

МИНОБРНАУКИ РОССИИ
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
**«САРАТОВСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ Н.Г. ЧЕРНЫШЕВСКОГО»**

Кафедра компьютерной алгебры и теории чисел

Суперполиномы типа $B(1,1)$ и супералгебры Ли $Osp(3,2)$

АВТОРЕФЕРАТ МАГИСТЕРСКОЙ РАБОТЫ

студентки 2 курса 227 группы

направления 02.04.01 – Математика и компьютерные науки

механико-математического факультета

Сидоровой Аллы Андреевны

Научный руководитель

профессор, д.ф.-м.н., доцент

подпись, дата

А.Н. Сергеев

Зав. кафедрой

зав.каф., к.ф.-м.н., доцент

подпись, дата

А.М. Водолазов

Саратов 2025

Введение. Данная магистерская работа развивает исследование взаимосвязи между теорией представлений супералгебр Ли и теорией обобщённых квантовых интегрируемых систем Калоджеро-Мозера-Сазерленда (КМС), начатое в работах А.Н. Сергеева и А.П. Веселова. Первые результаты в этом направлении были получены А.Н. Сергеевым^{1 2}, чьи исследования не только стимулировали изучение квантовых интегрируемых систем с точки зрения супералгебр Ли, но и продемонстрировали возможность применения методов квантовых интегрируемых систем в теории представлений.

В дальнейшем М.В. Фейгин, А.П. Веселов и О.А. Чалых изучили частные случаи дифференциальных операторов.³ Затем В.В. Серганова ввела понятие обобщённой системы корней⁴, а после была установлена её связь с квантовыми интегрируемыми системами, а именно построение интегралов.⁵ Альтернативные методы построения интегралов были предложены в дальнейших исследованиях.^{6 7}

Целью данной работы является дальнейшее исследование в частном случае связей квантовых интегрируемых систем с теорией представлений супералгебры Ли.

Для этого будем использовать два основных свойства суперполиномов Якоби. Первое из них состоит в том, что они являются собственными функциями деформированного оператора Калоджеро-Мозера-Сазерленда (КМС), а второе свойство состоит в том, что они удовлетворяют формулам Пьери. Поэтому вместо вычисления предела суперполиномов Якоби будем вычислять предел оператора КМС и предел коэффициентов формул Пьери. В случае

¹Сергеев, А. Н. Оператор Калоджеро и супералгебры Ли / А. Н. Сергеев // Теоретическая и математическая физика, 2002. — Т. 131, № 3. — С. 355-376.

²Sergeev, A. N. Superanalogs of the Calogero operators and Jack polynomials / A. N. Sergeev // J. Nonlinear Math. Phys, 2001. — Vol. 8, no. 1. — P. 59-64

³Veselov, A. P. New integrable deformations of the Calogero-Moser quantum problem / A. P. Veselov, M. V. Feigin, O. A. Chalykh // J. Math. Phys, 1998. — Vol. 39, no. 2. — P. 659-703.

⁴Serganova, V. V. On generalization of root system / V. V. Serganova // Communication in Algebra, 1996. — Vol. 24, no. 13. — P. 4281-4299.

⁵Sergeev, A. N. Deformed quantum Calogero-Moser systems and Lie superalgebras / A. N. Sergeev, A. P. Veselov // Communications in Algebra, 2004. — Vol. 245, no. 2. — P. 249-278

⁶Sergeev, A. N. Generalised discriminant, deformed quantum Calogero-Moser-Sutherland problem and super-Jack polynomials / A. N. Sergeev, A. P. Veselov // Advances in Mathematics, 2005. — Vol. 192, no. 4. — P. 341-375.

⁷Sergeev, A. N. Deformed Macdonald - Ruijsenaars operators and super Macdonald polynomials / A. N. Sergeev, A. P. Veselov // Communications in Mathematical Physics, 2009. — Vol. 288, no. 2. — P. 65-75.

$BC_{1,1}$ (как и в общем случае $BC_{n,m}$) было бы естественно использовать результаты К. Грусон и В. Сергановой.^{8 9}

В ходе работы решаются следующие задачи:

- Исследовать структуры супералгебры Ли $\mathfrak{osp}(3|2)$ и её представлений;
- Изучить свойств суперполиномов Якоби, связанных с $\mathfrak{osp}(3|2)$;
- Установить связи между суперполиномами Якоби и характеристиками Эйлера представлений $\mathfrak{osp}(3|2)$.
- Рассмотреть частный случай диаграммы $\lambda = (2, 1)$ и получить явные выражения для коэффициентов разложения в формуле Пьери;
- Получить явные выражения для коэффициентов разложения $a_{\lambda,\mu}$ в формуле Пьери $p_1 J_\lambda = \sum a_{\lambda,\mu} J_\mu$ для в общем случае $\lambda = (a, 1^b)$, включая симметричные случаи;
- Разработать программное обеспечение для графического представления диаграмм Юнга, используемых в исследовании.

В этой работе исследуется частный случай супералгебры Ли $\mathfrak{osp}(3|2)$: предлагается метод вычисления суперхарактеров её неприводимых представлений, основанный на связи между супералгебрами Ли и деформированными квантовыми интегрируемыми системами.¹⁰ В рамках этого подхода рассматриваются специализации собственных полиномиальных функций оператора Калоджеро-Мозера-Сазерленда типа $BC_{1,1}$.

Конкретно, изучаются собственные функции, представляющие собой полиномы, параметризованные диаграммами Юнга λ специального вида (так называемые "крюки"). Коэффициенты этих полиномов рационально зависят от параметров k и p , причём значения $k = -1$ и $p = -1$ соответствуют супералгебре $\mathfrak{osp}(3|2)$.

Также в настоящей работе рассматриваются супермногочлены Якоби, которые являются собственными функциями дифференциального оператора Калоджеро-Мозера-Сазерленда и так же как и сам оператор зависят от трех параметров k, p, q . Основная сложность заключается в том, что при опре-

⁸Cruson, C. Cohomology of generalized supergrassmannians and character formulae for basic classical Lie superalgebras / C. Cruson, V. Serganova // Proe. Lond. Math. Soc. (3), 2010 – P. 852-892.

⁹Cruson, C. Bernstein-Gel'fand-Gel'fand reciprocity and indecomposable projective modules for classical algebraic supergroups / C. Cruson, V. Serganova // Mosc. Math. J. 13 (2), 2013 – P. 1-33.

¹⁰Sergeev, A. N. Deformed quantum Calogero–Moser systems and Lie superalgebras / A. N. Sergeev, A. P. Veselov // Communications in Algebra, 2004. — Vol. 245, no. 2. — P. 249–278

деленных значениях параметров эти многочлены могут становиться некорректно определенными. В данной работе рассматривается частный случай супергруппы Ли $\mathfrak{osp}(3|2)$ при $m = n = 1$.

Работа носит теоретически характер. Актуальность работы обусловлена тем, что ее результаты могут быть использованы в теории представлений супералгебр Ли, теории квантовых интегрируемых систем, теории специальных функций, математической физике.

Структура работы включает введение, четыре раздела, заключение, библиографический список и приложение. В первом разделе излагаются основные понятия теории супералгебр Ли, включая их определения, свойства и примеры. Также обсуждаются классические и суперполиномы Якоби, их связь с дифференциальными уравнениями и ортогональностью. Второй раздел освещает взаимосвязи между суперполиномами Якоби и операторами КМС. Приводятся формулы для коэффициентов разложения в формуле Пьерри, а также изучаются свойства диаграмм Юнга. Рассматривается деформированный оператор КМС типа $BC_{m,n}$ и его связь с теорией представлений. В третьем разделе анализируются конкретные примеры диаграмм Юнга, включая явные вычисления для $\lambda = (2, 1)$. Затем рассматривается более общий вид диаграммы $\lambda = (a, 1^b)$ и изучаются симметричные случаи (в них возникают особенности) и выводятся формулы для коэффициентов разложения. В четвертом разделе рассматриваются характеры Эйлера и их связь с предельными значениями суперполиномов Якоби. Приложения содержат программный код для визуализации диаграмм Юнга.

В первой части работы я рассматриваю основные относящиеся к теории супералгебр Ли и суперполиномов Якоби.

Дальнейшее изложение будет опираться на следующую теорему.¹¹

Теорема 2.1. Повторный предел суперполиномов Якоби, когда вначале $k \rightarrow -1$, а затем $p \rightarrow -1$, корректно определен и совпадает с характером Эйлера.

Затем определим суперполиномы Якоби, используя тот факт, что они удовлетворяют формуле Пиери и являются собственными функциями деформи-

¹¹Sergeev, A. N. Euler characters and super Jacobi polynomials. / A. N. Sergeev, A. P. Veselov // Advances in Mathematics, 2011. – Vol. 226, no. 5. – P. 4286-4315.

рованного оператора Калоджеро - Мозера - Сазерленда (КМС). Деформированный оператор КМС типа $BC_{m,n}$ имеет следующий вид ¹²

$$\begin{aligned}\mathcal{L} = & \sum_{i=1}^m \partial_{x_i}^2 + k \sum_{j=1}^n \partial_{y_j}^2 + k \sum_{i<j}^m \left(\frac{x_i + x_j}{x_i - x_j} (\partial_{x_i} - \partial_{x_j}) + \frac{x_i x_j + 1}{x_i x_j - 1} (\partial_{x_i} + \partial_{x_j}) \right) - \\ & - \sum_{i<j}^n \left(\frac{y_i + y_j}{y_i - y_j} (\partial_{y_i} - \partial_{y_j}) + \frac{y_i y_j + 1}{y_i y_j - 1} (\partial_{y_i} + \partial_{y_j}) \right) - \\ & - \sum_{i=1}^m \left(p \frac{x_i + 1}{x_i - 1} + 2q \frac{x_i^2 + 1}{x_i^2 - 1} \right) \partial_{x_i} - k \sum_{i=1}^m \left(r \frac{y_j + 1}{y_j - 1} + 2s \frac{y_j^2 + 1}{y_j^2 - 1} \right) \partial_{y_j} - \\ & - \sum_{i,j} \left(\frac{x_i + y_j}{x_i - y_j} (\partial_{x_i} - k \partial_{y_j}) + \frac{x_i y_j + 1}{x_i y_j - 1} (\partial_{x_i} + k \partial_{y_j}) \right),\end{aligned}$$

где $\partial_{x_i} = x_i \frac{\partial}{\partial x_i}$, $\partial_{y_j} = y_j \frac{\partial}{\partial y_j}$, а параметры k, p, q, r, s выбираются из условий $p = kr$, $2q + 1 = k(2s + 1)$.

В приведенных ниже формулах мы всегда предполагаем, что

$$h = -km - n - \frac{1}{2}p - q,$$

где m, n – целые неотрицательные числа.

Определение 2.1. Диаграмма Юнга – это конечный набор клеток, выровненных по левому краю, где длина строк не возрастает сверху вниз.

Пусть $H(m, n)$ – множество разбиений диаграммы λ таких, что $\lambda_{m+1} \leq n$.

Определим для любой диаграммы λ следующие функции одной переменной

$$\begin{aligned}n(\lambda) &= \lambda_2 + 2\lambda_3 + 3\lambda_4 + \dots \\ a_i &= \lambda_i + ki, \quad i = 1, 2, \dots \\ C_\lambda^0(x) &= \prod_{(i,j) \in \lambda} (j - 1 + k(i - 1) + x) \\ C_\lambda^+(x) &= \prod_{(i,j) \in \lambda} (\lambda_i + j + k(\lambda'_j + i) + x)\end{aligned}$$

¹²Sergeev, A.N. Cologero-Moser operator and super Jacobi polynomials / A. N. Sergeev, A. P. Veselov // Adv. Math. 222, 2009 – P. 1678-1726.

$$C_{\lambda}^{-}(x) = \prod_{(i,j) \in \lambda} (\lambda_i - j - k(\lambda'_j - i) + x),$$

$$J_{\lambda}(1) = 4^{|\lambda|} \frac{C_{\lambda}^0(h + \frac{1}{2}p + q) C_{\lambda}^0(k + h - \frac{1}{2}p + \frac{1}{2})}{C_{\lambda}^{-}(-k) C_{\lambda}^{+}(2h - 1)},$$

где λ' обозначает сопряженное разбиение на λ .

Обозначим через $S^{+}(\lambda)$ множество диаграмм μ , которые можно получить из λ добавлением одной клетки, а через $S^{-}(\lambda)$ – множество диаграмм μ , которые можно получить из λ удалением одной клетки. Зададим также $S(\lambda) = S^{+}(\lambda) \cup S^{-}(\lambda) \cup \{\lambda\}$.

Если $\mu \in S^{+}(\lambda)$ и $\mu_i = \lambda_i + 1$, то обозначим

$$V_{\mu}(\lambda) = \prod_{i \neq j}^{l(\lambda)+1} \frac{(a_i - a_j - k)(a_i + a_j + 2h - k)}{(a_i - a_j)(a_i + a_j + 2h)} \times$$

$$\times \frac{(a_i - k + h + \frac{1}{2}p + q)(a_i + k(l(\lambda) + 1) + 2h)(a_i + h - \frac{1}{2}p + \frac{1}{2})}{(a_i - k(l(\lambda) + 2))(a_i + h)(a_i + h + \frac{1}{2})}.$$

Если $\mu \in S^{-}(\lambda)$ и $\mu_i = \lambda_i - 1$, то обозначим

$$V_{\mu}(\lambda) = \prod_{i \neq j}^{l(\lambda)} \frac{(a_i - a_j + k)(a_i + a_j + 2h + k)}{(a_i - a_j)(a_i + a_j + 2h)} \times$$

$$\times \frac{(a_i + k + h - \frac{1}{2}p - q)(a_i - kl(\lambda))(a_i + h + \frac{1}{2}p - \frac{1}{2})}{(a_i + k(l(\lambda) + 1) + 2h)(a_i + h)(a_i + h - \frac{1}{2})}.$$

Тогда

$$a_{\lambda, \mu} = V_{\mu}(\lambda) \frac{J_{\lambda}(1)}{J_{\mu}(1)}, \quad \mu \in S(\lambda) \setminus \{\lambda\},$$

$$a_{\lambda, \lambda} = -k^{-1}(2h + p + 2q) - \sum_{\mu \in S(\lambda) \setminus \{\lambda\}} V_{\mu}(\lambda).$$

Теорема 2.2. Пусть $1, k, h$ линейно независимы над полем рациональных чисел. Тогда существует единственное семейство многочленов

$$J_{\lambda} = J_{\lambda}(x, y, k, p, q) \in P_{n, m}, \lambda \in H(m, n)$$

такое, что

$$J_\emptyset = 1, \quad p_1 J_\lambda = \sum_{\mu \in S(\lambda)} a_{\lambda, \mu} J_\mu, \quad (1)$$

где $p_1 = x_1 + x_1^{-1} + \dots + x_m + x_m^{-1} + k^{-1}(y_1 + y_1^{-1} + \dots + y_n + y_n^{-1})$.

Затем перейдем к вычислению приведенных выше формул для конкретных диаграмм. В работе также важно рассмотреть случаи, когда диаграмма Юнга λ состоит из одной клетки ($\lambda = (1)$) или является пустой ($\lambda = \emptyset$). Эти случаи требуют отдельного анализа, поскольку общие формулы для коэффициентов $a_{\lambda, \mu}$ в формуле Пьери могут существенно упрощаться или даже видоизменяться. Изучение этих крайних случаев не только дополняет теорию, но и необходимо для построения полной картины связи суперполиномов Якоби с теорией представлений супералгебр Ли.

В первом случае, когда диаграмма представлена одной клеткой, можно добавить клетку в первую или вторую строки, а убрать только единственную клетку. Исходя из этих соображений и формул, представленных ранее, получим, что

$$p_1 J_\lambda = J_{\mu_1} + J_{\mu_2} + \frac{2(1-t)}{t} J_\lambda - \frac{2(2-2t)}{t^2} J_{\mu_3},$$

где $\mu_1 = (2, 0)$, $\mu_2 = (1, 1)$, $\mu_3 = \emptyset$.

Во втором случае, когда диаграмма пустая, можно только добавить одну клетку или не делать ничего. Тогда имеем

$$p_1 J_\lambda = J_\mu - \frac{2}{t} J_\lambda,$$

где $\mu = (1)$.

Теперь можно провести аналогичные вычисления для диаграммы $\lambda = (a, 1, 1, 1, \dots, 1)$ первая строка которой состоит из a клеток, а следующие b строк из одной клетки.

Для детального исследования структуры диаграмм Юнга λ необходимо систематически рассмотреть все возможные модификации, возникающие при добавлении или удалении клеток. В данной ситуации можно убрать одну

клетку из первой строки и добавить клетку в первую строку. Аналогично можно поступить с последней строкой. Далее положим $m = n = 1, q = 0$ и перейдем к пределу при $k \rightarrow -1$.

Исходя из вышесказанного можно вывести следующую теорему.

Теорема 3.2. Справедливы следующие формулы Пиери:

1. Для диаграммы-крюка вида $\lambda = (a, 1^{a-1})$ формула Пиери имеет вид:

$$p_1 J_\lambda = J_{(a+1, 1^{a-1})} + J_{(a, 1^a)} + \frac{a-t}{a-t-1} (J_{(a-1, 1^{a-1})} + J_{(a, 1^{a-2})}).$$

2. Для диаграммы-крюка вида $\lambda = (a, 1^{a-2})$ формула Пиери имеет вид:

$$p_1 J_\lambda = J_{(a+1, 1^{a-2})} + J_{(a, 1^{a-1})} + \frac{a-t-2}{a-t-1} J_{(a-1, 1^{a-2})} + J_{(a, 1^{a-3})}.$$

3. Для диаграммы-крюка вида $\lambda = (a, 1^a)$ формула Пиери имеет вид:

$$p_1 J_\lambda = J_{(a+1, 1^a)} + J_{(a, 1^{a+1})} + J_{(a-1, 1^a)} + \frac{a-t-2}{a-t-1} J_{(a, 1^{a-1})}.$$

4. Для диаграммы-крюка вида $\lambda = (a, 1^b)$, которые не удовлетворяют ни одному из вышеописанных случаев, формула Пиери имеет вид:

$$p_1 J_{(a, 1^b)} = J_{(a+1, 1^b)} + J_{(a, 1^{b+1})} + J_{(a-1, 1^b)} + J_{(a, 1^{b-1})} - \{\delta(a=1) + \delta(b=1)\} J_{(a, 1^b)}.$$

5. В случае, когда диаграмма представлена одной клеткой, имеем

$$p_1 J_\lambda = J_{\mu_1} + J_{\mu_2} + \frac{2(1-t)}{t} J_\lambda - \frac{2(2-2t)}{t^2} J_{\mu_3},$$

где $\mu_1 = (2, 0)$, $\mu_2 = (1, 1)$, $\mu_3 = \emptyset$.

Во случае, когда диаграмма пустая, имеем

$$p_1 J_\lambda = J_\mu - \frac{2}{t} J_\lambda,$$

где $\mu = (1)$.

Далее перейдем к пределу при $t \rightarrow \infty$. Имеем следующее следствие.

Следствие 3.1. При переходе к пределу при $t \rightarrow \infty$ для диаграммы λ имеем следующую формулу Пьери для $\lim_{t \rightarrow \infty} J_\lambda(t) = I_\lambda$

$$p_1 I_{(a,1^b)} = I_{(a+1,1^b)} + I_{(a,1^{b+1})} + I_{(a-1,1^b)} + I_{(a,1^{b-1})} - \{\delta(a=1) + \delta(b=1)\} I_{(a,1^b)},$$

Иными словами

$$p_1 I_\lambda = \sum_{\mu \in S^+(\lambda) \cup S^-(\lambda)} I_\mu - \{\delta(\lambda_i = 1) + \delta(\lambda'_i = 1)\} I_\lambda.$$

Для пустой диаграммы имеем

$$p_1 I_\emptyset = I_{(1)},$$

В случае, когда диаграмма представлена одной клеткой, имеем

$$p_1 I_{(1)} = I_{(2,0)} + I_{(1,1)} - 2I_{(1)}.$$

В теории представлений супералгебр Ли характеры Эйлера играют фундаментальную роль, являясь суперсимметричным аналогом классических характеров представлений. В случае супералгебры $\mathfrak{osp}(3|2)$ характеры Эйлера неприводимых представлений тесно связаны с предельными значениями суперполиномов Якоби при специальном выборе параметров.

В работе Грусон и Сергановой доказывается формула для разложения характера неприводимого модуля по характерам Эйлера.¹³

В работе Веселова и Сергеева было доказано, что I_λ совпадают с характерами Эйлера E_λ для $\mathfrak{osp}(m|n)$.

Определение 4.1. Введем полиномы Q_λ по следующей формуле

$$Q_\lambda = E_\lambda - \frac{1}{t - \lambda_1 + 1} (E_{\lambda^{(1)}} - E_{\lambda^{(2)}} + \dots + (-1)^{\lambda_1-2} E_{(1)} + 2(-1)^{\lambda_1-2} E_\emptyset).$$

¹³Cruson, C. Cohomology of generalized supergrassmannians and character formulae for basic classical Lie superalgebras / C. Cruson, V. Serganova // Proe. Lond. Math Soc. (3), 2010 – P. 852-892.

Отдельно введем полиномы Q_λ для пустой диаграммы и диаграммы, состоящей из одной клетки

$$Q_\emptyset = E_\emptyset,$$

$$Q_{(1)} = E_{(1)} + \frac{2}{t}E_\emptyset.$$

В данном определении $\lambda^{(1)}$ – это диаграмма, полученная из λ путем отнимания по одной клетке из первой строки и первого столбца одновременно, $\lambda^{(2)}$ – это диаграмма, полученная из λ путем отнимания по две клетки из первой строки и первого столбца одновременно и так далее.

Теорема 4.1. Для различных диаграмм λ справедливо следующее:

1. При $\lambda_1 \neq \lambda'_1$, то есть количество клеток в первой строке не совпадает с количеством клеток в первом столбце, имеем $J_\lambda = I_\lambda$.
2. При $\lambda_1 = \lambda'_1$, то есть количество клеток в первой строке совпадает с количеством клеток в первом столбце, имеем $J_\lambda = Q_\lambda$.

Теорема 4.2. Если диаграмма $\lambda \neq (1)$, то $J_\lambda(t)$ совпадает с неприводимым характером $\mathbf{osp}(3|2)$ при $t = \lambda_1$.

Если диаграмма состоит из одной клетки $\lambda = (1)$, то $J_\lambda(t)$ совпадает с неприводимым характером $\mathbf{osp}(3|2)$ при $t = 2$.

Заключение. В данной магистерской работе проведено исследование взаимосвязи между суперполиномами Якоби и теорией представлений супералгебры Ли $\mathbf{osp}(3|2)$. К основным результатам работы можно отнести вычисление коэффициентов разложения $a_{\lambda,\mu}$ в формуле Пиери для суперполиномов Якоби. В ходе работы получены общие формулы для диаграмм вида $\lambda = (a, 1^b)$ (Теорема 3.2) и исследованы симметричные случаи, где возникают особенности при предельном переходе.

Также установлена связь между предельными значениями суперполиномов Якоби и характерами Эйлера представлений $\mathbf{osp}(3|2)$, а именно доказано, что J_λ совпадает с характером Эйлера при специальных значениях параметров (Теорема 4.2).

Дополнительно разработано программное обеспечение на языке Python для визуализации диаграмм Юнга, используемых в исследовании. Код про-

граммы приведен в приложении и позволяет строить произвольные диаграммы Юнга и отображать операции добавления или удаления клеток.

Перспективным направлением дальнейших исследований может быть обобщение результатов на случай супералгебр $\mathfrak{osp}(m|n)$ и изучение связи с другими классами ортогональных суперполиномов.

Теоретическая значимость работы заключается в развитии методов, связывающих теорию представлений супералгебр Ли с квантовыми интегрируемыми системами. Практическая ценность результатов состоит в явных вычислениях коэффициентов разложения и разработке программного инструментария для работы с диаграммами Юнга.

Работа развивает теорию представлений супералгебр Ли – активно развивающегося направления современной математики, имеющего глубокие связи с теоретической физикой. Результаты данной работы находятся на стыке алгебры, теории представлений и математической физики, что соответствует современным тенденциям развития математики, также они могут быть применены в теории интегрируемых систем, квантовой теории поля и суперсимметричных моделях. Разработанные методы явного вычисления коэффициентов представляют самостоятельную ценность для специальных функций, например, для характеров и суперхарактеров представлений классических и суперсимметричных алгебр Ли.