МИНОБРНАУКИ РОССИИ

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования

**«САРАТОВСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ Н.Г. ЧЕРНЫШЕВСКОГО»**

Кафедра компьютерной алгебры и теории чисел

# Линейные представления групп

АВТОРЕФЕРАТ БАКАЛАВРСКОЙ РАБОТЫ

студента 4 курса 421 группы

направление 02.03.01 - «Математика и компьютерные науки»

механико-математического факультета

Дубовского Ильи Антоновича

Научный руководитель

профессор, д.ф.-м.н., доцент ______________ А.Н. Сергеев

подпись, дата

Заведующий кафедрой

доцент, к.ф.-м.н., доцент ______________ А.М. Водолазов

подпись, дата

Саратов 2025

**Введение.** Данная работа посвящена изучению представлений линейных групп — фундаментальных алгебраических структур, играющих ключевую роль во многих областях современной математики и её приложений. Актуальность выбранной темы обусловлена не только теоретической значимостью линейных групп, но и их постоянно растущим практическим применением. Линейные группы, как подгруппы общих линейных групп $GL(n, K)$ над полем $K$ (где $K$ может быть полем вещественных, комплексных чисел или конечным полем), представляют собой естественное обобщение таких классических объектов, как группы вращений, симметрий и преобразований подобия. Их богатая геометрическая интерпретация позволяет использовать мощные геометрические интуиции для решения абстрактных алгебраических задач, и наоборот, абстрактные алгебраические методы эффективно применяются для анализа геометрических объектов.

Изучение представлений линейных групп открывает эффективные пути для анализа их внутренней структуры и свойств. Представление группы — это гомоморфизм группы в группу линейных преобразований векторного пространства. Этот подход позволяет "перевести"абстрактную алгебраическую структуру группы на язык линейной алгебры, где доступен мощный аппарат вычислений и геометрической интерпретации. Такой перевод существенно упрощает исследование свойств группы, позволяя использовать хорошо разработанные методы линейной алгебры для решения сложных задач.

Применение теории представлений линейных групп простирается на широкий спектр областей. В физике, например, представления групп Ли используются для классификации элементарных частиц и описания симметрий физических законов. В криптографии, представления конечных линейных групп лежат в основе многих современных криптографических алгоритмов. В вычислительной математике, теория представлений используется для разработки эффективных алгоритмов решения задач линейной алгебры. В теории чисел, представления линейных групп над конечными полями играют ключевую роль в изучении арифметических свойств чисел. Даже в такой неожиданной области, как анализ данных, методы, основанные на представлении групп, находят все более широкое применение.

Цель данной дипломной работы — углубленное изучение теории представлений линейных групп и демонстрация практической применимости полученных результатов на конкретных задачах. В работе будет проведен подробный анализ различных типов представлений, таких как неприводимые, приводимые, унитарные представления, и исследована взаимосвязь между свойствами группы и её представлений.

В соответствии с обозначенной целью, работа ставит перед собой следующие задачи:

- Систематическое изучение основных понятий теории представлений групп с акцентом на специфические особенности представлений линейных групп.

- Подробный анализ различных классов представлений линейных групп, включая доказательство ключевых теорем.

- Практическое применение теории представлений к решению задач в линейной алгебре и смежных областях.

- Исследование связи между алгебраической структурой линейной группы и свойствами её представлений.

Для достижения поставленных целей и решения задач были использованы научно-исследовательские и научно-методические пособия, учебники.

В соответствии с указанной целью и задачами работа будет иметь следующую структуру: введение, две главы, заключение, список литературы.

**Основное содержание работы.** Линейное представление группы — это способ отобразить элементы абстрактной группы в виде обратимых линейных преобразований векторного пространства над полем. Другими словами, это гомоморфизм из группы в общую линейную группу $GL(V)$ векторного пространства $V$.

В данной работе рассматривается применение леммы Шура к решению задачи о морфизмах представлений. Лемма Шура, формулировка которой приведена ниже, позволяет решать нам поставленные задачи связанные с линейными представлениями групп.

**Определение.** Пусть $T_1 : G \to GL(V_1)$, $\quad T_2 : G \to GL(V_2$ — линейные представления группы $G$. Всякое линейное отображение $\sigma : V_1 \to V_2$, удовлетворяющее условию

$$\sigma T_1(g) = T_2(g)\sigma \quad \text{для всех} \quad g \in G,$$

называется морфизмом представления $T_1$ в представление $T_2$.

**Теорема 1.** Всякий морфизм неприводимых линейных представлений есть либо изоморфизм, либо нулевое отображение.

**Примечание к теореме 1.** Несмотря на крайнюю простоту, теорема 1 имеет важные применения. В частности, с её помощью доказывается следующая теорема (Лемма Шура), которая нами будет использована ниже.

**Теорема 2 (Лемма Шура).** Всякий эндоморфизм неприводимого комплексного линейного представления $T$ скалярен, т.е. имеет вид $c\epsilon$, где $c \in C$.

Так же в дипломной работе были рассмотрены непроводимость линейных и комплексных представлений, и связанные с ними теоремы.

**Теорема 3.** Пусть $T : G \to GL(V)$ — неприводимое вещественное линейное представление. Тогда представление $T_C$ либо неприводимо, либо является суммой двух неприводимых представлений, причем во втором случае пространство $V_C$ разлагается в прямую сумму двух комплексно сопряженных минимальных инвариантных подпространств.

**Теорема 4.** Пусть $T$ — неприводимое комплексное представление группы $G$ в пространстве $V$, а $I$ — ее тривиальное представление в пространстве $U$. Тогда всякое минимальное подпространство $W \subset V \otimes U$, инвариантное относительно представления $TI$, имеет вид $V \otimes u_0$, где $u_0 \in U$.

Также было рассмотрено представление абелевых групп.

**Теорема 5.** Всякое неприводимое комплексное линейное представление абелевой группы одномерно.

**Теорема 6**. Характеры неприводимых комплексных представлений образуют ортонормированный базис в пространстве центральных функций.

**Теорема 7.** Число неприводимых попарно неэквивалентных комплексных представлений конечной группы $G$ равно числу её классов сопряжённых элементов.

**Теорема 8.** Каждое неприводимое представление $\varphi_i$ входит в разложение регулярного представления $\rho$ с кратностью, равной его размерности $n_i$. Порядок $|G|$ и размерности $n_1, \ldots, n_r$ всех неприводимых представлений связаны соотношением

$$\sum_{i=1}^{r} n_i^2 = |G|.$$

**Практическая часть.** В практической части были решены различные задачи, на доказательство изоморфности, на нахождение конечномерных представлений, доказательство того, что функция является представлением группы и т.д. Так же был написан программный модуль, который показывает что функция $F$ является матричным представлением группы $\mathbb{R}$.

**Задача 1.** Доказано равенство $\det(e^A) = e^{\mathrm{tr}(A)}$ для всех $A \in L_n(\mathbb{R})$, где $L_n(\mathbb{R})$ — пространство $n \times n$ вещественных матриц.

**Задача 2.** В обоих случаях найдено матричное представление одномерной группы Ли $\mathbb{R}$ и соответствующая генераторная матрица $A$.

2.1) Доказано, что $F(t)$ является однопараметрической группой матриц, т.е. $F(t)F(s) = F(t+s)$. Найдена матрица $A$, являющаяся генератором этой группы Ли, такая что $F(t) = \exp(tA)$, где exp обозначает матричную экспоненту.

2.2) Аналогично первому случаю, показано, что $F(t)$ формирует однопараметрическую группу матриц и найдена матрица $A$, для которой $F(t) = \exp(tA)$. В этом случае матрица $A$ является генератором группы преобразований сдвига.

**Задача 3.** Решена задача, которая касалась понимания одновременного матричного представления. Определено одновременное матричное представление и проиллюстрировано его на примере.

**Задача 4.** Доказано, что след матричного представления перестановки $\sigma \in S_n$ в естественном базисе равен числу её неподвижных точек.

**Задача 5.** Решена задача о нахождении количества тривиальных матричных представлений произвольной группы и продемонстрировал их примеры.

**Задача 6.** Доказано алгебраическое тождество для экспоненты матрицы, используя свойства подобных матриц и свойства экспоненты, продемонстрирована инвариантность экспоненты матрицы относительно преобразований подобия.

**Задача 7.** Проверено, является ли отображение $S : \mathbb{R} \to S(V)$ линейным представлением, где $V$ — пространство многочленов с действительными коэффициентами, для пяти разных определений $S(t)f$. Линейное представление означает, что для каждого $t \in \mathbb{R}$, $S(t)$ является линейным оператором на $V$, и $S(t_1 + t_2) = S(t_1)S(t_2)$ (или эквивалентное условие, связанное с групповой структурой на $\mathbb{R}$). Проверка сводится к проверке двух свойств:

1. Линейность $S(t)$: Для любых $f, g \in V$ и $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, должно выполняться $S(t)(\alpha f + \beta g) = \alpha S(t)f + \beta S(t)g$.

2. Условие гомоморфизма: Для любых $t_1, t_2 \in \mathbb{R}$, должно выполняться $S(t_1 + t_2) = S(t_1)S(t_2)$. Это эквивалентно $S(0) = Id$ (тождественный оператор) и $S(-t) = S(t)^{-1}$.

Суть задания была в том, если два этих условия выполняются, то отображение является линейным представлением.

**Задача 8.** Найдено матричное представление линейного оператора сдвига для пространства многочленов степени не выше 3, определив матрицу, описывающую действие оператора сдвига $(S(t)f)(x) = f(x - t)$ в выбранном базисе пространства $V$. Это решение демонстрирует понимание связи между линейными отображениями, их матричными представлениями и действием оператора сдвига на многочленах.

**Задача 9.** Были классифицированы все конечномерные комплексные линейные представления групп $\mathbb{Z}$ и $\mathbb{Z}_m$. Определены все неприводимые конечномерные комплексные представления этих групп, так как в решении, выяснилось, что все представления этих абелевых групп являются прямыми суммами одномерных неприводимых представлений.

**Задача 10.** Задача состояла в классификации всех дифференцируемых конечномерных комплексных линейных представлений групп $\mathbb{R}^+$ и $\mathbb{T}$. Было получено полное описание таких представлений для обеих групп. В результате решения задачи были определены все одномерные представления группы $\mathbb{R}^+$ и все неприводимые представления группы $\mathbb{T}$.

**Задача 11.** Доказано свойство действия группы, а именно, что нейтральный элемент группы индуцирует тождественное отображение на множестве, на котором действует группа.

**Задача 12.** Было доказано, что отображение $s$ задаёт действие группы $\mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ на множестве $\mathbb{R}_1 = \mathbb{R} \cup \{\infty\}$. Было показано, что $s$ удовлетворяет двум аксиомам действия группы:

1. Идентичность: Действие единичной матрицы оставляет все элементы $\mathbb{R}_1$ неизменными. Другими словами, $s(I)x = x$ для всех $x \in \mathbb{R}_1$, где $I$ — единичная матрица.

2. Совместимость: Действие произведения двух матриц эквивалентно последовательному применению действия каждой матрицы. То есть, $s(AB)x = s(A)(s(B)x)$ для всех $A, B \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ и $x \in \mathbb{R}_1$.

Таким образом, решение демонстрирует построение и проверку действия группы линейных преобразований на расширенной вещественной прямой.

**Задача 13.** Выведена формула для правого регулярного представления группы $G$. Получена аналитическое выражения для правого регулярного представления $G$ и построено правое регулярное представление $G$ с помощью формулы.

**Задача 14.** Был доказан изоморфизм левого и правого регулярных представлений произвольной группы $G$. Это демонстрирует фундаментальную симметрию между левым и правым действиями группы на себе. Была показана эквивалентность левого и правого регулярных представлений в качестве групп перестановок.

**Задача 15.** Доказано существование точного линейного представления для любой группы. Этот результат демонстрирует фундаментальную связь между абстрактными группами и линейной алгеброй.

**Задача 16.** Была решена задача, исследующая связь между конечномерными комплексными представлениями группы целых чисел ($\mathbb{Z}$) и группы комплексных чисел ($\mathbb{C}$). В решение показано, является ли каждое конечномерное комплексное представление группы $\mathbb{Z}$ ограничением некоторого представления группы $\mathbb{C}$.

Таким образом, работа представляет собой исследование и доказательство теоремы о связи между представлениями групп $\mathbb{Z}$ и $\mathbb{C}$ в конечномерном комплексном случае.

**Задача 17.** Найдены все конечномерные комплексные представления группы $\mathbb{Z}_m$, инвариантные относительно автоморфизма $\varphi(x) = -x$. Определены все представления, инвариантные относительно замены порождающего элемента на обратный. По другому говоря это описание представлений $\mathbb{Z}_m$, инвариантных относительно инверсии.

В данной работе были решены и доказаны ряд задач, связанных с представлением линейных групп. В частности, были исследованы разложение матриц на элементарные, нахождение ядра и образа линейного отображения, вычисление определителя и следа матрицы, построение неприводимых представлений группы $S_3$. Для каждой из этих задач были получены аналитические решения и для некоторых задач разработаны соответствующие программные реализации на языке Python. В коде используются библиотеки NumPy, SymPy. Полученные результаты подтверждают теоретические выкладки и демонстрируют эффективность предложенных алгоритмов.

Этот код проверяет, является ли функция $F(t)$ матричным представлением аддитивной группы действительных чисел ($\mathbb{R}$). Функция $F(t)$ создает $2 \times 2$ матрицу, элементы которой являются гиперболическим косинусом и синусом аргумента $t$.

Код выполняет три основных проверки, чтобы подтвердить групповые свойства:

1. Единичный элемент: Проверяет, что $F(0)$ равна единичной матрице ($2 \times 2$ матрица с единицами на главной диагонали и нулями в остальных местах). Это необходимое условие для того, чтобы множество матриц, порожденных $F(t)$, образовывало группу. Используется `np.allclose` для сравнения с плавающей точкой, так как прямое сравнение $==$ может давать ошибки из-за погрешности вычислений.
2. Обратный элемент: Проверяет, что $F(-t)$ является обратной матрицей к $F(t)$. То есть, произведение $F(t)$ и $F(-t)$ должно равняться единичной матрице. Опять же используется `np.allclose` для сравнения матриц.
3. Ассоциативность: Проверяет ассоциативность операции умножения матриц. Это означает, что $(F(t_1)F(t_2))F(t_3)$ должно быть равно $F(t_1)(F(t_2)F(t_3))$ и равно $F(t_1 + t_2 + t_3)$. Это ключевое свойство групповой операции. Здесь также применяется `np.allclose` для сравнения с плавающей точкой.

В дополнение к численным проверкам, код включает символическую проверку с использованием библиотеки `sympy`. Это позволяет проверить свойство единичного элемента аналитически, без использования приближенных вычислений с плавающей точкой. `sp.Symbol('t')` создает символическую переменную $t$, а $F_{sym}$ создает матрицу с символическими элементами. $F_{sym}.\text{subs}(\{t:0\})$ подставляет $t = 0$ в символическую матрицу, что позволяет проверить аналитически, равна ли результирующая матрица единичной.

Код демонстрирует, как проверить, что данное отображение (в данном случае, $F(t)$) является гомоморфизмом группы $\mathbb{R}$ (с операцией сложения) в группу $2 \times 2$ матриц (с операцией умножения). Он использует комбинацию численных и символических методов для обеспечения надежности проверки. Использование `numpy` позволяет эффективно работать с матрицами, а `sympy` обеспечивает возможность точного, аналитического анализа. `assert` утверждения гарантируют, что код выдаст ошибку, если проверяемые свойства не выполняются.

**Заключение.** В ходе исследования были рассмотрены основные аспекты теории представлений линейных групп — фундаментальных алгебраических структур, играющих ключевую роль в современной математике и её приложениях. Анализ различных типов представлений позволил глубже понять внутреннюю структуру и свойства линейных групп, рассматриваемых как подгруппы общих линейных групп $GL(n, K)$ над различными полями $K$.

Работа охватила изучение методов построения и классификации представлений, что позволило систематизировать знания в данной области. Были проанализированы связи между алгебраическими свойствами линейных групп и свойствами их представлений, демонстрируя эффективность применения линейно-алгебраического аппарата к решению абстрактных алгебраических задач.

В результате исследования подтверждена высокая эффективность теории представлений для анализа линейных групп. Полученные результаты демонстрируют широкие возможности применения теории представлений в различных областях, включая физику (классификация элементарных частиц), криптографию (разработка криптографических алгоритмов), вычислительную математику (разработка эффективных алгоритмов) и теорию чисел (изучение арифметических свойств чисел).

Таким образом, данная работа подтверждает значимость изучения представлений линейных групп и их приложений. Полученные результаты вносят вклад в развитие теории представлений и открывают новые перспективы для дальнейших исследований, как теоретических, так и прикладных, в различных областях науки и техники. Надеюсь, что результаты исследования будут полезны как для дальнейших теоретических изысканий, так и для практического применения в перечисленных областях.