МИНОБРНАУКИ РОССИИ

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования

«САРАТОВСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ Н.Г.ЧЕРНЫШЕВСКОГО»

Кафедра Дифференциальных уравнений и математической экономики

Классическое и обобщенное решения одной начально-граничной задачи для уравнения гиперболического типа со смешанной производной в уравнении

АВТОРЕФЕРАТ МАГИСТЕРСКОЙ РАБОТЫ

студента 2 курса 217 группы

направление 01.04.02 - Прикладная математика и информатика

механико-математического факультета

Пастухова Максима Сергеевича

Научный руководитель
доцент, к.ф.м.н., доцент ______________ В.С. Рыхлов
должность, уч. степень, звание — Инициалы, фамилия

Зав. кафедрой
зав. каф., д.ф.-м.н., профессор ______________ С.И. Дудов
уч. степень, звание — Инициалы, фамилия

Саратов 2025

Введение

Выпускная квалификационная работа посвящена исследованию классического и обобщенного решения начально-граничной задачи для уравнения гиперболического типа со смешанной производной в уравнении и краевыми условиями Дирихле-Неймана. В частности, вводится понятие классического и обобщенного решений. Для введения обобщенного решения предварительно доказывается теорема единственности классического решения и представления его в виде ряда из контурных интегралов

Дифференциальные уравнения математической физики представляют собой одну из самых обширных ветвей анализа. Им посвящено большое число монографий и учебников и почти не поддающееся учету количество научных статей.

Тема выпускной квалификационной работы является актуальной связи с тем, что обобщенная начально-граничная задача является одним из наиболее сильных общений классической начально граничной задачи. Внешний вид её такой же, как и у классической задачи, но смысл уже совсем другой. В настоящее время много работ посвященное изучению данной задачи.

Цель выпускной квалификационной работы состоит в том, чтобы ввести понятие классического и обобщенного решений для уравнения содержащего смешанную производную, также ввести соответствующую спектральную задачу для дифференциальной уравнения второго порядка, доказать теорему о разложении первой компоненты по собственным и присоединенным функциям указанной оператор-функции, на основании теоремы о разложении показать единственность классического решения поставленной задачи для краевых условий типа Дирихле-Неймана, получить формулу для классического решения в виде ряда из контурных интегралов, после вывести формулу для обобщенного решения поставленной начально-граничной задачи и в заключении при помощи программного кода визуализировать полученные формулы, сравнив полученную конечную формулу для решения с рядом полученному по методу разделения переменных.

1. Классическая начальная-граничная задача в полуполосе с краевыми условиями типа Дирихле-Неймана

1.1 Постановка задачи

Рассмотрим следующую начально-граничную задачу (сокращенно НГЗ)

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + p_1 \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} + p_2 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - q(x)u(x,t) = f(x,t), \tag{1.1}$$

$$u(0,t) = 0, \qquad u'_x(1,t) = 0, \tag{1.2}$$

$$u(x,0) = \varphi(x), \qquad \frac{\partial u(x,0)}{\partial t} = \psi(x). \tag{1.3}$$

где $(x,t) \in Q = [0,1] \times [0,+\infty)$; $p_1, p_2 \in \mathbb{R}$, все функции, входящие в постановку задачи комплекснозначные, $\varphi, \psi \in L_1[0,1]$, $f(x,t) \in L_1(Q_T)$, $Q_T = [0,1] \times [0,T]$ при любом $T > 0$.

Задача состоит в нахождении конечной формулы для обобщенного решения задачи (1.1)-(1.3).

Предполагается, что уравнение (1.1) гиперболического типа, то есть выполняется следующее условие:

$$p_1^2 - 4p_2 > 0, \tag{1.4}$$

то есть корни ω_1, ω_2 характеристического уравнения

$$\omega^2 + p_1\omega + p_2 = 0, \tag{1.5}$$

являются вещественными и различными, в работе рассматривается случай $\omega_1 < 0 < \omega_2$.

1.2. Краткая история вопроса

Уравнение (1.1) является уравнением поперечных колебаний продольно движущейся конечной струны. Такие уравнения актуальны для производственных процессов, связанных с продольным движением материалов (к примеру, бумажного полотна).

Задача распространения волн в гибкой однородной струне решалась уже в XVIII в. Даниилом Бернулли, Леонардо Эйлером, Жозефом Луи Лагранжем.

Излагаемые результаты получаются на основе метода Фурье с использованием резольвентного и аксиоматического подходов решения начально-граничных задач для волнового уравнения в полуполосе плоскости, предложенных А. П. Хромовым. Такой подход к решению задачи сформировался не сразу. Этот подход использует идеи А. Н. Крылова об ускорении сходимости тригонометрического ряда, а также идеи Л. Эйлера о расходящихся рядах.

1.3. Единственность классического решения начально-граничной задачи и формула для решения в виде ряда

С задачей (1.1)–(1.3) тесно связана спектральная задача

$$L(\lambda)y = 0, \tag{1.6}$$

порожденная о.-ф. $L(\lambda)$, определяемой д.в. с параметром λ

$$\ell(y,\lambda) := y'' + \lambda p_1 y' + (\lambda^2 p_2 - q(x))y \tag{1.7}$$

и краевыми условиями

$$U_1(y) := y(0) = 0, \quad U_2(y) := y'(1) = 0. \tag{1.8}$$

Линеаризуем задачу (1.6), учитывая конкретый вид выражения (1.7). Для этого положим $z_1 = y, z_2 = \lambda z_1$. Получим следующую задачу в пространстве вектор-функции $Z(x) := (z_1(x),\, z_2(x))^T$:

$$\begin{cases} z_2 = \lambda z_1 \\ -\frac{1}{p_2} z_1'' - \frac{p_1}{p_2} z_2' + q(x) z_1 = \lambda z_2, \end{cases}$$

$$z_1(0) = z_1'(1) = 0.$$

или

$$AZ = \lambda Z, \quad BZ(0) + CZ(1) = 0, \tag{1.19}$$

где

$$A := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{1}{p_2}d_x^2 + q(x)E & -\frac{p_1}{p_2}d_x \end{pmatrix}, \quad d_x := \frac{d}{dx} \tag{1.20}$$

$$B := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad C := \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

а E есть тождественный оператор.

Введем оператор $\mathcal{L}$ в пространстве вектор-функций, определенный соотношениями

$$\mathcal{L}Z := AZ, D_{\mathcal{L}} = \{Z = (z_1, z_2)^T : z_1'', z_2' \in L_1[0,1], BZ(0)+CZ(1) = 0\}. \tag{1.21}$$

Тогда спектральную задачу (1.19) можно записать в виде

$$\mathcal{L}Z = \lambda Z, \quad Z \in \mathbb{D}(\mathcal{L}),$$

а это есть уже линейная спектральная задача, которая является линеаризацией задачи (1.6).

Найдем резольвенту $\mathcal{R}_\lambda = (\mathcal{L} - \lambda\mathcal{E})$ оператора $\mathcal{L}$, где $\mathcal{E}$ — единичный оператор в пространстве в.-ф.. Для этого решим задачу

$$\mathcal{L}Z - \lambda Z = H,$$

где $H = (H_1, H_2)^T$.

Первая компонента резольвенты $\mathcal{R}$ является решением следующей краевой задачи

$$z_1'' + \lambda p_1 z_1' + (\lambda^2 p_2 - q(x))z_1 = h_\lambda$$
$$z_1(0) = z_1'(1) = 0. \tag{1.25}$$

Задаче (1.6) соответствуют следующие собственные значения

$$\lambda_k = \frac{1}{\omega_2 - \omega_1}\left(\ln\frac{|\omega_1|}{\omega_2} + (2k+1)\pi i\right) + O\left(\frac{1}{k}\right), \quad k \in Z\backslash\{0\}, \tag{1.11}$$

Обозначим

$$I_n(x) = -\frac{1}{2\pi i}\sum_{k=-n}^{n}\int_{\Gamma_n}\int_0^1 G(x,\xi,\lambda)f_\lambda(\xi)d\xi d\lambda, \tag{1.29}$$

где Γ_n, $n \in \mathcal{N}$, есть кусочно круговые контуры, отстоящие от числа λ_k на расстояние не меньшее некоторого достаточно малого фиксированного числа $\delta > 0$ между соседними контурами лежит ровно одно число и имеют место оценки:

$$c_1 n < \Gamma_n < c_2 n \qquad (0 < c_1 < c_2 < +\infty); \tag{1.30}$$

Γ_n^+, Γ_n^-, есть части Γ_n, лежащие в правой и левой полуплоскости соответственно.

С использованием утверждения методом контурного интеграла Коши-Пуанкаре была доказана следующая теорема.

Теорема 1.6. *Если* $h_1 \in W_p^1[0,1]$ $(p > 1)$, $h_2 \in L_p[0,1]$, $h_1(0) = 0$, *то*

$$\tilde{I}_n(x) = h_1(x) + o_n(1), \tag{1.31}$$

где $o_n(1) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ *равномерно по* $x \in [0,1]$.

Определение 1.2. Под классическим решением будем понимать функцию $u(x,t)$ переменных $(x,t) \in Q$, которая:

а) непрерывна вместе с $u_x(x,t)$ и $u_t(x,t)$, при этом $u_x(x,t)$ и $u_t(x,t)$ абсолютно непрерывны и по x и по t, и почти всюду в Q выполняется равенство

$$u_{xt} = u_{tx}, \tag{1.5}$$

б) удовлетворяет условиям (1.2)-(1.3) на границе множества Q и уравнению (1.1) почти всюду в Q.

Для классического решения задачи (1.1)-(1.3) по необходимости должны выполняться условия:

1) гладкости: $\varphi(x)$, $\varphi'(x)$, $\psi(x)$ абсолютно непрерывны;

2) согласования: $\varphi(0) = \varphi'(1) = 0$ и $\psi(0) = \psi'(1) = 0$.

Определение 1.3. Задачу (1.1)–(1.3), в которой $f(x,t) \in \mathcal{Q}$ а функции $q(x), \varphi(x), \psi(x) \in L_1[0,1]$, будем называть *обобщённой начально-граничной задачей.*

Теорема 1.8. *Если $u(x,t)$ есть классическое решение задачи (1.1)-(1.3), и дополнительно выполняется условие $u_{tt} \in \mathcal{Q}$ есть функция класса $\mathcal{Q}$, то это решение единственно и находится по формуле*

$$u(x,t) = \frac{1}{2\pi i}\left(\int_{|\lambda|=r} + \sum_{|k|\geqslant k_1}\int_{\gamma_{0k}}\right)\Big(p_1 e^{\lambda t} G(x,1,\lambda)\varphi(1) - p_1 e^{\lambda t} R^1_\lambda \varphi + \\ + p_2 e^{\lambda t}\lambda R_\lambda \varphi + p_2 e^{\lambda t} R_\lambda \psi + \int_0^t e^{\lambda(t-\tau)} R_\lambda f(\cdot,\tau)d\tau\Big)d\lambda, \quad (1.59)$$

в которой ряд справа сходится равномерно по $x \in [0,1)$ при любом фиксированном t > 0.

Следствие 1.11. Если $u(x,t)$ есть классическое решение задачи (1.1)-(1.3), $\varphi = 0$ и дополнительно выполняется условие $u_{tt} \in \mathcal{Q}$ есть функция класса $\mathcal{Q}$, то это решение единственно и находится по формуле

$$u(x,t) = \frac{1}{2\pi i}\left(\int_{|\lambda|=r} + \sum_{|k|\geqslant k_1}\int_{\gamma_{0k}}\right)\Big(p_2 e^{\lambda t} R_\lambda \psi + \int_0^t e^{\lambda(t-\tau)} R_\lambda f(\cdot,\tau)d\tau\Big)d\lambda, \quad (1.85)$$

в которой ряд справа сходится равномерно по $x \in [0,1)$ при любом фиксированном t $>$ 0.

Следствие 1.13. Если $u_0(x,t)$ есть классическое решение задачи (1.1)-(1.3) с нулевым потенциалом, $\varphi = 0$ и дополнительно выполняется условие $u_{tt} \in \mathcal{Q}$ есть функция класса $\mathcal{Q}$, то это решение единственно и находится по формуле

$$u(x,t) = \frac{1}{2\pi i}\sum_k \Big(p_2 e^{\lambda t} R_\lambda \psi + \int_0^t e^{\lambda(t-\tau)} R_\lambda f(\cdot,\tau)d\tau\Big)d\lambda, \quad (1.87)$$

в которой ряд справа сходится равномерно по $x \in [0,1)$ при любом фиксированном t $>$ 0.

2. Обобщенное решение начально-граничной задачи и формула для него

В предыдущем разделе установлено, что задача (1.1)–(1.3) в случае $\varphi = 0$ и ряд справа в (1.85) тесно связаны, а именно, если эта задача имеет классическое решение, то для него справедлива формула (1.85). При этом функции $\psi(x)$ должна удовлетворять условиям (N).

Далее будем рассматривать задачу (1.1)-(1.3) в случае когда $\varphi = 0$, т.е. начально-граничная задача будет следующий иметь вид

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + p_1 \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} + p_2 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - q(x) u(x,t) = f(x,t), \tag{2.1}$$

$$u(0,t) = 0, \qquad u'_x(1,t) = 0, \tag{2.2}$$

$$u(x,0) = 0, \qquad \frac{\partial u(x,0)}{\partial t} = \psi(x). \tag{2.3}$$

где $(x,t) \in Q = [0,1] \times [0,+\infty)$; $p_1, p_2 \in \mathbb{R}$, все функции, входящие в постановку задачи комплекснозначные, $\psi \in L_1[0,1]$, $f(x,t) \in L_1(Q_T)$, $Q_T = [0,1] \times [0,T]$ при любом $T > 0$.

Ряд справа в (1.85) имеет смысл для любых функций $q(x), \psi(x) \in L_1[0,1]$ и $f(x,t) \in \mathcal{Q}$, хотя теперь он может и не быть сходящимся, то есть, вообще говоря, расходящийся. Будем считать, что он является формальным решением задачи (2.1)–(2.3), но понимаемой теперь чисто формально. Эта задача (2.1)–(2.3) в случае $f(x,t) \in \mathcal{Q}$ и $q(x), \psi(x) \in L_1[0,1]$, в определении 1.3 была названа обобщённой начально-граничной задачей.

Найти обобщённое решение задачи (2.1)-(2.3) — значит найти «сумму» ряда справа в (1.85) («сумма» в кавычках означает, что это сумма понимается именно как сумма расходящегося ряда). Введём понятие обобщённого решения задачи (2.1)–(2.3).

Определение 2.1. В случае $f(x,t) \in \mathcal{Q}$ и $q(x), \psi(x) \in L_1[0,1]$ будем называть «сумму» ряда справа в (1.85) обобщённым решением задачи (2.1)–(2.3).

Справедлива следующая теорема о конечной формулы для обобщённого решения в случае отсутствия потенциала и $\varphi = 0$, $f = 0$.

Теорема 2.6. *Пусть* $q(x) \equiv 0$, $\psi(x) \in L_1[0,1]$, $\int_0^1 \psi(\xi)d\xi = 0$, $\varphi(x) \equiv \equiv 0$, $f(x,t) \equiv 0$ *и выполняется условие (1.17). Тогда обобщённым решением задачи (2.1)–(2.3) является функция* $u_{01}(x,t) \in \mathcal{Q}$, *определенная для п.в.* $(x,t) \in \mathcal{Q}$ *формулой*

$$u_{01}(x,t) = -\frac{\omega_1\omega_2}{(\omega_2-\omega_1)}\Bigg(\tilde{\Psi}(\{\alpha(x,t)\}) - \tilde{\Psi}(\{\beta(x,t)\})\Bigg), \tag{2.11}$$

где

$$\tilde{\Psi}(\xi) = \begin{cases} \Psi\left(\frac{\xi}{a}\right), & \xi \in [0,a); \\ \Psi\left(\frac{1-\xi}{1-a}\right), & \xi \in [a,1). \end{cases} \tag{2.12}$$

3. Визуализация полученных результатов

Была написана программа на языке Python 3.9 (представлена в приложение А) для сравнения результатов, полученных формулами

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \psi_n \frac{e^{\lambda_n t} - 1}{\lambda_n}\left(e^{r_{1,n}x} - e^{r_{2,n}x}\right) \tag{3.1}$$

$$u_{01}(x,t) = -\frac{\omega_1\omega_2}{(\omega_2-\omega_1)}\Bigg(\tilde{\Psi}(\{\alpha(x,t)\}) - \tilde{\Psi}(\{\beta(x,t)\})\Bigg), \tag{3.2}$$

где

$$\tilde{\Psi}(\xi) = \begin{cases} \Psi\left(\frac{\xi}{a}\right), & \xi \in [0,a); \\ \Psi\left(\frac{1-\xi}{1-a}\right), & \xi \in [a,1). \end{cases} \tag{3.3}$$

Формула (3.1) была получена решением поставленной задачи методом разделения переменных а, формула в (3.2)-(3.3) является обобщенным решением начально-граничной задачи (2.1)-(2.3) в случае $q(x) = 0$, $\varphi = 0$ и $f = 0$.

Проведём численный эксперимент, была задана единая начальная функция $\psi(x) = -8x^3 + 15x^2 - 6x$.

В качестве входных данных были выбраны следующие параметры $\omega_1 = -1$, $\omega_2 = 2.5$. В результате были получены следующие трёх-мерные графики:

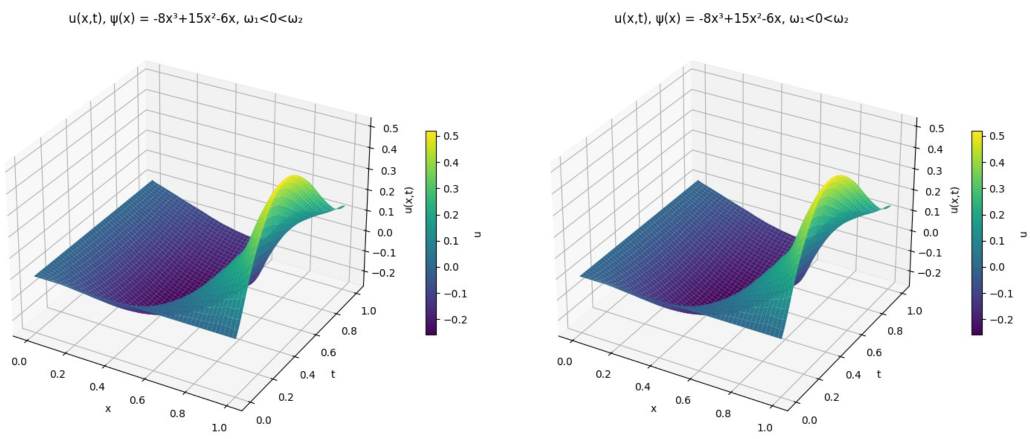

Рисунок 1 — Результаты визуализации по формуле (3.1)-(3.3)

Рассмотрим погрешности вычислений в первом и во втором случаях.

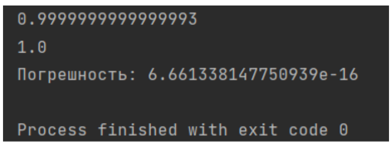

Рисунок 2 — Погрешность вычислений

Таким образом, формулы (3.1)-(3.3), выдают практически идентичные результаты.

Заключение

В выпускной квалификационной работе была рассмотрена начально-граничная задача гиперболического типа с потенциалом.

Доказана единственность классического решения данной задачи и выведена формула для классического решения, также в магистерской работе даётся определение обобщенного решения рассматриваемой начально-граничной задачи, в случае $\varphi = 0, f = 0$ и доказывается теорема о формуле для обобщенного решения также в случае $\varphi = 0, f = 0$.

Была написана программа на языке Python для визуализации решений НГЗ без потенциала полученных методом разделения переменных и формулой для обобщенного решения при $\varphi = 0, f = 0$.

Результаты полученные в магистерской работе докладывались на Воронежской весенней математической школе и на Саратовской зимней математической школе и опубликованы в [1] и [2].

Публикации автора по теме выпускной квалификационной работы

1. Пастухов М.С. Разложение первой компоненты по собственным и присоединенным функциям одного квадратичного дифференциального пучка // Современные методы теории краевых задач. Понтрягинские чтения — XXXVI. — М.: Издательский дом ВГУ. — 2025. — С. 299-302.

2. Пастухов, М. С. Разложение первой компоненты вектор-функции по собственным функциям одной дифференциальной оператор-функции / М. С. Пастухов // Современные проблемы теории функций и их приложения : Материалы 22-й международной Саратовской зимней школы, посвященной 300-летию РАН, Саратов, 28–31 января 2024 года. — Саратов: Саратовский национальный исследовательский государственный, 2024. — С. 200-203. — EDN LOZLYZ.