулированы и доказаны в трех леммах о ряде $u_1(x, t)$ и его производных.

Лемма 1. Имеет место формула

$$u_1(x, t) = (\psi_1, 1)t + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\pi} (\psi_1(\rho), \cos n\pi\rho) \cos n\pi x \sin \pi t.$$

Лемма 2. Ряд $u_1(x, t)$ сходится абсолютно и равномерно и для его суммы имеет место формула

$$u_1(x, t) = \frac{1}{2} \int_{x-t}^{x+t} \tilde{\psi}(\tau) d\tau,$$

где $\tilde{\psi}_1 \in W_2^1[-A, A]$ при любом A , $\tilde{\psi}(-x) = \tilde{\psi}(x)$, $\tilde{\psi}(x+2) = \tilde{\psi}(x)$, $\tilde{\psi}(x) = \psi_1(x)$ при $x \in [0, 1]$.

Лемма 3. Производные

$$\frac{\partial^2 u_1(x, t)}{\partial t^2}, \frac{\partial^2 u_1(x, t)}{\partial x^2}$$

существуют почти всюду в $Q_T = [0, 1] \times [0, T]$ и для таких x, t они совпадают.

Для ряда $u_1(x, t)$ приводится теорема о абсолютной и равномерной сходимости ряда, вытекающая из предыдущих лемм.

Теорема 1. Ряд $u_1(x, t)$ сходится абсолютно и равномерно и его сумма есть классическое решение задачи (1)-(3) при $q(x) = 0$ и $\psi_1(x)$ вместо $\psi(x)$ с граничными условиями $u'_{1x}(0, t) = u_{1x}(1, t) = 0$.

Далее исследуем ряд $u_2(x, t)$. Введем следующие обозначения.

$$J_{2,1}(x, \rho) = (v_1(x, \rho) - v_1^0(x, \rho))(\psi_1, z_1) + (v_2(x, \rho) - v_2^0(x, \rho))(\psi_1, z_2),$$

$$J_{2,2}(x, \rho) = v_1^0(x, \rho)(\psi_1, z_1 - z_1^0) + v_2^0(x, \rho)(\psi_1, z_2 - z_2^0),$$

$$u_{2,k}(x, t) = -\frac{1}{2\pi i} \left(\int_{|\lambda|=r} + \sum_{n \geq n_0} \int_{\gamma_n} \right) J_{2,k}(x, \rho) \frac{\sin \rho t}{\rho} d\lambda, k = 1, 2.$$

Тогда $J_2(x, \rho) = J_{2,1}(x, \rho) + J_{2,2}(x, \rho)$ и $u_2(x, t) = u_{2,1}(x, t) + u_{2,2}(x, t)$.

Сформулированы и доказаны следующие леммы.

Лемма 4. Ряд $u_{2,1}(x, t)$ и ряды, получающиеся из него почленным дифференцированием по x и дважды по t , сходятся абсолютно и равномерно по

$x \in [0, 1]$ и $t \in [0, T]$ при любом $T > 0$.

Лемма 5. Функции $u_n^{(1)}(x, t)$, $\frac{\partial}{\partial x}u_n^{(1)}(x, t)$ абсолютно непрерывны по x и почти всюду по x и любому t .

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}u_n^{(1)}(x, t) = q(x)a_n^{(1)}(x, t) + b_n^{(1)}(x, t), \quad (10)$$

где

$$a_n^{(1)}(x, t) = -\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_n} v_1(x, \rho)(\psi_1, z_1) \frac{\sin \rho t}{\rho} d\lambda,$$

$$b_n^{(1)}(x, t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_n} \rho^2 (v_1(x, \rho) - v_1^0(x, \rho))(\psi_1, z_1) \frac{\sin \rho t}{\rho} d\lambda,$$

при этом множество точек x , где имеет место (10) можно взять одним и тем же для всех t и n с мерой, равной единице.

Лемма 6. Функции $u_{2,1}^{(1)}(x, t)$, $\frac{\partial}{\partial x}u_{2,1}^{(1)}(x, t)$ абсолютно непрерывны по x , причем почти всюду по $x \in [0, 1]$ и любом t

$$\frac{\partial^2 u_n^{(1)}(x, t)}{\partial x^2} = q(x)a^{(1)}(x, t) + b^{(1)}(x, t), \quad (11)$$

где

$$a^{(1)}(x, t) = -\frac{1}{2\pi i} \left(\int_{|\lambda|=r} + \sum_{n \geq n_0} \int_{\gamma_n} \right) v_1(x, \rho)(\psi_1, z_1) \frac{\sin \rho t}{\rho} d\lambda,$$

$$b^{(1)}(x, t) = \frac{1}{2\pi i} \left(\int_{|\lambda|=r} + \sum_{n \geq n_0} \int_{\gamma_n} \right) \rho^2 [v_1(x, \rho) - v_1^0(x, \rho)] (\psi_1, z_1) \frac{\sin \rho t}{\rho} d\lambda.$$

Ряды $a^{(1)}(x, t)$ и $b^{(1)}(x, t)$ сходятся абсолютно и равномерно по $x \in [0, 1]$ и $t \in [0, T]$. Множество точек x , где имеет место (11), одно и то же для всех t и имеет меру, равную единице.

Лемма 7. Функции $u_2^{(2)}(x, t)$, $\frac{\partial}{\partial x}u_2^{(2)}(x, t)$ абсолютно непрерывны по x и почти всюду по x и любому t

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}u_n^{(2)}(x, t) = q(x)a_n^{(2)}(x, t) + b_n^{(2)}(x, t), \quad (12)$$

где

$$a_n^{(2)}(x, t) = -\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_n} v_2(x, \rho)(\psi_1, z_2) \frac{\sin \rho t}{\rho} d\lambda,$$

$$b_n^{(2)}(x, t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_n} \rho^2 (v_2(x, \rho) - v_2^0(x, \rho)) (\psi_1, z_2) \frac{\sin \rho t}{\rho} d\lambda,$$

при этом множество точек x , где имеет место (12) можно взять одним и тем же для всех t и n с мерой, равной единице.

Лемма 8. Функции $u_{2,1}^{(2)}(x, t)$, $\frac{\partial}{\partial x} u_{2,2}^{(2)}(x, t)$ абсолютно непрерывны по x , причем почти всюду $x \in [0, 1]$ и любом t

$$\frac{\partial^2 u_{2,2}^{(2)}(x, t)}{\partial x^2} = q(x) a^{(2)}(x, t) + b^{(2)}(x, t), \quad (13)$$

где

$$a^{(2)}(x, t) = -\frac{1}{2\pi i} \left(\int_{|\lambda|=r} + \sum_{n \geq n_0} \int_{\gamma_n} \right) v_2(x, \rho) (\psi_1, z_2) \frac{\sin \rho t}{\rho} d\lambda,$$

$$b^{(2)}(x, t) = -\frac{1}{2\pi i} \left(\int_{|\lambda|=r} + \sum_{n \geq n_0} \int_{\gamma_n} \right) \rho^2 (v_2(x, \rho) - v_2^0(x, \rho)) (\psi_1, z_2) \frac{\sin \rho t}{\rho} d\lambda.$$

Ряды $a^{(2)}(x, t)$ и $b^{(2)}(x, t)$ сходятся абсолютно и равномерно по $x \in [0, 1]$ и $t \in [0, T]$. Множество x , где имеет место (13), одно и то же для всех t и имеет меру, равную единице.

Лемма 9. Функции $u_{2,1}(x, t)$, $\frac{\partial u_{2,1}(x, t)}{\partial x}$ абсолютно непрерывны по x , причем почти всюду по $x \in [0, 1]$ и при любом t имеет место равенство

$$\frac{\partial^2 u_{2,1}(x, t)}{\partial x^2} = q(x) a_{2,1}(x, t) + b_{2,1}(x, t), \quad (14)$$

где

$$a_{2,1} = -\frac{1}{2\pi i} \left(\int_{|\lambda|=r} + \sum_{n \geq n_0} \int_{\gamma_n} \right) (R_\lambda \psi_1) \frac{\sin \rho t}{\rho} d\lambda,$$

$$b_{2,1} = -\frac{1}{2\pi i} \left(\int_{|\lambda|=r} + \sum_{n \geq n_0} \int_{\gamma_n} \right) \rho^2 J_{2,1}(x, \rho) \frac{\sin \rho t}{\rho} d\lambda.$$

Ряды $a_{2,1}(x, t)$ и $b_{2,1}(x, t)$ сходятся абсолютно и равномерно по $x \in [0, 1]$ и $t \in [0, 1]$. Множество x , где имеет место (14), можно взять одним и тем же для всех t и имеет меру, равную единице.

Теперь рассмотрим ряд $u_{2,2}(x, t)$. Исследуем ряды

$$u_{2,2}^{(s)}(x, t) (s = 1, 2).$$

Сформулированы и доказаны следующие леммы.

Лемма 10. Ряды $u_{2,2}^{(s)}(x, t) (s = 1, 2)$ и ряды, получающиеся из них почленным дифференцированием два раза по x и t , сходятся абсолютно и равномерно по $x \in [0, 1]$ и $t \in [0, T]$, и их суммы удовлетворяют уравнению (1) при $q(x) = 0$.

Лемма 11. Имеет место формула

$$\begin{aligned} u_{2,2}^{(3)}(x, t) &= t \left(\psi_1 q, \xi - \frac{\xi^2}{2} \right) - \frac{t}{6} (3x^2 + t^2 + 2) (\psi_1 q, 1) + \\ &+ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n\pi)^3} (\psi_1 q, \cos n\pi\xi) [\sin n\pi(x+t) - \sin n\pi(x-\tau)]. \end{aligned} \quad (15)$$

Лемма 12. Ряд $u_{2,2}^{(3)}(x, t)$ сходится равномерно и для его суммы имеет место формула

$$\begin{aligned} u_{2,2}^{(3)}(x, t) &= \int_{x-t}^{x+t} d\tau \int_0^{\tau} \tilde{R}(\tau_1) d\tau_1 - (\psi_1 q, 1) \int_{x-t}^{x+t} d\tau \int_0^{\tau} \tilde{S}(\tau_1) d\tau_1 + \\ &+ \frac{t}{6} (\psi_1 q, 1) \left(12 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n\pi)^2} - 3x^2 - t^2 - 2 \right), \end{aligned} \quad (16)$$

где $\tilde{R}(x) = \frac{1}{2}\tilde{r}(x)$, $\tilde{r}(x)$ -нечетное 2-периодическое продолжение функции $r(x) = \int_1^x \psi_1(\xi)q(\xi)d\xi$, $x \in [0, 1]$; $\tilde{S}(x)$ -нечетное 2-периодическое продолжение функции $S(x) = \frac{1}{2}(1-x)$, $x \in [0, 1]$.

Получено уравнение для $u_2(x, t)$.

Лемма 13. Функция $u_{2,2}(x, t)$ непрерывно дифференцируема по $x \in [0, 1]$ и $t \in [0, \infty)$; $\frac{\partial u_{2,2}(x, t)}{\partial x} \left(\frac{\partial u_{2,2}(x, t)}{\partial t} \right)$ абсолютно непрерывна по x (по t) и почти всюду по x и t удовлетворяет уравнению (1) при $q(x) = 0$.

Для ряда $u_2(x, t)$ доказана теорема.

Теорема 2. Функция $u_2(x, t)$ непрерывно дифференцируема по $x \in [0, 1]$ и $t \in [0, \infty)$; $\frac{\partial}{\partial x} u_{2,2}(x, t) \left(\frac{\partial}{\partial t} u_{2,2}(x, t) \right)$ абсолютно непрерывна по x (по t) и почти

всюду по x и t .

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} u_2(x, t) = \frac{\partial^2}{\partial x^2} u_2(x, t) + q(x) \frac{1}{2\pi i} \left(\int_{|\lambda|=r} + \sum_{n \leq n_0} \int_{\gamma_n} \right) (R_\lambda \psi_1) \frac{\sin \rho t}{\rho} d\lambda.$$

Далее переходим к исследованию ряда $u_3(x, t)$. Ряд $u_3(x, t)$ представляется в виде

$$u_3(x, t) = u_{3,1}(x, t) + u_{3,2}(x, t),$$

где

$$u_{3,1}(x, t) = -\frac{1}{2\pi i} \left(\int_{|\lambda|=\xi} + \sum_{n=1}^{\infty} \int_{\gamma_n} \right) (v_1^0(x, \rho)(g, z_1) + v_2^0(x, \rho)(g, z_2)) \frac{\sin \rho t}{\rho^3} d\lambda,$$

$$u_{3,2}(x, t) = -\frac{\mu_0}{2\pi i} \left(\int_{|\lambda|=\xi} + \sum_{n=1}^{\infty} \int_{g_n} J_3(x, \rho) \frac{\sin \rho t}{\rho^3} d\lambda \right),$$

величина $\xi > 0$ настолько мала, что все контуры расположены вне друг друга.

Доказывается следующая лемма.

Лемма 14. Для суммы ряда $u_{3,1}(x, t)$ имеет место формула

$$\begin{aligned} u_{3,1}(x, t) = & \int_{x-t}^{x+t} d\tau \int_0^\tau \tilde{P}(\tau_1) d\tau_1 - (g, 1) \int_{x-t}^{x+t} d\tau \int_0^\tau \tilde{S}(\tau_1) d\tau_1 + \\ & + \frac{t}{6} (g, 1) \left(12 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n\pi)^2} - 3x^2 - t^2 - 2 \right), \end{aligned}$$

где $\tilde{P}(x) = \frac{1}{2} \tilde{p}(x)$, $\tilde{p}(x)$ - нечетное 2-периодическое продолжение функции $p(x) = \int_x^1 q(\xi) d\xi$, $x \in [0, 1]$; $\tilde{S}(x)$ — та же, что и в лемме 12.

Для ряда $u_{3,2}(x, t)$ выполняется лемма 10, а для ряда $u_3(x, t)$ выполняется лемма 13.

Теорема 3. Функция $u_3(x, t)$ непрерывно дифференцируема по $x \in [0, 1]$ и $t \in [0, T]$; $\frac{\partial}{\partial x} u_3(x, t)$ ($\frac{\partial}{\partial t} u_3(x, t)$) абсолютно непрерывна по x (по t) и почти

всюду по x и t удовлетворяет уравнению (1) при $q(x) = 0$.

Далее рассмотрим ряд $u_4(x, t)$. Обозначим

$$J_{4,1}(x, \rho) = \frac{1}{\lambda - \mu_0} J_{2,1}(x, \rho) (k = 1, 2)$$

с функцией $g(x)$ в $J_{2,1}(x, \rho)$ вместо $\psi_1(x)$. Тогда

$$J_4(x, \rho) = J_{4,1}(x, \rho) + J_{4,2}(x, \rho)$$

и

$$u_4(x, t) = u_{4,1}(x, t) + u_{4,2}(x, t),$$

где $u_{4,k}(x, t)$ определяется как и $u_{2,k}(x, t)$ в (8), но через $J_{4,k}(x, \rho)$ вместо $J_{2,k}(x, \rho)$. Выполняется лемма 4 для рядов $u_{4,k}(x, t)$, $k = 1, 2$, и, кроме того, ряд $u_{4,2}(x, t)$ можно почленно дифференцировать по x .

Легко видеть, что для функции $u_{4,1}(x, t)$, $\frac{\partial}{\partial t} u_{4,2}(x, t)$ справедлива и лемма 9, но с функцией $\frac{1}{\lambda - \mu_0} (R_\lambda g)$ вместо $(R_\lambda \psi_1)$ в определении $a_{2,1}(x, t)$ и с функцией $J_{4,1}(x, \rho)$ вместо $J_{2,1}(x, \rho)$ в $b_{2,1}(x, t)$.

Для представления ряда $u_4(x, t)$ обозначим

$$J_{4,1}(x, \rho) = \frac{1}{\lambda - \mu_0} [(v_1(x, \rho) - v_1^0(x, \rho))(g, z_1) + (v_2(x, \rho) - v_2^0(x, \rho))(g, z_2)],$$

$$J_{4,2}(x, \rho) = \frac{1}{\lambda - \mu_0} [v_1^0(x, \rho)(g, z_1 - z_2) + v_2^0(x, \rho)(g, z_1 - z_2^0)],$$

$$u_{4,k}(x, t) = -\frac{1}{2\pi i} \left(\int_{|\lambda|=r} + \sum_{n \geq n_0} \int_{\gamma_n} \right) J_{4,k}(x, \rho) \frac{\sin \rho t}{\rho} d\lambda, \quad k = 1, 2.$$

Тогда

$$u_4(x, t) = u_{4,1}(x, t) + u_{4,2}(x, t).$$

Теорема 4. Функция $u_4(x, t)$ непрерывно дифференцируема по $x \in [0, 1]$

и $t \in [0, T]$,

$$\frac{\partial u_4(x, t)}{\partial x} \left(\frac{\partial u_4(x, t)}{\partial t} \right)$$

абсолютно непрерывна по x (по t) и почти всюду по $x \in [0, 1]$ и любом t .

$$\frac{\partial^2 u_4(x, t)}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u_4(x, t)}{\partial x^2} + q(x) \frac{1}{2\pi i} \left(\int_{|\lambda|=r} + \sum_{n \geq n_0} \int_{\gamma_n} \right) (R_\lambda \psi_2) \frac{\sin \rho t}{\rho} d\lambda.$$

Теорема 5. Если $q(x) \in L[0, 1]$ и $\psi(x) \in W_2^1$, то формальное решение задачи (1)-(3) является ее классическим решением.

В главе «Обобщенное решение» мы приведем обобщенные решения задачи при $\psi(x) \in L_p$ ($1 < p \leq 2$) и $\psi(x) \in L[0, 1]$. Обобщенное решение берем в виде

$$u(x, t) = u_1(x, t) + u_2(x, t),$$

где

$$u_1(x, t) = -\frac{1}{2\pi i} \left(\int_{|\lambda|=r} + \sum_{n \geq n_0} \int_{\gamma_n} \right) (R_\lambda^0 \psi) \frac{\sin \rho t}{\rho} d\lambda,$$

$$u_2(x, t) = -\frac{1}{2\pi i} \left(\int_{|\lambda|=r} + \sum_{n \geq n_0} \int_{\gamma_n} \right) (R_\lambda \psi - R_\lambda^0 \psi) \frac{\sin \rho t}{\rho} d\lambda.$$

Лемма 15. Ряд $u_1(x, t)$ сходится абсолютно и равномерно, его сумма абсолютно непрерывна по x, t и удовлетворяет условию $u_1(x, 0) = 0$; почти всюду на $[0, 1]$ существует $u'_{1t}(x, 0)$ и почти всюду на $(0, \infty)$ существуют $u'_{1t}(0, t)$ и $u'_{1t}(1, t)$, причем

$$u'_{1t}(x, 0) = \psi(x),$$

$$u'_{1t}(0, t) = u'_{1t}(1, t) = 0.$$

Лемма 16. Ряд $u_2(x, t)$ и ряды, получающиеся из него почленным дифференцированием по x и t один раз, сходятся абсолютно и равномерно по $x \in [0, 1]$ и $t \in [0, T]$.

Пусть $\psi_h(x) \in W_2^1[0, 1]$ и $u_h(x)$ — соответствующие классические решения задачи (1)-(3).

Теорема 6. Если $\psi(x) \in L_p[0, 1]$, $1 < p \leq 2$, то сумма ряда формального

решения задачи (1)-(3) абсолютно непрерывна по x, t и $u(x, 0) = 0$; почти всюду выполняется $u'_t(x, 0) = \psi(x)$ и условия (3). Более того, если $\|\psi_h - \psi\|_p \rightarrow 0$ при $h \rightarrow 0$, то $u_h(x, t)$ сходятся к $u(x, t)$ равномерно по $x \in [0, 1]$ и $t \in [0, T]$, то есть $u(x, t)$ есть обобщенное решение задачи (1)-(3).

Пусть теперь $\psi(x) \in L[0, 1]$. Формальное решение берем в виде $u(x, t) = u_1(x, t) + u_2(x, t)$.

Пусть $\psi_h(x)$ и $u_h(x, t)$ те же, что и в теореме 6.

Теорема 7. Если $\psi(x) \in L[0, 1]$, то ряд формального решения задачи (1)-(3) сходится всюду при $x \in [0, 1]$ и $t \in [0, \infty)$ и $u(x, 0) = 0$. Более того, если $h \rightarrow 0$ при $h \rightarrow 0$, то классические решения задачи $u_h(x, t)$ сходятся к $u(x, t)$ равномерно по $x \in [0, 1]$ и $t \in [0, T]$, то есть $u(x, t)$ — обобщенное решение задачи (1)-(3).

Так же в работе на языке Python приведена программа приближенного вычисления частного решения дифференциального уравнения, используемого для нахождения резольвенты оператора спектральной задачи. Задача сформулирована следующим образом.

Найти

$$(M_\rho f)(x) = \int_0^x M(x, t, \rho) f(t) dt,$$

где

$$M(x, t, \rho) = \begin{vmatrix} z_1(t, \rho) & z_2(t, \rho) \\ z_1(x, \rho) & z_2(x, \rho) \end{vmatrix};$$

а $z_j(x, \rho)$ ($j = 1, 2$) — решения уравнения $y'' - q(x)y + \rho^2 y = 0$ с начальными условиями $z_1(0, \rho) = z'_2(0, \rho) = 1, z'_1(0, \rho) = z_2(0, \rho) = 0$. Решить систему уравнений нужно методом Рунге-Кутты. $q(x) \neq 0$ — любая функция, ρ — любое число.

Заключение. Для смешанной задачи, определяемой волновым уравнением с суммируемым потенциалом, однопорядковыми граничными условиями с производной и нулевым начальным положением, исследовались свойства формального решения по методу Фурье в зависимости от гладкости начальной скорости $u'_t(x, 0) = \psi(x)$. В основе исследования была взята идея А. Н. Крылова об ускорении сходимости рядов Фурье и метод контурного интегрирования резольвенты оператора соответствующей спектральной задачи.

Получено классическое решение при $\psi(x) \in W_p^1(1 < p \leq 2)$ а также показано, что если $\psi(x) \in L_p[0, 1](1 \leq p \leq 2)$, то формальное решение является обобщенным решением смешанной задачи.

Также на языке программирования Python была разработана программа приближенного вычисления частного решения дифференциального уравнения, используемого для нахождения резольвенты оператора спектральной задачи. Которая демонстрирует высокую эффективность и адаптивность, так как может быть адаптирована под любую другую функцию, необходимую пользователю в рамках нашей работы.