

МИНОБРНАУКИ РОССИИ

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования

**«САРАТОВСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ Н.Г.ЧЕРНЫШЕВСКОГО»**

Кафедра компьютерной алгебры и теории чисел

Персистентные группы гомологий. Комплексы свидетелей

АВТОРЕФЕРАТ МАГИСТЕРСКОЙ РАБОТЫ

студентки 2 курса 227 группы

направление 02.04.01 — Математика и компьютерные науки

механико-математического факультета

Саутиной Юлианы Евгеньевны

Научный руководитель

зав. каф., к.ф.-м.н., доцент А.М. Водолазов

Зав. кафедрой

зав. каф., к.ф.-м.н., доцент А.М. Водолазов

Саратов 2025

Введение. В работе «Персистентные группы гомологий. Комплексы свидетелей» будут рассматриваться гомологии фильтрованного d -мерного симплициального комплекса K . Причём в качестве коэффициентов основного кольца допускаются произвольные области главных идеалов D . Фильтрованный комплекс представляет собой возрастающую последовательность симплициальных комплексов. Такая фильтрация индуцирует гомоморфизм групп гомологий, то есть семейство абелевых групп $\{G_i\}_{i \geq 0}$ вместе с гомоморфизмами $G_i \rightarrow G_{i+1}$. Если гомологии вычисляются с коэффициентами из поля, то получается индуцированный гомоморфизм векторных пространств над полем. Каждое векторное пространство определяется (с точностью до изоморфизма) своей размерностью.

В первом разделе работы будет показано, что устойчивые гомологии фильтрованного d -мерного симплициального комплекса является стандартной гомологией определенного степенного модуля над полиномиальным кольцом. Проведенный анализ представляет устойчивые гомологии в рамках классической алгебраической топологии. Такое представление позволяет использовать стандартную теорему о структуре, чтобы установить существование простого описания групп устойчивой гомологии в виде набора интервалов. Это описание существует в произвольных полях, а не только в $\mathbb{Z}_2$.

Второй раздел посвящен проблеме надежного вычисления топологических инвариантов геометрических объектов, используя только данные облака точек, полученные путем выборки с объекта. Подобный вид топологического анализа может предоставить качественную информацию о наборах данных, которая недоступна другими методами. В частности, это может способствовать визуализации многомерных данных. С точки зрения вычислительных ресурсов стандартные симплициальные комплексы для аппроксимации топологического типа исходного набора данных являются неэффективными. Решение проблемы заключается в построении так называемого комплекса свидетелей существования ребер, натянутых на выбранные ранее опорные точки исходных данных. Такая конструкция создает вложенное семейство симплициальных комплексов, которые представляют данные в разных масштабах признаков, что подходит для вычисления персистентных гомологий методами, изложенными в первой главе работы.

Основное содержание работы. В первом разделе работы, который называется «Персистентные группы гомологий фильтрованного симплициального комплекса» рассматривается математическая и алгоритмическая основы, необходимые для работы. Глава начинается с обзора структуры конечнопорожденных модулей и градуированных модулей над областью главных идеалов (ОГИ).

Определение 1.1. Градуированное кольцо – это кольцо $\langle R, +, \cdot \rangle$, которое раскладывается на прямую сумму абелевых групп $R \cong \bigoplus_i R_i$, $i \in \mathbb{Z}$, при этом умножение определено как билинейное отображение $R_n \otimes R_m \rightarrow R_{n+m}$.

Теорема 1.1. Если D – это область главных идеалов, то каждый конечнопорожденный p -модуль изоморфен прямой сумме циклических p -модулей. То есть, он однозначно разлагается в следующую форму

$$D^\beta \oplus \left(\bigoplus_{i=1}^m D/d_i D \right), \quad (1.1)$$

где $d_i \in D$, $\beta \in \mathbb{Z}$, и $d_i | d_{i+1}$. Аналогично, каждый градуированный модуль M над градуированной областью главных идеалов D однозначно разлагается в следующую форму

$$\left(\bigoplus_{i=1}^n \Sigma^{\alpha_i} D \right) \oplus \left(\bigoplus_{j=1}^m \Sigma^{\gamma_j} D/d_j D \right), \quad (1.2)$$

где $d_j \in D$ – однородные элементы, такие что $d_j | d_{j+1}$, $\alpha_i, \gamma_j \in \mathbb{Z}$, и символ Σ^α обозначает сдвиг на α вверх в градуировке.

В обоих случаях теорема разделяет структуры на две части. Свободная часть, которая с точностью до изоморфизма представляет собой бесконечную циклическую группу $\beta\mathbb{Z}$, то есть является векторным пространством размерности β . Крученая часть справа представляет собой конечное число элементов. Например, если область главных идеалов D равно $\mathbb{Z}$ в теореме, то $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z} = \mathbb{Z}_3$ будет содержать только три элемента. Эти крученые элементы также являются однородными. Понятно, что теорема описывает конечнопорожденные модули и градуированные модули как структуры, которые выглядят как векторные пространства, но при этом имеют «конечные» размерности.

Затем обсуждаются симплициальные комплексы и связанные с ними цепные комплексы.

Определение 1.2. Симплициальный комплекс – это множество K вместе с множеством S подмножеств K , называемых симплексами, таких что для каждого $v \in K$, $\{v\} \in S$, и если $\tau \subseteq \sigma \in S$, то $\tau \in S$.

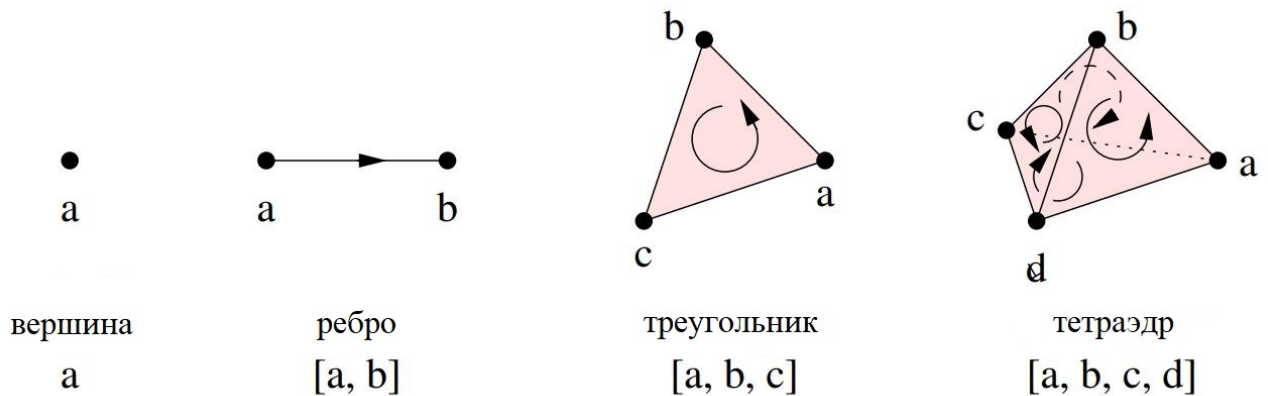


Рисунок 1 – Ориентированные k -симплексы в $\mathbb{R}^3$, $0 \leq k \leq 3$. Ориентация тетраэдра показана на его гранях.

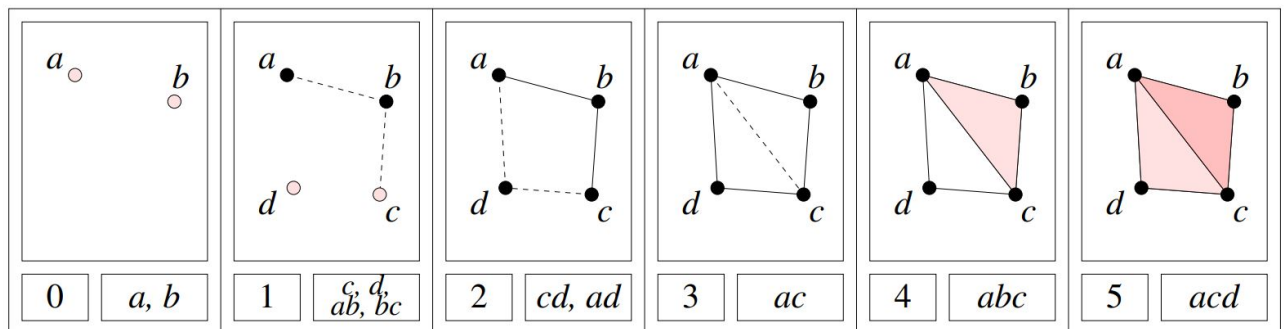


Рисунок 2 – Фильтрованный комплекс с добавленными симплексами

Определим подгруппы в C_k с помощью граничного оператора группы циклов $Z_k = \ker \partial_k$ и группа границ $B_k = \text{im } \partial_{k+1}$. Примеры циклов показаны на рисунке 3.

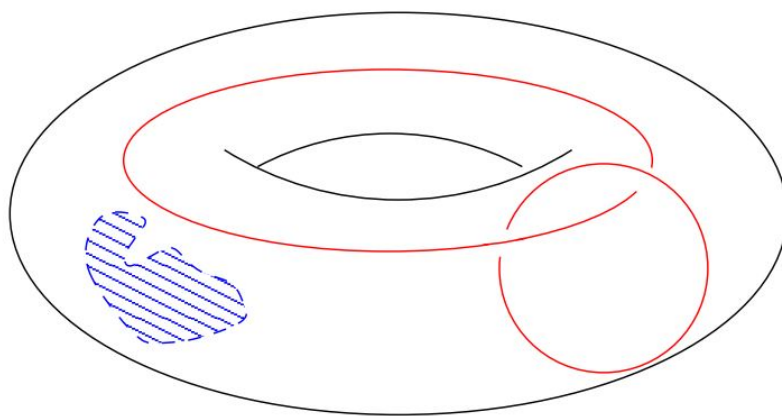


Рисунок 3 – Штрихованная 1-граница расположена на поверхности тора. Два сплошных 1-цикла образуют базис для первого класса гомологии тора. Эти циклы не связаны: ни один из них не является границей какой-либо части поверхности.

Важным свойством операторов границы является то, что граница границы всегда равна пустому множеству, $\partial_k \partial_{k+1} = 0$. Этот факт означает, что определенные подгруппы вложены друг в друга: $B_k \subseteq Z_k \subseteq C_k$, как показано на рисунке 4.

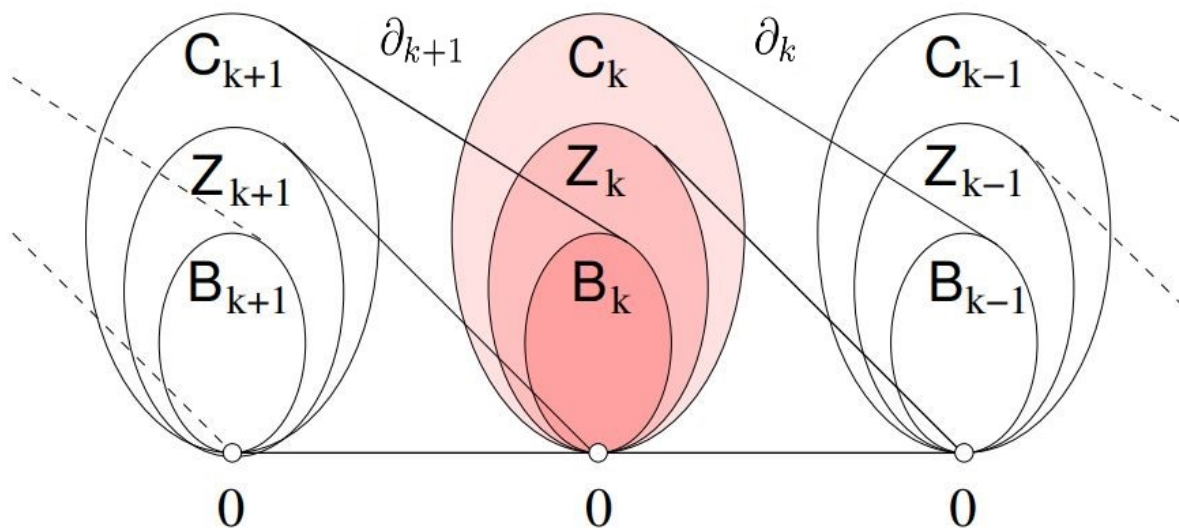


Рисунок 4 – Цепной комплекс с его внутренними элементами: группой цепей, группой циклов и группой границ, а также их образы при действии граничными операторами

Объединив эти концепции, определяем симплициальную гомологию и представляем стандартный алгоритм ее вычисления. Изучаются методика, алго-

ритм и применяемые операции для упрощения матрицы граничного оператора до диагональной формы.

В алгоритме используются следующие элементарные операции над строками матрицы M_k :

1. Перемена мест i и j строк,
2. Умножение i строки на -1 ,
3. Замена i строки на $(i + qj)$ строку, где q – целое число, а $j \neq i$.

Алгоритм также использует элементарные операции над столбцами, которые определяются аналогичным образом. Каждая операция над столбцами (строками) соответствует изменению базиса для C_k (C_{k-1}). Например, если e_i и e_j являются i -ым и j -ым базисными элементами для C_k соответственно, то операция над столбцом типа (3) заменяет e_i на $e_i + qe_j$. Аналогичная операция над строкой для базовых элементов $\hat{e}_i$ и $\hat{e}_j$, для C_{k-1} , однако, заменяет $\hat{e}_j$ на $\hat{e}_j - q\hat{e}_i$. Алгоритм систематически модифицирует базисы C_k и C_{k-1} с помощью элементарных операций, чтобы привести M_k к нормальной форме (форме Смита):

$$\tilde{M}_k = \left[\begin{array}{ccc|c} b_1 & & 0 & 0 \\ & \ddots & & 0 \\ 0 & & b_{l_k} & 0 \\ \hline & 0 & & 0 \end{array} \right],$$

где $l_k = \text{rank } M_k = \text{rank } \tilde{M}_k$, $b_i \geq 1$ и $b_i \mid b_{i+1}$ для всех $1 \leq i < l_k$. Алгоритм также может вычислить соответствующие базисы $\{e_j\}$ и $\{\hat{e}_i\}$ для C_k и C_{k-1} соответственно, хотя это необязательно, достаточно выполнить декомпозицию. Вычисляя нормальную форму во всех размерностях, получаем полную характеристику H_k :

- (i) коэффициенты кручения H_{k-1} (d_i в (1.1)) точно соответствуют диагональным элементам b_i , большим единицы.
- (ii) $\{e_i \mid l_k + 1 \leq i \leq m_k\}$ является базисом для Z_k . Таким образом, $\text{rank } Z_k = m_k - l_k$.

(iii) $\{b_i \hat{e}_i \mid 1 \leq i \leq l_k\}$ является базисом для B_{k-1} . То есть, $\text{rank } B_k = \text{rank } M_{k+1} = l_{k+1}$.

Пример 1.1. Для комплекса на рисунке 2 стандартным матричным представлением ∂_1 является

$$M_1 = \left[\begin{array}{c|ccccc} & ab & bc & cd & ad & ac \\ \hline a & -1 & 0 & 0 & -1 & -1 \\ b & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ c & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \\ d & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{array} \right],$$

где показываем основания внутри матрицы. Уменьшая матрицу, получаем нормальную форму

$$\tilde{M}_1 = \left[\begin{array}{c|ccccc} & cd & bc & ab & z_1 & z_2 \\ \hline d-c & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ c-b & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ b-a & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ a & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right],$$

где $z_1 = ad - bc - cd - ab$ и $z_2 = ac - bc - ab$ образуют базис для Z_1 , а $\{d-c, c-b, b-a\}$ является базисом для B_0 .

В завершение раздела, описывается понятие устойчивости гомологических групп в фильтрованных симплициальных комплексах. Вводится определение устойчивых гомологий, объясняются соответствующие математические конструкции и их свойства.

Заданному фильтрованному i -му комплексу K^i соответствуют граничные операторы ∂_k^i , матрицы M_k^i и группы C_k^i, Z_k^i, B_k^i и H_k^i для всех $i, k \geq 0$. Верхние индексы указывают индекс фильтрации и не связаны с когомологиями. p -устойчивую k -мерную гомологическую группу K^i определим как

$$H_k^{i,p} = Z_k^i / (B_k^{i+p} \cap Z_k^i). \quad (1.4)$$

Во втором разделе, который называется «Топологическая оценка с использованием комплексов свидетелей» рассматриваются абстрактные сим-

плициальные комплексы и комплексы свидетелей.

Абстрактный симплициальный комплекс S задается следующими данными:

- Множество вершин Z .
- Правило, определяющее, когда ' p -симплекс' $\sigma = [z_0 z_1 \dots z_p]$ принадлежит S ; здесь вершины $z_0, z_1, \dots, z_p$ симплекса σ являются различными элементами Z , перечисленными в некотором порядке, который фиксируем раз и навсегда.
- Каждый p -симплекс σ имеет $p + 1$ граней, которые являются $(p - 1)$ -симплексами; каждая грань получается путем удаления одной из вершин $z_0, z_1, \dots, z_p$. Правило принадлежности обладает тем свойством, что если σ принадлежит S , то все его грани принадлежат S .

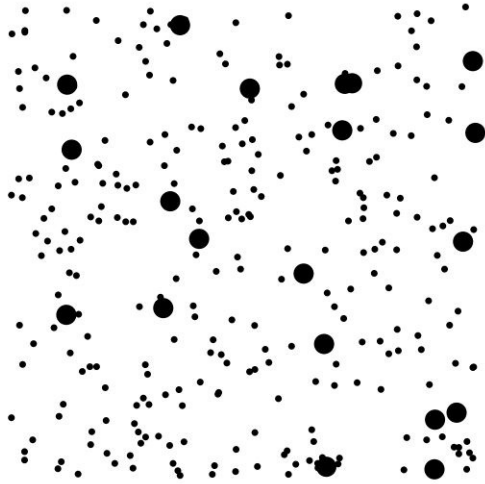
Пусть D – матрица размера $n \times N$ с неотрицательными элементами, рассматриваемая как матрица расстояний между множеством из n ориентиров и N точками данных. Определим (строгий) комплекс свидетелей $W_\infty(D)$ с множеством вершин $\{1, 2, \dots, n\}$ следующим образом:

- Ребро $\sigma = [ab]$ принадлежит $W_\infty(D)$ тогда и только тогда, когда существует точка данных $1 \leq i \leq N$ такая, что $D(a, i)$ и $D(b, i)$ являются двумя наименьшими элементами в i -ом столбце матрицы D в некотором порядке.
- По индукции по p : предположим, что все грани p -симплекса $\sigma = [a_0 a_1 \dots a_p]$ принадлежат $W_\infty(D)$.

Тогда сам σ принадлежит $W_\infty(D)$ тогда и только тогда, когда существует точка данных $1 \leq i \leq N$ такая, что $D(a_0, i), D(a_1, i), \dots, D(a_p, i)$ являются наименьшими $p + 1$ элементами в i -ом столбце матрицы D в некотором порядке.

Рассмотрим 2 способа получения набора ориентиров: случайно или методом «максмин», в соответствии с рисунком 16.

Случайный:



Максмин:

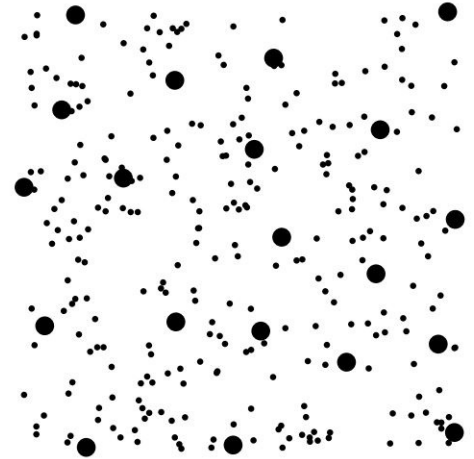


Рисунок 16 – Методы получения набора ориентиров

Метод «максмин» это следующая индуктивная процедура:

Инициализируем, выбирая $l_1 \in Z$ случайным образом. Индуктивно, если $l_1, l_2, \dots, l_{i-1}$ были выбраны, то $l_i \in Z \setminus \{l_1, l_2, \dots, l_{i-1}\}$ – это точка данных, которая максимизирует функцию

$$z \mapsto \min\{D(z, l_1), D(z, l_2), \dots, D(z, l_{i-1})\},$$

где D – метрика. Продолжаем до тех пор, пока не будет выбрано желаемое количество точек-ориентиров.

Метод «максмин» дает более равномерно распределенные ориентиры, но он также имеет тенденцию выбирать экстремальные точки. Примеры обоих случаев показаны на рисунке 16: случайный слева, «максмин» справа.

Количество ориентиров следует выбирать, установив нижнюю границу отношения N/n .

Заключение. Таким образом, первый раздел предоставляет важные инструменты для анализа и понимания структуры модулей над областями главных идеалов, как в общем случае, так и в градуированных версиях. Она охватывает базовые понятия и инструменты симплициальной гомологии, иллюстрируя их с помощью теоретических и геометрических примеров. А также описывает ключевые шаги и теоретические основы редукционного алгоритма, который является основным методом для вычисления гомологий симплици-

альных комплексов.

Второй раздел решает проблему надежного вычисления топологических инвариантов геометрических объектов, используя только данные облака точек, полученные путем выборки с объекта. Широко признано, что такой вид топологического анализа может предоставить качественную информацию о наборах данных, которая недоступна другими методами. В частности, это может способствовать визуализации многомерных данных. Стандартные симплициальные комплексы для аппроксимации топологического типа, лежащего в основе пространства (такие как Чеха, Рипса или α -формы) создают симплициальные комплексы, множество вершин которых имеет тот же размер, что и базовый набор данных облака точек. Такие построения являются неэффективными (с точки зрения вычислительных ресурсов), поскольку гомотопические типы базовых объектов обычно реализуются на гораздо меньших множествах вершин. Вводится и обосновывается важная математическая конструкция, обеспечивающая новые методы анализа персистентных гомологий, что расширяет возможности исследования и применения топологических данных в различных областях.